

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

UNIVERSITÉ BADJI MOKHTAR - ANNABA  
BADJI MOKHTAR – ANNABA UNIVERSITY



جامعة باجي مختار – عنابة

Faculté : Science de l'ingénierie

Département : Génie mécanique

Domaine : Sciences et techniques

Filière : Génie mécanique

Spécialité : construction mécanique

**Mémoire**

**Présenté en vue de l'obtention du Diplôme de Master**

**Thème:**

**ANALYSE NUMERIQUE DU COMPORTEMENT MECANIQUE DES  
PONTS RENFORCES PAR MATERIAUX COMPOSITES**

**Présenté par :**

**BOURBIA IMENE**

**OUALI ATIKA**

**Encadreur : M.m TEKILI . S**

MEMOIRE DE MASTER II \_FACULTE CIDI AMMAR Université Badji Mokhtar ANNABA

Année Universitaire : 2021/2022

❖ *Remerciements :*

*Tout d'abord, nous remercions Dieu Tout-Puissant, qui nous a aidés et nous a donné le courage de mener à bien nos études dans les meilleures conditions,*

*Et nous remercions Madame TEKILI SABAH de l'avoir reçue, comprise, et soutenue jusqu'au bout de ce travail.*

*Nous remercions chacun des messieurs :*

*GOUASEMI SACI*

*KHEIREDDINE LAMRI*

*LAISSAOUI RACHID*

*Qui nous ont fait l'honneur d'acceptant la présidence de ce Jury ;*

*Nous remercions tous les enseignants du département de Génie mécanique*

*Nous remercie également tous ceux qui ont contribué à la réalisation de ce travail, qu'ils soient de près ou de loin*

## *Résumé*

*La recherche dans le domaine de la construction mécanique constitue un axe particulièrement important pour la prévention du risque de la rupture. Elle consiste à trouver de nouvelles méthodes et techniques de génie mécanique permettant aux constructions de résistance des matériaux. Pour cela, une bonne connaissance du comportement des structures est très importante. Dans ce travail, une stratégie de modélisation simplifiée basée sur l'utilisation des poutres multifibre 2D a été adoptée afin de simuler le comportement non linéaire d'ou ouvrage en béton armé. Cette technique garantit une souplesse du calcul grâce au petit nombre de degrés de liberté. Des lois de comportement locales basées sur la théorie de l'endommagement et de la plasticité sont utilisées pour le béton et pour l'acier.*

*Une analyse non linéaire basée sur la théorie de la multifibre permet tout en gardant un temps de calcul acceptable de fournir des résultats très fins lors du post traitement pour calculer les différents paramètres (ductilité, moment résistant, endommagement, ouverture de fissures .....).*

***MOTS-CLÉS : Modélisation, Multifibre, Endommagement, Plasticité, Performances.***

# Sommaire

*Introduction générale*.....9

**Chapitre –I**  
**Généralité sur matériaux composites**

**I.1. Définition d'un matériau composite** .....12

**I.2 Caractéristiques générales des matériaux composites**.....12

**I.3 Type des matériaux composites** .....13

**I.4 Classification des matériaux composites** .....14

**I.5 Composants** .....15

**I.6 Avantages et inconvénients des composites**.....18

**I.7 Stratifié**.....18

**Chapitre II**

**Modélisation des matériaux composites**

**II.1. Introduction** .....21

**II.2 Mécanique des milieux continus**.....21

**II.3 Mécanique de composite unidirectionnel**.....26

**II.4 Mécanique des structures stratifiées** .....31

<b>II.5 Théorie classique des stratifiées .....</b>	<b>33</b>
<b>II.6 Comportement des poutres stratifiées .....</b>	<b>39</b>
<b>II.7 Conclusion .....</b>	<b>40</b>

### **Chapitre III :**

#### **Modélisation des éléments finis (Poutre \_ portique)**

<b>III.1.Introduction .....</b>	<b>42</b>
<b>III.2.Définitions .....</b>	<b>42</b>
<b>III.3.Vibration libre des poutres rrenforces par matériaux composites .....</b>	<b>43</b>
<b>III.4. Propriétés mécaniques de matériaux composites.....</b>	<b>48</b>

### **Chapitre –IV**

#### **Les endommagements des ponts en béton et en acier IV.**

<b>IV.1.Introduction .....</b>	<b>52</b>
<b>IV.2. Réponse dynamique de la structure d’un pont .....</b>	<b>52</b>
<b>IV.3. Elément poutre multifibre .....</b>	<b>53</b>
<b>IV.5.Évolution des Propriétés mécaniques de l’acier .....</b>	<b>54</b>
<b>IV.6.Évolution des Propriétés mécaniques de béton.....</b>	<b>56</b>
<b>IV.7. Estimer et comparer la durée de vie des ponts .....</b>	<b>57</b>

### **Chapitre V application et résultats**

<b>V.1.Introduction.....</b>	<b>59</b>
<b>V.2. Résultats et analyse des résultats ponts-poutres.....</b>	<b>61</b>
<b>V.3. Conclusion.....</b>	<b>68</b>

# **INTRODUCTION GENERALE**

## **Introduction générale :**

Les propriétés des matériaux composites permettent de les utiliser dans une grande variété de domaines, Les poutres renforcées par matériaux composites sont largement utilisées dans les structures de construction civiles, mécaniques, l'aéronautique et l'aérospatiale grâce à leurs propriétés spécifiques (Matériau à coefficient de dilatation nul ,Rigidité, faible sensibilité à la fatigue).Le renforcement des structures par matériaux composites a pour but de réparer et de mettre en conformité des structures existantes.

Les nouvelles méthodes de réparation et de réhabilitation des structures ont toujours préoccupé les ingénieurs civils. Le climat rigoureux de notre pays, et le vieillissement rapide de nos structures qui en résulte, amènent des coûts énormes pour les propriétaires des structures. L'utilisation des matériaux composite s'avère une méthode de plus en plus courante lors de la réfection des structures en béton armé. En effet, ces matériaux ne sont utilisés que depuis environ dix ans, mais ils ont su démontrer jusqu'à maintenant de nombreux avantages. L'objectif de cette recherche est de décrire le comportement des poutres en béton armé renforcées avec des matériaux composites. Le collage de ce type de matériaux sur les poutres en béton armé permet d'augmenter leur résistance ultime en flexion et en cisaillement. À ce jour, il n'y a pas de norme concernant la conception d'un renforcement avec ces matériaux. Ce mémoire propose alors un modèle permettant de prédire le comportement des poutres en béton armé renforcées avec ces matériaux et suggère une méthode de conception pour le renforcement en flexion et en cisaillement. Les modèles expliqués se basent sur les normes existantes de béton armé, mais considèrent l'ajout du matériau composite sur le comportement de l'ensemble. Les modèles étudiés ont permis l'élaboration de logiciels d'analyse qui permettent d'aider les concepteurs à bien utiliser ces nouveaux matériaux. Plusieurs phénomènes de dégradations des ouvrages en béton armé sont la cause de déficiences structurales.

Sachant qu'en analyse numérique, la méthode des éléments finis est utilisée pour résoudre numériquement des équations aux dérivées partielles. Celles-ci peuvent par exemple représenter analytiquement le comportement dynamique de certains systèmes physiques.

Le mémoire comporte cinq chapitres :

Le premier chapitre est une présentation d'une manière générale des matériaux composites, de leurs différents composants, de leurs caractéristiques. Les principales

Propriétés des matériaux constitutifs des composites sont données avec plus de détail, telle que les l'architectures des matrices et des fibres du matériau composite

Dans le second chapitre nous résumons la théorie des stratifiés avec différents ordres qui basée sur les équations des déplacements, des déformations et des contraintes pour décrire le comportement des matériaux composites. Une approche appropriée pour les poutres renforcée par matériaux composites est utilisée pour prendre en compte le couplage entre les comportements en membrane, flexion et torsion.

On présente dans le troisième chapitre des études de comportement dynamique des poutres et des portiques on prenant en considération les propriétés mécaniques des matériaux composites.

Le quatrième chapitre est consacré à la réponse de la structure pont, il expose aussi les principaux endommagements observés sur les ponts en acier ainsi que les modèles D'endommagement des structures en béton armé ce chapitre se termine avec une estimation de la durée de vie des ponts.

Le cinquième chapitre est consacré a une application sur deux types de ponts le premier en acier et le second en béton armé où on applique une force extérieure provoquant une grande déformation des ponts , le renforcement réduit les déplacements et les propagations des fissures , l'étude se fait par la méthode des éléments finis.

Pour cela un code sous MATLAB a été élaboré pour l'étude et l'analyse des déplacements et déformation de la structure portique.

Enfin une conclusion générale et recommandations sont présentées à la fin de ce Mémoire.

# **Chapitre I**

## **Généralité sur les matériaux**

### **Composites**

### I.1. Définition d'un matériau composite :

Un matériau composite est un assemblage d'au moins deux matériaux non miscibles qui possède des propriétés que les éléments constitutifs seuls n'ont pas.

Un matériau composite est constitué :

- d'une ossature appelée renfort qui assure la tenue mécanique du matériau composite. Le renfort permet aux matériaux composites d'avoir des propriétés isotropes, anisotropes ou orthotropes.
- d'une matrice : matériau constitué de plastique (*Thermodurcissable ou Thermoplastique*), métal ou céramique.

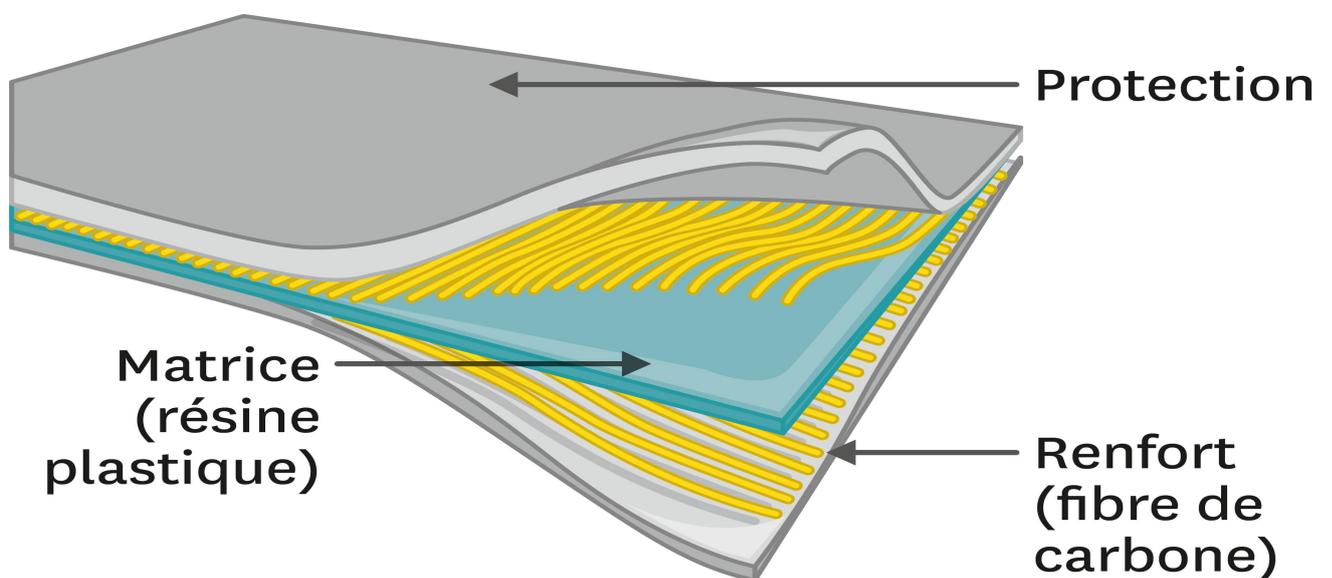


Figure I.1 : un matériau composite

### I.2 Caractéristiques générales des matériaux composites :

Dans le cas de plusieurs phases discontinues de natures différentes, le composite est dit hybride. La phase discontinue est habituellement plus dure avec des propriétés Mécaniques supérieures à celles de la phase continue.

La phase continue est appelée la matrice. La phase discontinue est appelée le renfort Ou matériau renforçant.

### I.3 Type des matériaux composites :

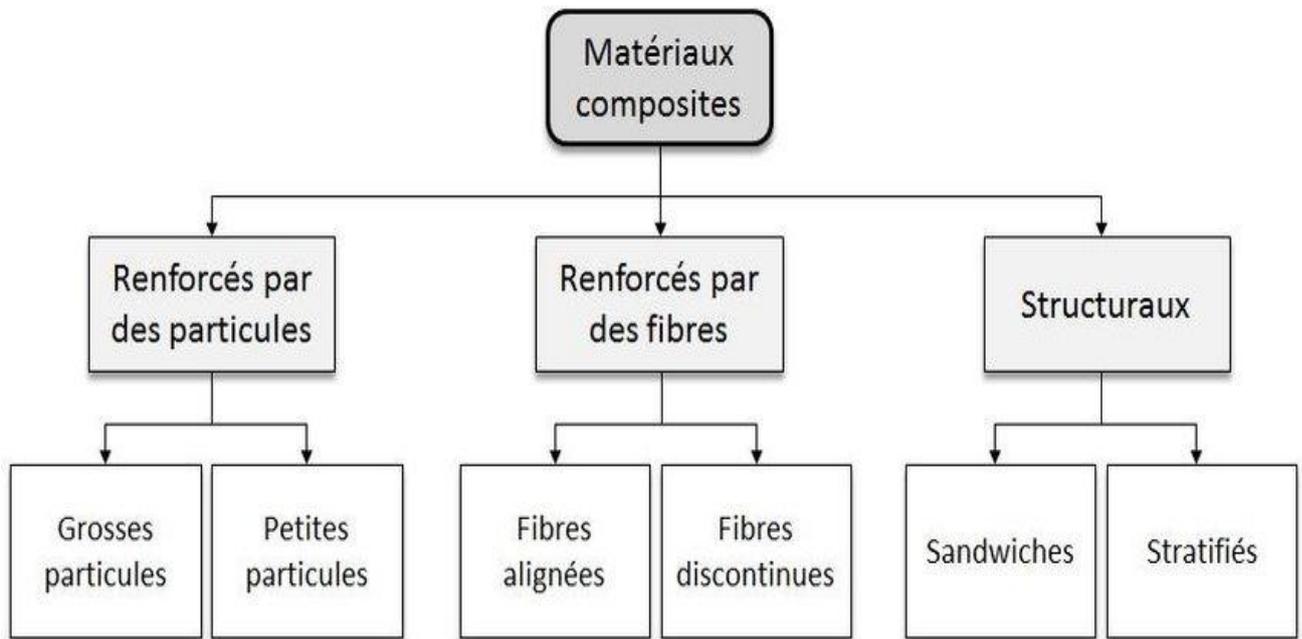


Figure I.2 : type des matériaux composites

Il existe 3 grandes familles qui répertorient les matériaux composites en fonction de la matrice qui les compose :

- **Le CMO** (ou composite à matrice organique) qui est le plus utilisé aujourd'hui grâce à son coût plus bas permettant une production en série
- **Le CMC** (ou composite à matrice céramique) qui est majoritairement utilisé pour des domaines très spécifiques à haute technicité et à température élevée : spatial, militaire ou encore nucléaire
- **Le CMM** (ou composite à matrice métallique) qui est composé d'aluminium, zinc ou magnésium par exemple qui peut être utilisé pour diverses applications comme l'automobile, les loisirs ou encore l'électronique

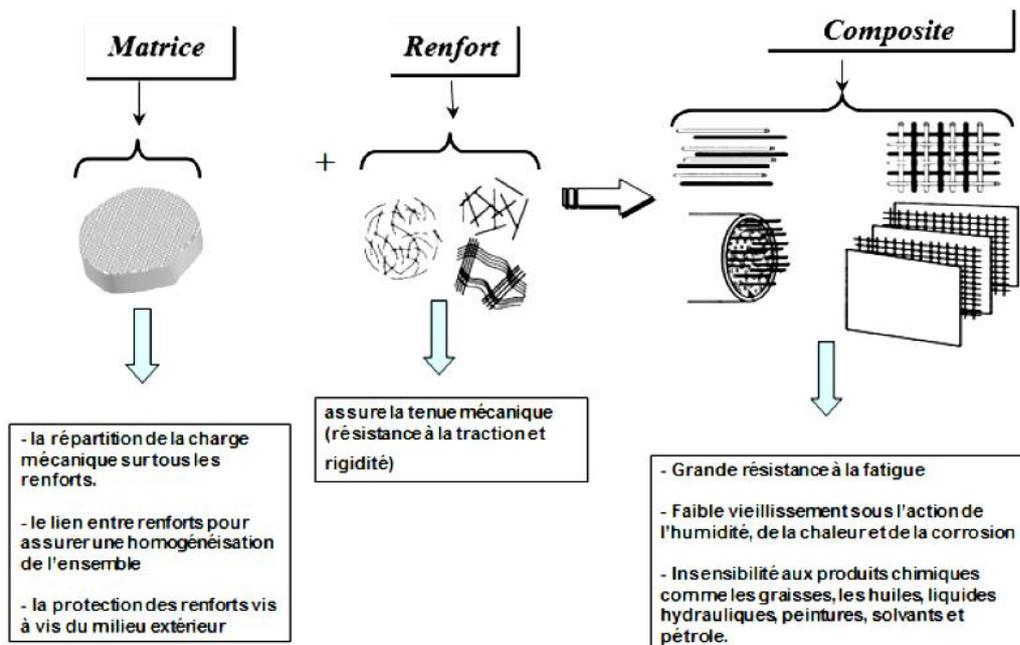
Pour chacune de ces familles, les renforts utilisés pour compléter la matrice sont différents.

Dans la famille de composite la plus répandue aujourd'hui, le composite à matrice organique, on distingue deux catégories :

- Le composite à grande diffusion : est le moins coûteux à produire et est utilisé dans la fabrication de pièces de toutes sortes.
- Le composite à haute performance : est plus cher à produire bien qu'il ait des qualités mécaniques supérieures. Il est ainsi utilisé dans les secteurs de l'aéronautique, le nautisme, le sport et les loisirs.

#### I.4 Classification des matériaux composites :

Classification des matériaux composites Selon la nature de la matrice, on distingue trois grandes classes de composites, considérées ici par ordre croissant de tenue en température : Les composites à matrice polymère (CMP) | Les composites à matrice métallique (CMM) | Les composites à matrice céramique (CMC) | Les matériaux utilisés comme renforts présentent de bonnes propriétés mécaniques intrinsèques (carbone, alumine, silice, bore, kevlar, acier, nitrure et carbure de silicium...). Les renforts continus ou fibres longues procèdent un diamètre qui varie selon leur nature, entre quelques micromètres et une centaine de micromètres. Selon l'application envisagée, l'assemblage de ces fibres longues peut être unidimensionnel (plis unidirectionnels). Bidimensionnel (plis tissés, mats à fibres coupées de quelques centimètres ou à fibres continues) ou tridimensionnel (tissus multidimensionnels). Les matrices polymères renforcées par des fibres de verre, sont employées dans les produits de grande diffusion, et possède une grande importance. Les fibres de carbone et de kevlar sont utilisées dans pour des applications plus spécifiques de hautes performances telles que l'aéronautique et l'aérospatiale. D'autres types de renforts sont employés tels que des billes (verre, élastomère ...) et des charges (fibres broyées, écailles, poudres...). L'utilisation des (CMP) reste limitée au domaine de températures inférieures à 200°C,



**Figure I.3:** Classification des matériaux composites

## I.5 Composants :

### I.5.1 Matrices :

Le rôle de la matrice est principalement de lier les fibres, mais aussi, d'assurer une répartition spatiale homogène du renfort. D'un point de vue mécanique, la matrice transmet et répartie les efforts extérieurs vers le renfort. D'un autre côté, elle apporte à la structure une tenue chimique et donner la forme désirée au produit.

**Tableau I.1 :** Principales différences entre les Matrices TP et TD.

Matrice	Thermoplastique TP	Thermodurcissable TD
Etat de base stockage	Solide prêt a l'emploi	Liquide visqueux à polymériser
	Illimité	Réduit
Moulage refroidissement	Chauffage + refroidissement	Chauffage continu
	Court	Long
	Réduite	Bonne
	Assez bonne	Limitée
	Recyclable	Perdus ou recyclés en charge
Mouillabilité renforts	Difficile	Aisée

#### I.5.1.1 Les matrices thermodurcissables :

Les résines thermodurcissables ont des propriétés mécaniques élevées. Ces résines ne peuvent être mises en forme qu'une seule fois. Elles sont en solution sous forme de polymère non réticulé en suspension dans des solvants. Les résines polyesters insaturées, résines de condensation (phénoliques, aminoplastes,) et les résines époxy sont des résines Thermodurcissables.

#### I.5.1.2 Les matrices thermoplastiques :

Les résines thermoplastiques ont des propriétés mécaniques faibles. Ces résines sont dures et solides qui nécessitent une transformation à très haute température. Les polychlorures de vinyle (PVC), les polyéthylènes, polypropylène, polystyrène, polycarbonate polyamide sont quelques exemples de ces résines thermoplastiques. De même que pour les résines

thermodurcissables, les matériaux les plus performants ont des caractéristiques mécaniques élevées et une masse volumique faible. [9]

#### **I.5.1.3 Les matrices métalliques :**

L'imprégnation de renforts par un alliage liquide étant une opération techniquement délicate, en pratique seuls les alliages d'aluminium sont utilisés dans ce type de technique, associés à des fibres ou particules de graphite ou de céramiques. Ils sont faciles à mettre en œuvre car leur température de fusion est relativement basse. Le compromis obtenu entre la ténacité de la matrice métallique et la rigidité des renforts donne au composite des caractéristiques mécaniques intéressantes par rapport à l'alliage seul, surtout au-dessus de 200 °C. Leur coût de mise en œuvre élevé réserve les composites à matrice métallique aux applications aéronautiques et spatiales.

#### **I.5.1.4 Matrices Céramiques :**

Des composites à matrices céramiques peuvent être obtenus par imprégnation de préformés de fibres (métaux, verres, aramides, carbone, céramique) soit par des suspensions liquides, ensuite frittées en température sous haute pression, soit par des gaz réactifs permettant un dépôt entre les fibres (notamment pour les composites carbone-carbone).

#### **I.5.2 Les renforts :**

Un matériau composite est un composite à fibres si le renfort se trouve sous forme de fibres. Les fibres utilisées se présentent soit sous forme de fibres continues, soit sous forme de fibres discontinues : fibres coupées, fibres courtes. L'arrangement des fibres, leur orientation permettent de moduler à la carte les propriétés mécaniques des matériaux composites pour obtenir des matériaux allant de matériaux fortement anisotropes à des matériaux isotropes dans un plan. La classification des types de renforts couramment rencontrés est indiquée sur la figure suivante :

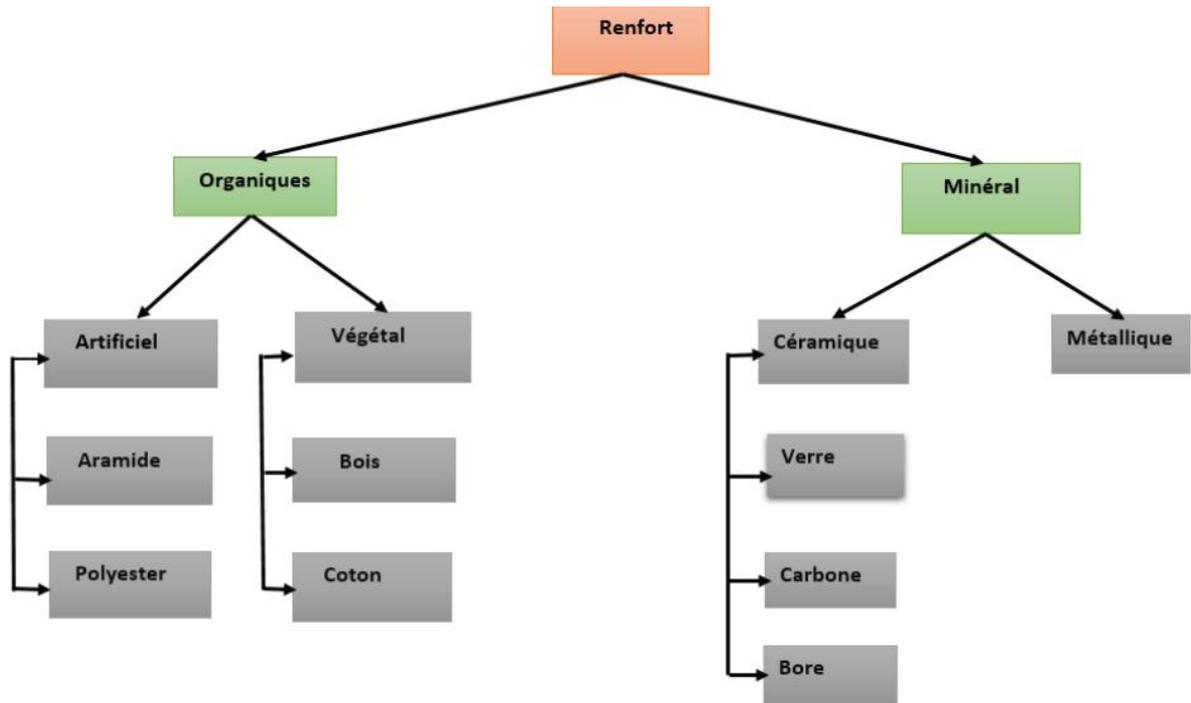


Figure I.4 : Les différents types de renfort de base.

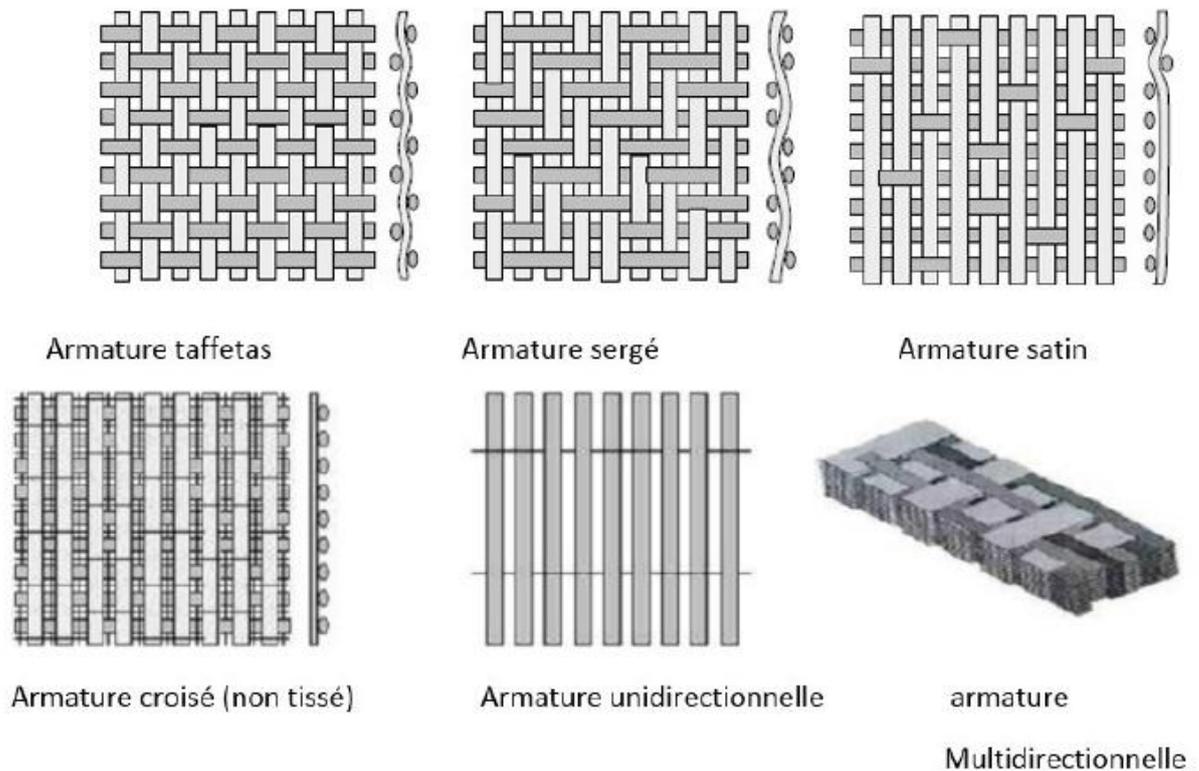
### 1.5.2.1 Renfort en fibres discontinues :

Des fibres courtes, ou particules (charges sous forme de microbilles, de fibres Broyées, d'écailles ou de poudre), permettent d'améliorer certaines propriétés de la matrice (Résistance à l'usure, propriétés thermiques, poids). Celle-ci reste l'élément de base et on Obtient alors un « polymère renforcé ».

### 1.5.2.2 Renfort continu :

Sous forme de fibres longues qui sont généralement utilisées pour des composites HP. Cette forme fibreuse offre une résistance à la rupture et souvent un module d'élasticité Beaucoup plus élevée que ceux du même matériau massif, avec une augmentation de la Longueur de 10000 fois, ou bien pour le même volume, la surface est multiplié par 100 dans Le cas des fibres de verre.

Ces renforts ont le rôle d'assurer la bonne tenue mécanique des composites et sont Disposés au sein du matériau en fonction des propriétés recherchées. Pour créer une structure Résistante adaptée aux contraintes mécaniques, il existe plusieurs architectures de renforts : Unidirectionnelle (nappes ou rowing), bidirectionnelle (tissus ou complexes 2D), -Tridimensionnelle (fibres orientées suivant trois directions).



**Figure I.5 :** Différentes formes de renforts continus.

### I.6 Avantages et inconvénients des composites :

Les composites sont préférés à d'autres matériaux parce qu'ils offrent des atouts liés à :

- Leur légèreté
- Grande résistance à la fatigue
- Faible vieillissement sous l'action de l'humidité, de la chaleur, de la corrosion
- Insensibilité aux produits chimiques
- Possibilité de prendre plusieurs formes (pièces complexes)
- Bonne tenue au feu (attention aux dégagements toxiques)
- Cependant certains inconvénients freinent leur diffusion
- Les coûts des matières premières et des procédés de fabrication
- La sensibilité à la chaleur
- La gestion des déchets engendrés et la réglementation de plus en plus stricte.

### I.7 Stratifié :

Un stratifié est constitué d'un empilement de monocouches ayant chacune une orientation propre par rapport à un référentiel commun aux couches, et désigné comme le référentiel du Stratifié ;

Le choix de l'empilement et plus particulièrement des orientations permettra d'avoir des Propriétés mécaniques spécifiques. On pourra avoir des stratifiés du type :

1. Equilibré : stratifié comportant autant de couches orientées suivant les directions

Couches orientées.

2. Symétrique : stratifié comportant des couches disposées symétriquement par rapport à un Plan moyen.

3. Antisymétrique : stratifié comportant des couches disposées non symétriquement par rapport à un plan moyen.

4. Croisé : stratifié comportant autant de couches à  $0^\circ$  que de couches à  $90^\circ$ .

5. Hybride : les couches successives comportent des fibres de natures différentes, il s'agit d'un stratifié hybride.

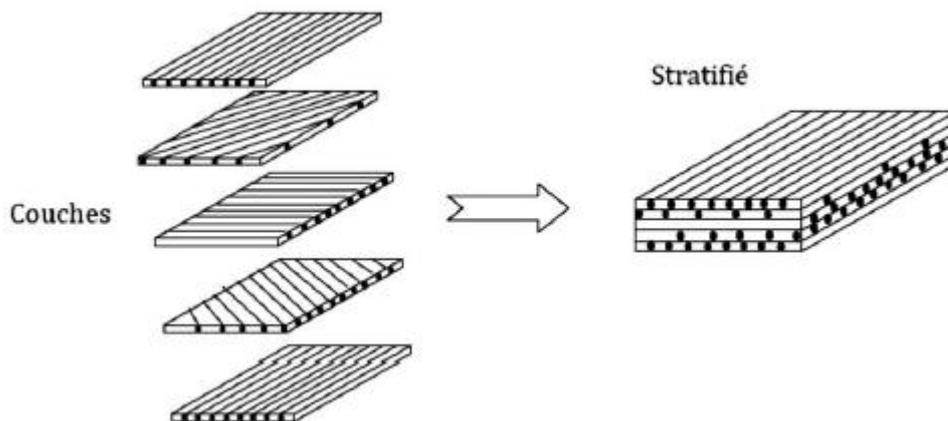


Figure I.6: Constitution d'un stratifié

### I.7.1 Désignation des structures stratifiées :

Le type de stratifié est défini généralement par sa séquence d'empilement, information qui fournit de manière synthétique l'orientation des diverses couches d'un stratifié. Par exemple, un stratifié de type  $(90^\circ, 0^\circ) 2s$  est constitué en fait de 8 couches orientées comme suit : deux groupes de plis à  $90^\circ$  et  $0^\circ$ , puis par symétrie de deux groupes de plis à  $0^\circ$  et  $90^\circ$ . L'avantage que présentent les composites stratifiés est de permettre de créer des matériaux aux propriétés mécaniques orientées de manière optimale afin de mieux répondre aux sollicitations de la structure

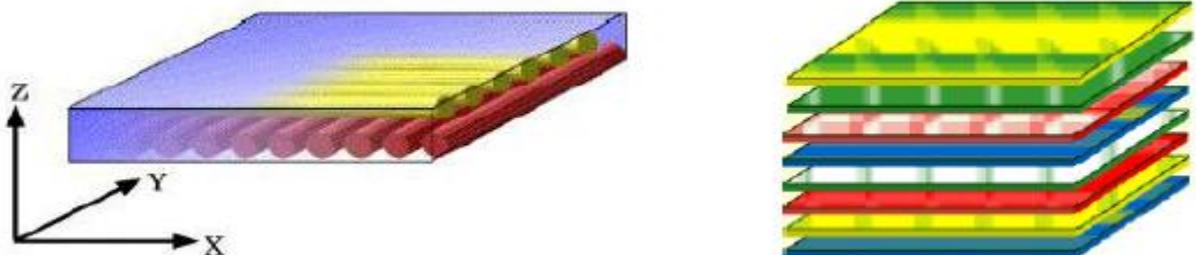


Figure I.7: Désignation d'un stratifié

# **Chapitre II :**

## **Modélisation des matériaux composites**

## II.1. Introduction :

Le but de ce chapitre est de présenter un résumé de la théorie classiques des composites. Cependant pour les lecteurs intéressés par plus de détails, ils peuvent consulter les ouvrages de [17 - 19], et de [38 - 39]. Dans la première partie de ce chapitre, nous rappelons les notions de base de la théorie d'élasticités nous introduisons les lois constitutives qui décrivent le comportement des matériaux définies comme des relations entre les composants du tenseur des déplacements, du tenseur des déformations et du tenseur des contraintes. La seconde partie décrit le comportement du composite unidirectionnel.

Une approche appropriée pour les poutres composites est utilisée pour prendre en compte le couplage entre les comportements en membrane, flexion et torsion. Cette méthode nous permet de redéfinir les paramètres de rigidité par des paramètres de rigidité équivalente utilisés dans ce document. Finalement, la dernière partie de ce chapitre décrit l'analyse des stratifiées utilisés dans le renforcement des poutres.

**II.2 Mécanique des milieux continus:** Pour les lecteurs intéressés par plus de détails, ils peuvent consulter l'ouvrage [40]. L'état de contrainte est défini par la relation suivante (Fig. 2.1) :

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Ou  $i$  indique la direction de la contrainte et  $j$  indique la direction de la normale.

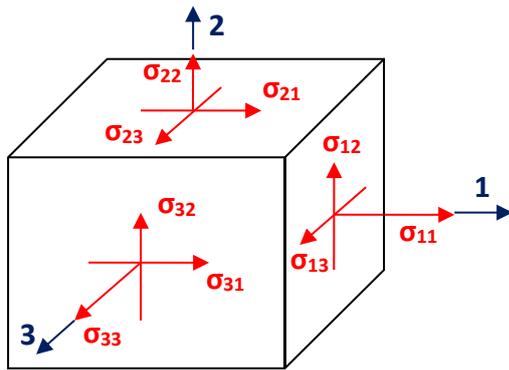


Fig. 2.1 Etat de contraintes

A l'équilibre on aura le tenseur de contrainte suivant :

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ Sym & & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

L'état de déformation est défini de façon similaire à l'état de contrainte :

$$[\epsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ Sym & & \epsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ & \epsilon_{22} & \gamma_{23} \\ Sym & & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

La déformation linéaire et angulaire sont définies par :

$$\begin{cases} \epsilon_{ii} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \\ \gamma_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \end{cases} \quad (2.3)$$

Les équations de compatibilité sont comme suit :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial^2 x_j^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial^2 x_i^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \quad i \neq j$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ii}}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( -\frac{\partial \varepsilon_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_k} \right) \quad i \neq j \neq k$$
(2.4)

La relation entre les contraintes et les déformations est donnée par la loi de Hooke généralisée :

$$\{\sigma\} = [C] \times \{\varepsilon\} \quad (2.5)$$

$$\text{Où } \{\sigma\} = \{\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \sigma_{23} \quad \sigma_{31} \quad \sigma_{12} \quad \sigma_{32} \quad \sigma_{13} \quad \sigma_{21}\}^T,$$

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{33} \quad \varepsilon_{23} \quad \varepsilon_{31} \quad \varepsilon_{12} \quad \varepsilon_{32} \quad \varepsilon_{13} \quad \varepsilon_{21}\}^T$$

Et [C] est la matrice de rigidité donnée par la relation suivante :

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1131} & C_{1112} & C_{1132} & C_{1113} & C_{1121} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2231} & C_{2212} & C_{2232} & C_{2213} & C_{2221} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3331} & C_{3312} & C_{3332} & C_{3313} & C_{3321} \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ C_{2111} & C_{2122} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & C_{2121} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Et inversement :

$$\{\varepsilon\} = [C]^{-1} \{\sigma\} = [S] \{\sigma\}$$

Où [S] = [C]<sup>-1</sup> est la matrice de souplesse ou de flexibilité.

A l'équilibre :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11} = \sigma_1 \\ \sigma_{22} = \sigma_2 \\ \sigma_{33} = \sigma_3 \\ \sigma_{23} = \sigma_{32} = \sigma_4 \\ \sigma_{13} = \sigma_{31} = \sigma_5 \\ \sigma_{12} = \sigma_{21} = \sigma_6 \end{array} \right. \text{Et} \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{11} = \varepsilon_1 \\ \varepsilon_{22} = \varepsilon_2 \\ \varepsilon_{33} = \varepsilon_3 \\ 2\varepsilon_{23} = 2\varepsilon_{32} = \gamma_{23} = \gamma_{32} = \varepsilon_4 \\ 2\varepsilon_{13} = 2\varepsilon_{31} = \gamma_{13} = \gamma_{31} = \varepsilon_5 \\ 2\varepsilon_{12} = 2\varepsilon_{21} = \gamma_{12} = \gamma_{21} = \varepsilon_6 \end{array} \right.$$

La relation (2.5) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \times \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{array} \right\} \quad (2.7)$$

Si le matériau ne possédant aucune propriété de symétrie il est appelé matériau **triclinique** c'est le cas le plus général.

Pour le cas particulier [3]:

Le matériau **unidirectionnel** comporte comme un matériau orthotrope qui possède 3 plans de symétrie perpendiculaire deux à deux, ayant de plus un axe de révolution. Le matériau est alors appelé matériau orthotrope de révolution ou isotrope transverse (Fig. 2.2) avec  $C_{22} = C_{33}$ ,  $C_{12} = C_{13}$  et  $C_{55} = C_{66}$  :

$$[C_{ij}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{C_{22} - C_{23}}{2} & 0 & 0 \\ Sym. & & & & C_{66} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

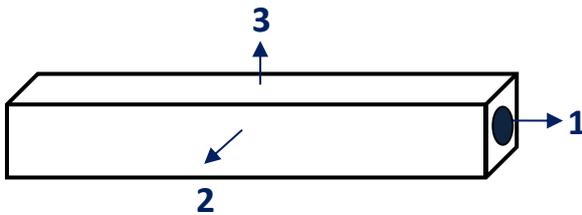


Fig. 2.2 Matériau composite unidirectionnel.

Un **matériau est isotrope** si ses propriétés sont indépendantes du choix des axes de référence.

L'application de cette propriété au matériau unidirectionnel conduit aux relations  $C_{22} = C_{11}$ ,  $C_{23} = C_{12}$ ,  $C_{66} = \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12})$  :

$$[C_{ij}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{(C_{11} - C_{12})}{2} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{(C_{11} - C_{12})}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{(C_{11} - C_{12})}{2} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Un matériau isotrope est caractérisé par deux constantes d'élasticité indépendantes  $C_{11}$  et  $C_{12}$  qui sont exprimés par les **coefficients de Lamé**  $\lambda$  et  $\mu$  :

$$C_{12} = \lambda Et \quad \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) = \mu$$

D'où

$$C_{11} = \lambda + 2\mu$$

Le **coefficient de Poisson** du matériau est

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

Il y a deux coefficients élastiques fondamentaux indépendants  $E$  et  $\nu$  et les relations suivantes :

$$G_{12} = G_{13} = G_{23} = G = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = \nu, (2.10)$$

$$[C_{ij}] = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \mu & 0 & 0 \\ & & & & \mu & 0 \\ & & & & & \mu \end{bmatrix} (2.11)$$

## II.3 Mécanique de composite unidirectionnel

### II.3.1 Relations contraintes-déformations

L'état complet de contraintes dans le repère local (1,2) d'un pli est représenté par la Fig. 2.3. Ainsi les propriétés mécaniques du pli ont été mesurées dans ce repère local.

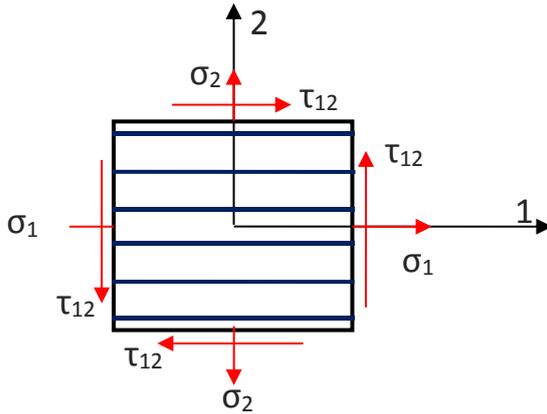


Fig. 2.3 Etat complet de contraintes dans le repère local

**Les équations de transformation relatives aux contraintes sont :**

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = [T(\theta)] \times \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.12)$$

Où [T] est la matrice de changement de repère :

$$[T(\theta)] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \cos \theta \sin \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \cos \theta \sin \theta \\ -\cos \theta \sin \theta & \cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Les équations de transformation relatives aux déformations sont tout à fait similaires à celles des contraintes

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \frac{\gamma_{12}}{2} \end{Bmatrix} = [T(\theta)] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} \end{Bmatrix} \quad (2.14)$$

Afin d'obtenir directement  $\gamma_{xy}$  il faut remplacer T(θ) par T'(θ) :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = [T'(\theta)] \times \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.15)$$

1

$$[T'(\theta)] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta \\ -2 \cos \theta \sin \theta & 2 \cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Les relations entre les contraintes et les déformations d'un pli soumis à un état complet de contraintes dans le repère local (1,2), sont définies par l'équation suivante [3]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_6 = \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.17)$$

Où les constantes de la matrice Q sont données par les équations suivantes :

$$\begin{cases} Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{21}\nu_{12}} \\ Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = Q_{21} \\ Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{66} = G_{12} \end{cases} \quad (2.18)$$

Dans le repère globale (x, y) les relations entre les contraintes et les déformations sont données par la relation suivante :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.19)$$

La matrice  $\bar{Q}$  est déduite par intermédiaire de la matrice de rigidité dans le repère local Q en tenant compte de la rotation des axes avec un angle  $\theta$  (Fig. 2.4).

L'angle de rotation des systèmes d'axes  $\theta$  est considéré comme positif lorsqu'il faut tourner dans le sens trigonométrique pour passer de l'axe x vers l'axe 1.

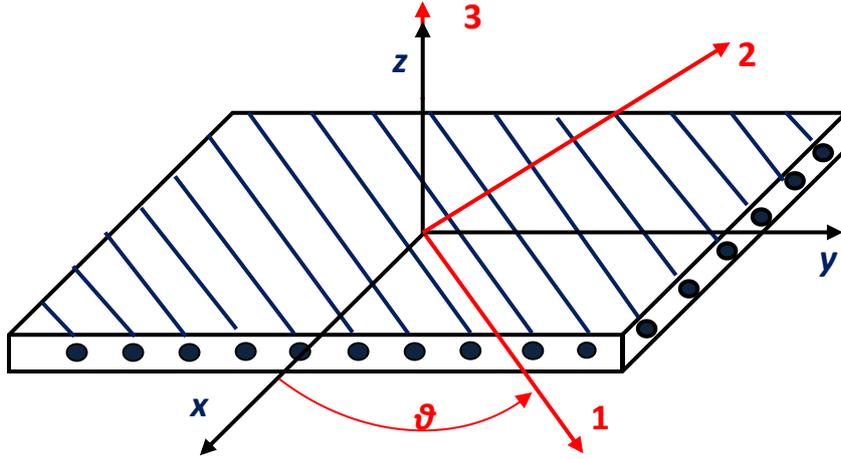


Fig. 2.4 Élément de composite et orientation des fibres

La matrice  $\bar{Q}$  est calculée comme suit :

$$[\bar{Q}] = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} = [T(\theta)]^{-1} \times [Q] \times [T'(\theta)] \quad (2.20)$$

Les éléments de la matrice  $\bar{Q}$  sont déterminés par les équations suivantes [3] :

$$\bar{Q} = \begin{Bmatrix} \bar{Q}_{11} \\ \bar{Q}_{12} \\ \bar{Q}_{22} \\ \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{66} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_{11} \cos^4 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta \\ (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + Q_{12} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) \\ Q_{11} \sin^4 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta \\ (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \cos^3 \theta \sin \theta - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66}) \cos \theta \sin^3 \theta \\ (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \cos \theta \sin^3 \theta - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66}) \cos^3 \theta \sin \theta \\ (Q_{11} + Q_{12} - 2Q_{22} - 2Q_{66}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + Q_{66} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) \end{Bmatrix} \quad (2.21)$$

### II.3.2 Module d'élasticité équivalent :

Le module d'élasticité suivant la direction  $ox$  (Fig. 2.5) est

$$E_x = \frac{\sigma_x}{\varepsilon_x}$$

Cette équation donne [3]:

$$E_x = \frac{1}{\frac{1}{E_1} \cos^4 \theta + \frac{1}{E_2} \sin^4 \theta + \left( \frac{1}{G_{12}} - 2 \frac{\nu_{12}}{E_1} \right) \cos^2 \theta \sin^2 \theta} \quad (2.22)$$

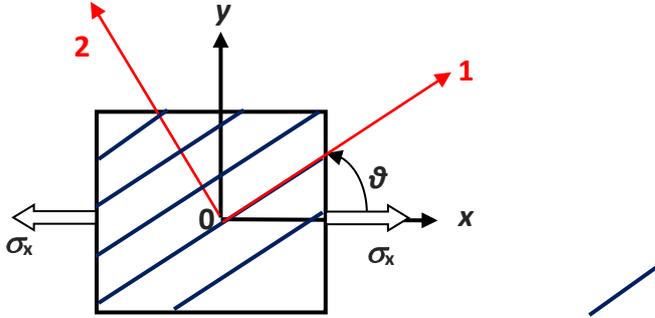


Fig. 2.5 : Plan de contrainte de l'élément composite dans la direction  $x$

En substituant  $\theta = \theta + 90^\circ$  dans l'expression précédente, on obtient :

$$E_y = \frac{1}{\frac{1}{E_1} \sin^4 \theta + \frac{1}{E_2} \cos^4 \theta + \left( \frac{1}{G_{12}} - 2 \frac{\nu_{12}}{E_1} \right) \cos^2 \theta \sin^2 \theta} \quad (2.23)$$

- *Coefficients de Poisson équivalent*

$$\nu_{xy} = E_x \left( \frac{\nu_{12}}{E_1} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) - \left( \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} - \frac{1}{G_{12}} \right) \cos^2 \theta \sin^2 \theta \right) \quad (2.24)$$

De façon similaire, on obtient

$$\nu_{yx} = E_y \left( \frac{\nu_{21}}{E_2} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) - \left( \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} - \frac{1}{G_{12}} \right) \cos^2 \theta \sin^2 \theta \right) \quad (2.25)$$

- *Module de rigidité  $G_{xy}$  équivalent*

$$G_{xy} = \frac{1}{2 \left( \frac{2}{E_1} + \frac{2}{E_2} + \frac{4\nu_{12}}{E_1} - \frac{1}{G_{12}} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{1}{G_{12}} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)} \quad (2.26)$$

## II.4 Mécanique des structures stratifiées

Les structures stratifiées sont constituées d'un certain nombre de plis qui sont empilés et collés successives les uns sur les autres comme indiqué à la figure 2.6. Les axes  $x$ ,  $y$  et  $z$  représentent le repère global de la structure. Par contre les axes 1 et 2 définissent le repère local du pli, ils sont orientés respectivement de façon parallèle et perpendiculaire à la direction des fibres. Le nombre de pli varie de 1 à  $n_p$ .

La séquence d'empilement commence à partir du premier pli inférieur et se termine au dernier pli. Chaque pli est défini par une épaisseur ( $h_k$ ), une orientation ( $\theta_k$ ) et un matériau ( $mat_k$ ). L'épaisseur de la structure stratifiée,  $H$  est égale à la somme des  $h_k$ . L'orientation du pli  $k$ ,  $\theta_k$  est définie par l'angle que fait son repère local (1,2) par rapport au repère global ( $x$ ,  $y$ ) de la structure.

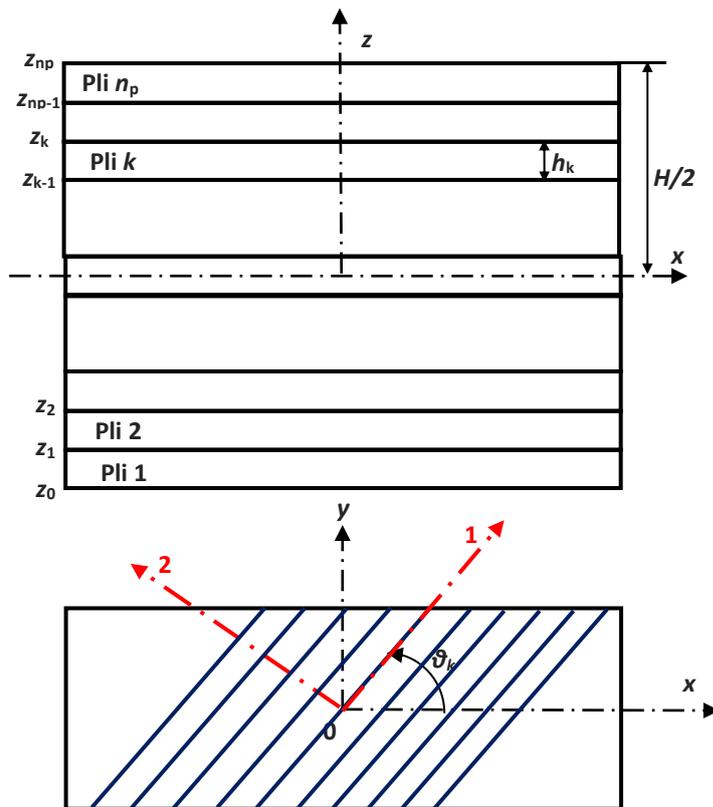


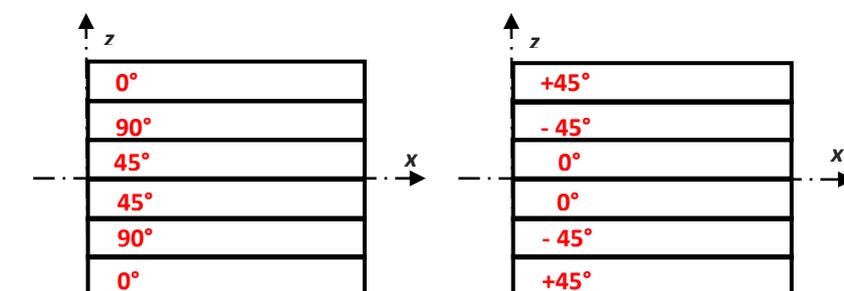
Figure 2.6 Structure stratifiée.

### II.4.1 Nomenclature des structures stratifiées

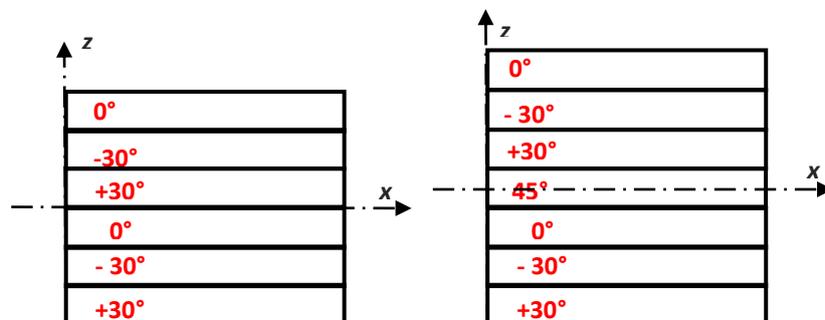
Une structure stratifiée est caractérisée par la séquence d'empilement des plis qui la constitue et l'orientation de chaque pli. Des plis adjacents sont séparés par une barre oblique (/) si leurs angles ont de différentes valeurs absolues. Un indice est utilisé afin d'indiquer le nombre de plis adjacents possédant la même orientation.

L'orientation de chaque pli est définie entre les crochets en commençant par le pli extérieur inférieur, en passant par le plan moyen jusqu'au pli extérieur supérieur. L'indice T à l'extérieur des crochets signifie que la séquence est définie au complet. Si deux plis consécutifs sont de mêmes orientations mais de signes opposés, on peut utiliser le signe  $\pm$  devant cette orientation afin d'alléger la représentation. On peut réduire davantage la nomenclature d'une structure stratifiée si celle-ci est symétrique par rapport au plan moyen ( $z = 0$ ). La façon de faire est de simplement représenter la première moitié de la séquence et d'utiliser l'indice S à l'extérieur des crochets afin d'indiquer la symétrie.

La figure 2.7 donne quelques exemples de nomenclature des structures stratifiées.



$$[0/90/45]_S [\pm 45,0]_S$$



$$[(0/\mp 30)_2] [(0/\mp 30)/45]_S$$

Fig. 2.7 Nomenclature des stratifiés

Les nombres entre crochets désignent l'angle de chaque pli (en degrés) par rapport à une direction de référence.

#### II.4.2 Type de structures stratifiées :

On peut avoir plusieurs types de structures stratifiées (Fig. 2.8) :

- Stratifié symétrique: Les plis sont disposés symétriquement par rapport au plan moyen géométrique (plan  $(x, y)$  passant par le milieu de l'épaisseur du stratifié).
- Stratifié équilibré: Nombre de plis à  $+\theta$  est égal au nombre de plis à  $-\theta$ .
- Stratifié orthogonal: Plis de  $0^\circ$  et de  $90^\circ$

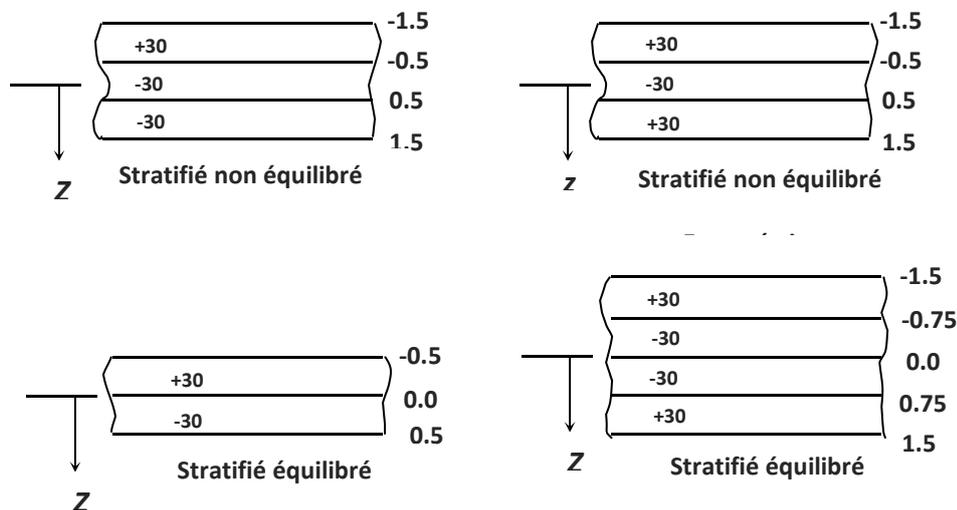


Fig.2.8 Différents types de stratifié

#### II.5 Théorie classique des stratifiées

L'expression générale du déplacement  $u$  en tout point d'un stratifié, de coordonnées  $(x, y, z)$ , peut être exprimée sous la forme de polynômes en  $z$ , généralement limités au degré 3, et de coefficients dépendant de  $(x, y)$ .

Le champ des déplacements est alors écrit sous la forme [17]:

$$u = u_0 + \left( c_{,0} \frac{\partial w}{\partial x} + c_1 \phi(x, t) \right) z + (c_2 \psi(x, t)) z^2 + \left( c_3 \psi(x, t) \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \phi(x, t) \right) \right) \frac{1}{h^3} z^3, \quad (2.27)$$

Où  $u$  et  $w$ , sont les déplacements dans les directions  $x$  et  $z$ , respectivement, et  $\psi$  et  $\phi$  sont les rotations d'un élément de ligne perpendiculaire à la direction initiale, dans la direction  $x$  et  $y$ , respectivement. Cette forme du champ des déplacements répond aux conditions de compatibilité des déformations, et permet de prendre en compte un gauchissement éventuel de la section droite des poutres lors de la déformation.

Les théories de poutre sont classées en fonction de l'ordre de polynôme d'approximation du déplacement  $u$  à travers l'épaisseur. Les cas particuliers de l'équation (2.27) sont donnés par [17] :

#### II.5.1 Théorie classique de poutre (**CBT**) ou la théorie des poutres Euler-Bernoulli (**EB**) :

Avec les constantes  $c_0 = -1$ ,  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = 0$ ,  $c_3 = 0$ , la relation (2.27) devient :

$$u = u_0 - \frac{\partial w}{\partial x} z, \quad (2.28)$$

#### II.5.2 Théorie de déformation de cisaillement de premier ordre (**FSDT**):

Avec les constantes  $c_0 = 0$ ,  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 0$ ,  $c_3 = 0$ , la relation (2.27) devient :

$$u = u_0 + \phi(x, t)z, \quad (2.29)$$

#### II.5.3 Théorie de déformation de cisaillement de second ordre (**SSDT**):

Avec les constantes  $c_0 = 0$ ,  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 1$ ,  $c_3 = 0$ , la relation (2.27) devient :

$$u = u_0 + \phi(x, t)z + \psi(x, t)z^2, \quad (2.30)$$

#### II.5.4 Théorie de déformation de cisaillement de troisième ordre (**TSDT**):

Avec les constantes  $c_0 = 0$ ,  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 0$ ,  $c_3 = - (4/3) h$ , la relation (2.27) devient :

$$u = u_0 + (\phi(x, t))z - \left( \frac{4}{3} h \psi(x, t) \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \phi(x, t) \right) \frac{1}{h^3} \right) z^3, \quad (2.31)$$

Dans la théorie classique CBT, la déformation de cisaillement est ignorée et elle est généralement précise pour les poutres minces; tandis que pour des poutres épaisses on doit utiliser les théories de déformation de cisaillement FSDT pour avoir une bonne précision.

En raison de l'approximation linéaire du déplacement  $u$ , la théorie de poutre de Timoshenko est appelée la théorie de déformation en cisaillement d'ordre un (*First Order Shear Deformation Theory* FOSDT). Notons que cette approximation simple peut être appliquée aux poutres homogènes et aux poutres multicouches.

Les fondements de la théorie classique des stratifiés poutre (CBT) ou la théorie des poutres Euler-Bernoulli (EB) se basent sur l'hypothèse de Kirchhoff qui stipule que les sections planes restent planes et perpendiculaire au plan moyen.

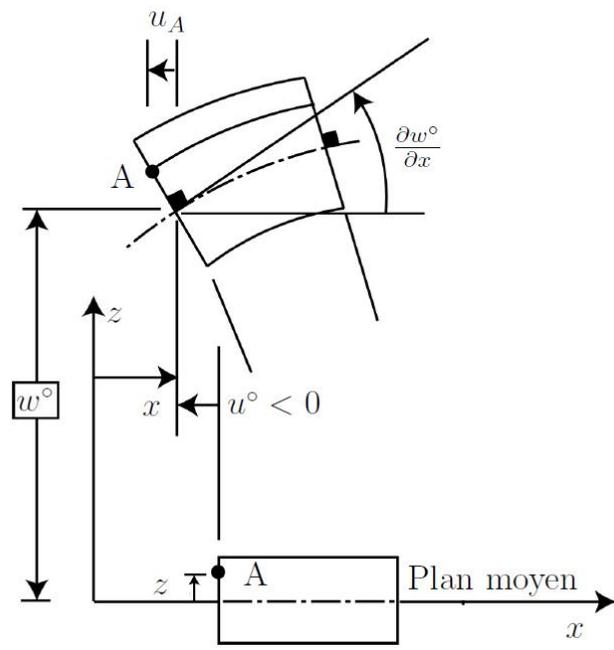
La figure 2.9 représente la section droite d'un stratifié avant et après l'action de la charge extérieure. L'action de la charge extérieure sur la structure stratifié se traduit par des déplacements  $u$ ,  $v$  et  $w$  d'un point A de coordonnées  $(x, y, z)$  en fonction des déplacements du plan moyen ( $u^0$ ,  $v^0$  et  $w^0$ ) et de la coordonnée  $z$  de ce point par rapport au plan moyen. Ces déplacements  $u$ ,  $v$  et  $w$  sont sous la forme suivante [39]:

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u^0(x, y) - z\varphi_x(x, y) \\ v^0(x, y) - z\varphi_y(x, y) \\ w^0(x, y) \end{Bmatrix} \quad (2.27)$$

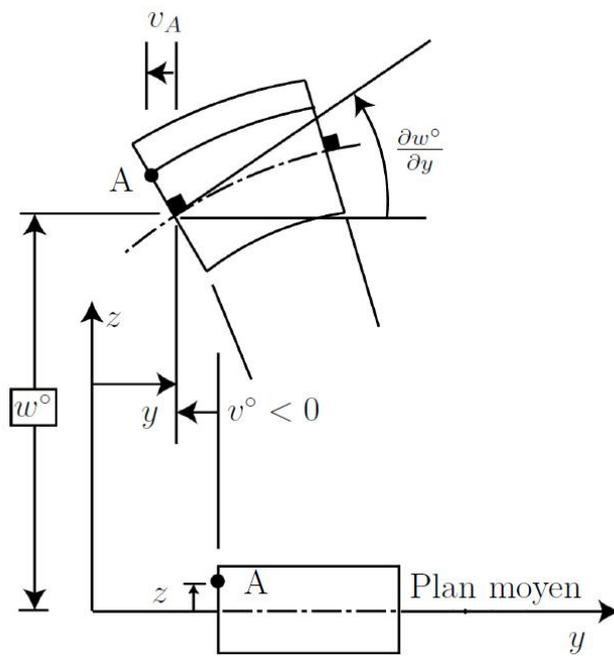
D'où

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u^0(x, y) - z \frac{\partial w^0}{\partial x} \\ v^0(x, y) - z \frac{\partial w^0}{\partial x} \\ w^0(x, y) \end{Bmatrix} \quad (2.28)$$

où  $u^0$ ,  $v^0$  et  $w^0$  sont les déplacements au point  $(x, y, 0)$  du plan moyen. L'exposant 0 signifie que les déformations et les courbures sont définies au plan moyen ( $z=0$ ).



(a) Forme déformée (plan (x, z))



(b) Forme déformée (plan (y, z))

Fig. 2.10 Section droite d'un stratifié avant et après l'action de la charge extérieure [39]

### II.5.1 Relations entre déformations et déplacements

En utilisant les relations des déplacements (2.28), les composantes de la déformation en un point **A** quelconque de l'épaisseur ont pour expression :

$$\begin{cases} \varepsilon_x(x, y, z) \\ \varepsilon_y(x, y, z) \\ \gamma_{xy}(x, y, z) \end{cases} = \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \end{cases} = \begin{cases} \frac{\partial u^0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial v^0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2} \\ \frac{\partial v^0}{\partial x} + \frac{\partial u^0}{\partial y} - z \left( \frac{\partial^2 w^0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w^0}{\partial y \partial x} \right) \end{cases} \quad (2.29)$$

### II.5.2 Relations entre les efforts résultantes et les déformations

Les relations entre les forces et les déformations  $(\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0)$  et les courbures  $(\kappa_x^0, \kappa_y^0, \kappa_{xy}^0)$  sont définies par les équations suivantes [39]:

$$\begin{cases} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{cases} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{cases} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{cases} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{cases} \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{cases} \quad (2.30)$$

Les relations entre les moments et les déformations et les courbures sont définies par les équations suivantes :

$$\begin{cases} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{cases} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{cases} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{cases} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{cases} \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{cases} \quad (2.31)$$

La matrice [A] est appelée matrice de rigidité en membrane, donnée par :

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1}) \quad (2.32)$$

La matrice [B] est appelée matrice de couplage membrane-flexion, donnée par:

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \quad (2.33)$$

La matrice [D] est appelée matrice de rigidité en flexion, donnée par :

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad (2.34)$$

Finalement, les relations entre les éléments de réduction et les déformations du plan moyen géométrique peuvent s'écrire:

$$\begin{Bmatrix} N \\ \text{---} \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & | & B \\ \text{---} & | & \text{---} \\ B & | & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ \text{---} \\ \kappa^0 \end{Bmatrix} \quad (2.35)$$

La matrice de rigidité [E] du stratifié est comme suit :

$$E = \begin{bmatrix} A & | & B \\ \text{---} & | & \text{---} \\ B & | & D \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Pour un stratifié symétrique, la matrice couplage membrane-flexion [B] est nulle.

De plus, si le stratifié est équilibré, les coefficients  $A_{16}$  et  $A_{26}$  sont aussi nuls d'où la relation (2.35) devient [39]:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ \text{---} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & & 0 & 0 & 0 \\ \text{---} & \text{---} & & | & \text{---} & & \\ 0 & 0 & 0 & & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ 0 & 0 & 0 & | & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ 0 & 0 & 0 & & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \text{---} \\ \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{Bmatrix} \quad (2.37)$$

L'utilisation de ce type de stratifié s'est répandue, car leur comportement ressemble à certains égards à celui d'un matériau isotrope. C'est ce genre de structure qui est étudié dans ce document.

### II.5.3 Déformations dans chaque pli

La relation reliant les déformations du plan moyen d'un pli stratifié en fonction des forces et des moments appliqués sur ce plan moyen est donnée à l'équation suivante:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{Bmatrix}_{(k)} = [ABD]^{-1} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.38)$$

Où matrice  $[ABD]^{-1}$  de dimensions  $6 \times 6$  est l'inverse de la matrice  $[ABD]$ , qui représente le regroupement des matrices  $[A]$ ,  $[B]$  et  $[D]$ .

Les déformations dans le  $k^e$  pli fonction de la position  $z$  par rapport au plan moyen de ce pli deviennent :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_{(k)} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix}_{(k)} + z_k \begin{Bmatrix} \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{Bmatrix}_{(k)} \quad (2.39)$$

Pour déterminer les contraintes dans le système de coordonnées  $(x, y)$  du pli, les déformations sont multipliées par la matrice  $[Q]$  du pli  $k$  :

$$\{\sigma(x, y)\}_k = [\bar{Q}]_k \{\varepsilon(x, y)\}_k \quad (4.40)$$

D'où les contraintes dans le  $k^e$  pli sont :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k = [\bar{Q}]_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix}_{(k)} + [\bar{Q}]_k z_k \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.41)$$

## II.6 Comportement des poutres stratifiées

Les équations dynamiques sont :

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = \rho_{eq} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - p_z \quad (2.42)$$

$$\frac{\partial^2 N}{\partial x^2} = \rho_{\acute{e}q} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - p_x$$

(2.43)

Où  $\rho_{\acute{e}q}$ ,  $p_x$  et  $p_z$  sont la masse et les forces extérieures dans la direction x et z respectivement [19]:

$$\rho_{\acute{e}q} = \sum_{k=1}^N b \rho_k (z_k - z_{k-1})$$

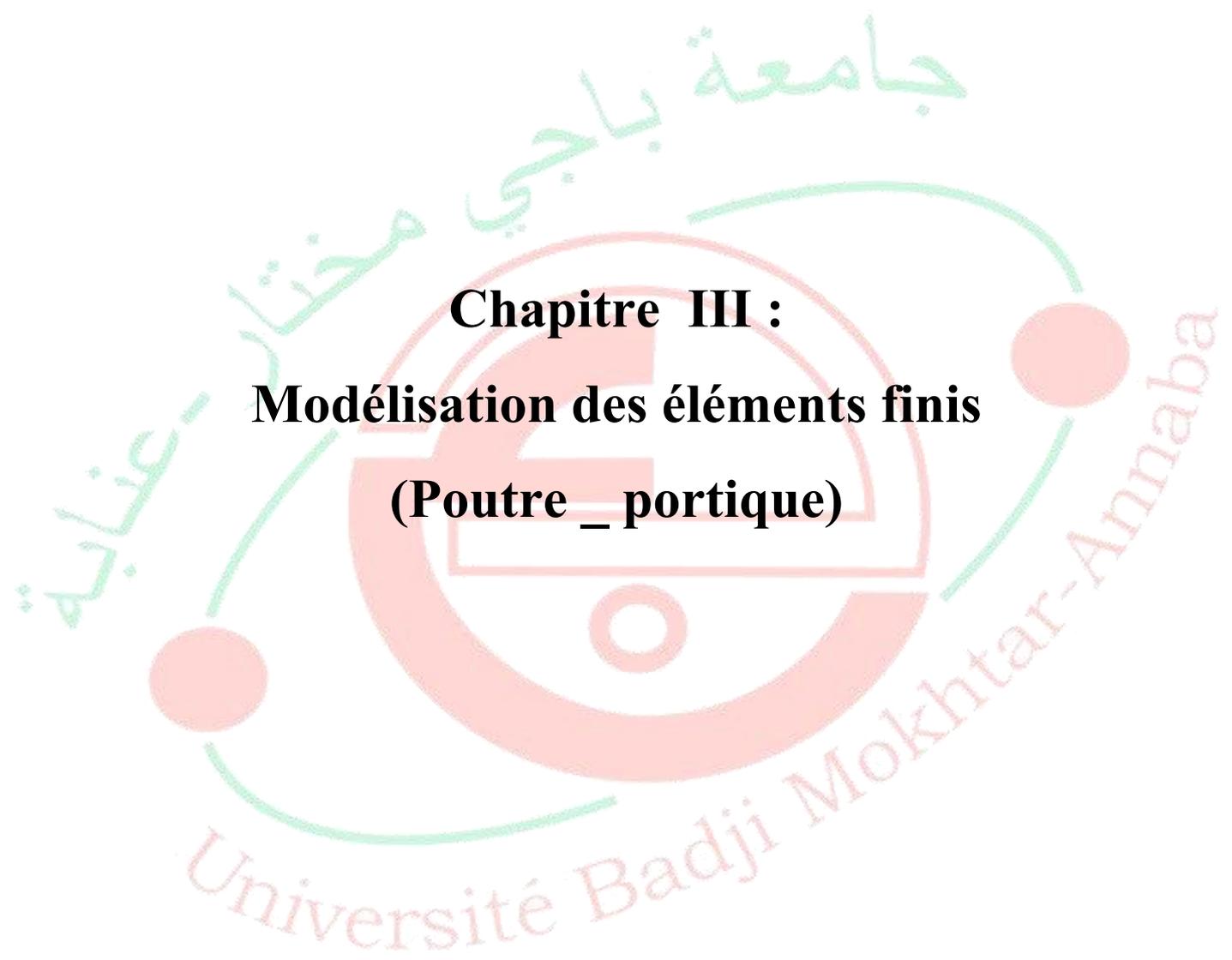
(2.44)

où  $b$  est la largeur de la poutre.

## II.7 Conclusion

Les propriétés globales du stratifié dépendent des propriétés du matériau de chaque pli, de son épaisseur et de l'orientation de celui-ci. Donc, c'est en variant l'orientation des plis et en choisissant les matériaux appropriés que l'on peut concevoir une structure stratifiée aux propriétés désirées.

Ce court exposé de la théorie classique des stratifiés avait pour but de permettre au lecteur non-initié de bien comprendre la nomenclature et les quantités utilisées dans les chapitres 3 à 5 de ce document.

The background features a large, semi-transparent watermark of the Université Badji Mokhtar-Annaba logo. The logo consists of a stylized red 'U' with a white circle inside, surrounded by a green circular path with two red dots. The text 'جامعة باجي مختار عنابة' is written in green Arabic script along the top arc, and 'Université Badji Mokhtar-Annaba' is written in red Latin script along the bottom arc.

**Chapitre III :**  
**Modélisation des éléments finis**  
**(Poutre \_ portique)**

### III.1.Introduction :

Dans ce chapitre on va étudier le comportement dynamique des structures isotropes; et l'analyse vibratoire forcée des poutres et des portiques renforcés des matériaux composites. Ainsi que L'étude des structures en poutres et portiques par la méthode des déplacements contient une partie importante d'une analyse par éléments finis et conduit au système linéaire

### III.2.Définitions :

- Une poutre est un Support horizontal allongé en bois, en métal ou en béton armé, de section étudiée pour une bonne résistance à la flexion ; Sur certains avions, partie de la cellule reliant les empennages aux ailes ou au fuselage.
- Un portique est un assemblage de poutres dont les lignes moyennes appartiennent a un plan (o ; x ; y) et qui sont chargées dans ce plan.
- le point d'assemblage de plusieurs poutres s'appelle un nœud.
- Les poutres sont considérées comme encastées aux nœuds ; on dit ainsi que les nœuds sont rigides.

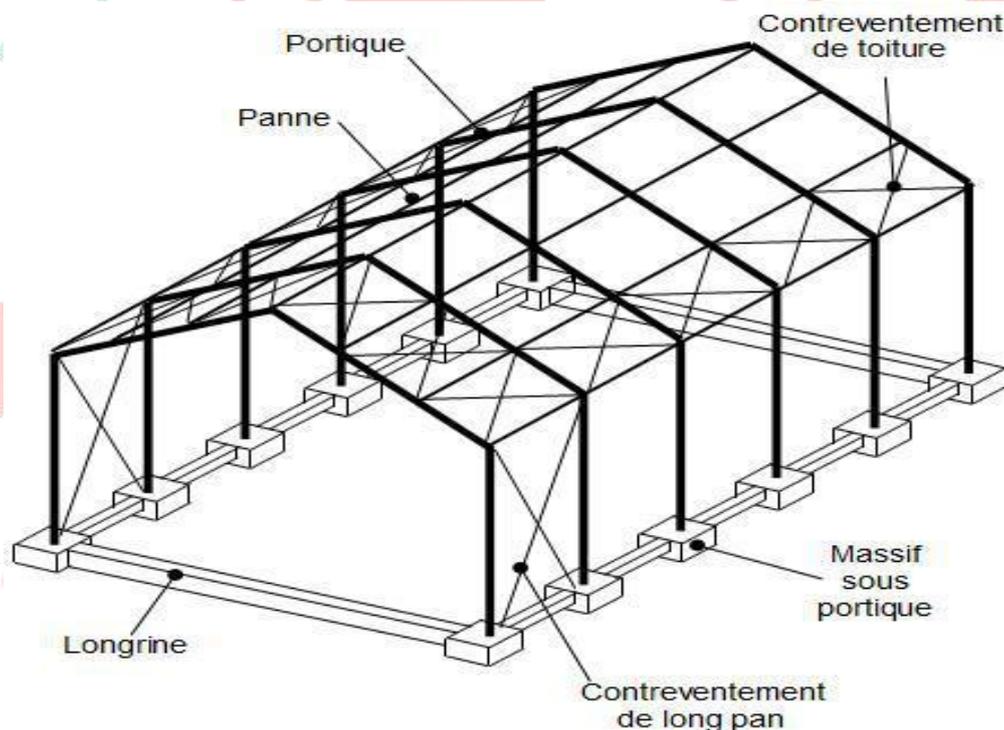


Fig. III.1 : élément de portique

### III.3. Vibration libre des poutres renforcées par matériaux composites :

La théorie des poutres considère, en effet que la longueur  $L$  est très grande devant l'épaisseur  $h$  et la largeur  $b$  de la poutre (Fig. 3.1).

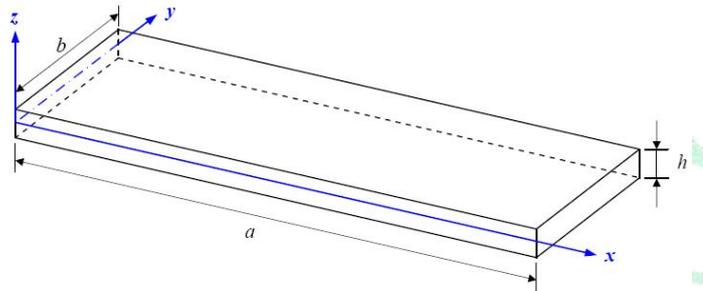


Fig. III.1 Elément de poutre.

Pour une flexion cylindrique simple avec un moment fléchissant et un effort tranchant associé on se place dans l'hypothèse suivante: les sections droites des poutres restent droites (Fig. 3.2) au cours de la déformation (hypothèse de Navier-Bernoulli).

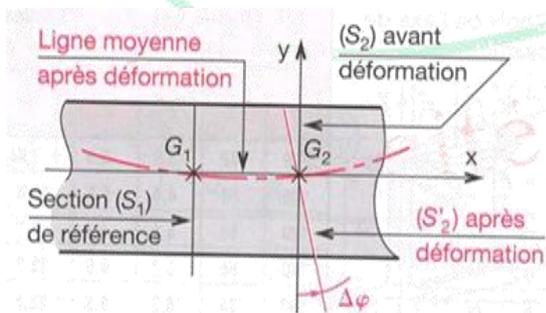


Fig. III.2 Flexion cylindrique d'une poutre

Dans le cas des poutres renforcées en matériaux composites (Fig. 3.3) la poutre droite de section  $(A)$  est constituée par un empilement de matériaux de différentes épaisseurs. L'analyse

vibratoire du mouvement transverse libre de la poutre composite homogénéisée est étudiée, d'après l'hypothèse Euler-Bernoulli.



Nous considérons une poutre sur deux appuis simples renforcée par des manteaux composites Fig.3.3.

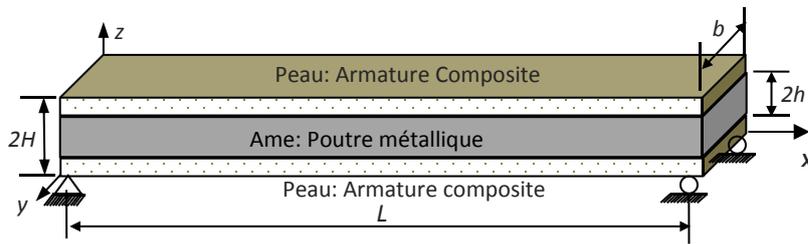


Fig. III.3 Renforcement sur les deux côtés de la poutre (sandwich)

Hypothèses :

- on considère le cas de petits mouvements harmoniques autour d'une position d'équilibre.
- pas de glissement, ni séparation entre deux couches voisines.
- la discontinuité à l'interface entre les couches due à l'effet de Poisson, est négligeable.
- la rigidité flexionnelle est constante.
- les sections planes avant déformation restent planes après déformation.
- l'effet de l'effort tranchant est négligé.

Les équations d'équilibre exprimées à travers l'étude d'une tranche de poutre (Fig.3.4) restent vérifiées à chaque instant et sont strictement les mêmes que celles des poutres homogènes isotropes, puisque leur démonstration ne fait pas intervenir les propriétés des matériaux. L'équation d'équilibre dynamique peut être retrouvée pour une poutre isotrope en vibrations libres en appliquant les théorèmes généraux de la dynamique à un élément infinitésimal de la poutre.

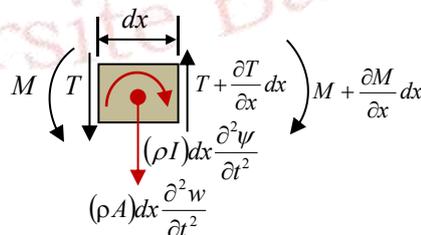


Fig.3.4 Tronçon de poutre élémentaire

L'équation de mouvement fait intervenir de nombreux paramètres: la flexion de la fibre neutre au point d'abscisse  $x$  à l'instant  $t$  notée  $y$ ; l'effort tranchant  $T$  ainsi que l'effort extérieur par unité de longueur  $T_{ex}$ ; en régime libre l'effort extérieur est nul; le moment fléchissant  $M$ ; l'angle de rotation de l'axe neutre  $\psi$ . Cependant, si le calcul des fréquences naturelles de la poutre est fonction de ses propriétés mécaniques, il est par contre indépendant des forces excitatrices mises en jeu. Ce qui nous permet donc de faire cette étude dans le domaine des vibrations libres.

L'équation d'équilibre dynamique nous conduit aux deux équations suivantes :

$$\sum F_{iy} = -T + \left( T + \frac{\partial T}{\partial x} dx \right) - \rho A dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (3.1)$$

$$\sum M_{io} = -M + \left( M + \frac{\partial M}{\partial x} dx \right) + T \frac{dx}{2} + \left( T + \frac{\partial T}{\partial x} dx \right) \frac{dx}{2} - \rho I dx \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0, \quad (3.2)$$

Après simplification on obtient le système suivant :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} + T = \rho I \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \quad (3.4)$$

En utilisant les relations classiques de la résistance des matériaux on obtient,

$$M = EI \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (3.5)$$

$$\psi - \frac{T}{\alpha GA} = \frac{\partial y}{\partial x}, \quad (3.6)$$

Dans les cas usuels, certains termes de ces équations peuvent être négligés; il s'agit de  $(\rho I)(\partial^2 \psi / \partial t^2)$  qui représente l'effet d'inertie en rotation et de  $T / \alpha(GA)$  qui représente l'effet de cisaillement.

Une fois ces simplifications opérées, on dit que l'on résout le problème d'une poutre d'Euler-Bernoulli. Après élimination entre  $T$ ,  $M$  et  $\psi$  on obtient  $\partial M / \partial x = -T$ , donc :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}, \quad (3.7)$$

$$M = EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (3.8)$$

En égalisant l'équation (3.3) et (3.7) on aura l'équation dynamique de la poutre:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \rho A \frac{\partial^2 M}{\partial t^2} = -EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}, \quad (3.9)$$

Avec  $m_l = \rho A$ , on obtient [19] :

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + m_l \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (3.10)$$

Afin de calculer la flèche d'une poutre en stratifié de matériaux composites, il est nécessaire d'établir une formulation homogène, c'est-à-dire, les relations de comportement sont identiques celles des poutres homogènes isotropes. Cette approche d'homogénéisation est basée sur les caractéristiques physiques équivalentes.

Par analogie, l'équation dynamique du mouvement libre équation (3.10) d'une poutre multicouche homogénéisée, peut être exprimée en fonction des propriétés physicomécaniques équivalentes en utilisant l'approche d'homogénéisation :

$$(E_{xx}I)_{\text{éq}} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (m_l)_{\text{éq}} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (3.11)$$

Le moment d'inertie

$$I = b \int_{y_{i-1}}^{y_i} y^2 dy,$$

Où  $y_i$  et  $y_{i-1}$  sont les coordonnées supérieure et inférieure du pli ( $i$ ).

Le paramètre d'équivalence  $(E_{xx}I)_{\text{éq}}$ , est déterminé, en supposant un collage parfait au niveau des différentes interfaces d'après :

$$E_{xx}I = \sum_{k=1}^N E_k b \int_{y_{i-1}}^{y_i} y^2 dy, \quad (3.12)$$

Après intégration, on obtient [19]:

$$E_{xx}I = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{N_p} b E_i (y_i^3 - y_{i-1}^3), \quad (3.13)$$

La rigidité équivalente pour la poutre composite revêtue sur les deux côtés (sandwich), représenté sur la Fig. 3.3, peut être écrite comme suit:

$$E_{xx}I = \frac{2b}{3} [E_c h^3 + E_f (H^3 - h^3)] \quad (3.14)$$

Où  $E_c$  et  $E_f$  sont le module d'élasticité du cœur et des faces de la poutre, respectivement.

Le module d'élasticité des faces,  $E_f$  le long de l'axe de la poutre est exprimé comme suit :

$$E_f = \frac{1}{E_{11}} \cos^4 \theta + \frac{1}{E_{22}} \sin^4 \theta + \left( \frac{1}{G_{12}} - 2 \frac{\nu_{12}}{E_{11}} \right) \cos^2 \theta \sin^2 \theta \quad (3.15)$$

Où  $E_{11}$ ,  $E_{22}$ ,  $G_{12}$  et  $\nu_{12}$  sont les propriétés mécaniques le long des directions de stratifiés.

L'angle  $\theta$  est l'angle entre la direction principale des stratifiés et l'axe de la poutre.

Les propriétés mécaniques  $E_{11}$ ,  $E_{22}$ ,  $G_{12}$  et  $\nu_{12}$  du stratifié composite unidirectionnel de fibres continus sont calculées avec l'utilisation de la règle de mélange (Matrice + Fibre).

Les modules de cisaillement des fibres et de la matrice sont calculés d'après :

$$G_{\text{fibre}} = \frac{E_{\text{fibre}}}{2(1 + \nu_{\text{fibre}})} \quad (3.16)$$

$$G_{\text{matrice}} = \frac{E_{\text{matrice}}}{2(1 + \nu_{\text{matrice}})} \quad (3.17)$$

Où  $E_{\text{fibre}}$ ,  $E_{\text{matrice}}$ ,  $\nu_{\text{fibre}}$  et  $\nu_{\text{matrice}}$  représente le module d'Young et le coefficient de Poisson des fibres et de la matrice respectivement.

Le comportement mécanique des matériaux composites dépend de plusieurs facteurs: le type de fibres, la fraction volumique de fibres et le type de matrice.

Dans les matériaux composites, les fibres reprennent principalement les efforts dans la direction des fibres. La matrice, quant à elle, transfère les contraintes aux fibres, et les protège. La résistance et le module de Young des fibres sont plus importants par rapport à ceux de la matrice, le comportement mécanique des matériaux composites est donc piloté par les propriétés mécaniques des fibres et la quantité de fibres (fraction volumique).

#### III.4. Propriétés mécaniques de matériaux composites

Les propriétés mécaniques de matériaux composites peuvent être estimées selon la loi de Halpin-Tsai [3]:

$$E_f = E_{\text{fib}}V_{\text{fib}} + E_mV_m$$

$$f_f \approx f_{\text{fib}}V_{\text{fib}} + f_mV_m$$

Avec

$$V_{\text{fib}} + V_m = 1$$

Où la fraction volumique  $V_{\text{fib}}$  typique est de l'ordre de 0,6 – 0,65.

$E_f$  Est le module d'Young du matériau composite dans la direction des fibres,

$E_{\text{fib}}$ , module d'Young des fibres,

$E_m$  Module d'Young de la matrice,

$V_{\text{fib}}$  Fraction volumique de fibres,

$V_m$  Fraction volumique de la matrice,

$f_f$  Résistance en traction du matériau composite,

$f_{\text{fib}}$  Résistance en traction des fibres,

$f_m$  Résistance en traction de la matrice,

La fraction volumique de matrice est donnée par :

$$V_{matrice} = 1 - V_{fibre} \quad (3.18)$$

Où  $V_{fibre}$  est la fraction volumique des fibres.

En utilisant la Loi de mélange on peut calculer les propriétés mécaniques du stratifié :

✓ Module d'Young longitudinal :

$$E_{11} = E_{fibre} V_{fibre} + E_{matrice} V_{matrice} \quad (3.19)$$

✓ Module d'Young transverse :

$$E_{22} = \frac{E_{matrice}}{\left(1 + \left(\frac{E_{matrice}}{E_{fibre}} - 1\right) V_{fibre}\right)} \quad (3.20)$$

✓ Module de cisaillement :

$$G_{12} = \frac{1}{\left(\frac{V_{fibre}}{G_{fibre}} + \frac{V_{matrice}}{G_{matrice}}\right)} \quad (3.21)$$

✓ Coefficient de Poisson  $\nu_{12}$  :

$$\nu_{12} = \nu_{matrice} V_{matrice} + \nu_{fibre} V_{fibre} \quad (3.22)$$

✓ Coefficient de Poisson  $\nu_{21}$  :

$$\nu_{21} = \nu_{12st} \frac{E_{2st}}{E_{1st}} \quad (3.23)$$

De même, la masse équivalente par unité de longueur peut être calculée comme suit [3]:

$$m_l = \sum_{i=1}^N \rho_i A_i, \quad (3.24)$$

La section transversale du pli (couche) est

$$A_i = b \int_{y_{i-1}}^{y_i} dy,$$

D'où

$$m_l = \sum_{i=1}^N b \rho_i \int_{y_{i-1}}^{y_i} dy, \quad (3.24)$$

Après intégration, on aura :

$$m_l = \sum_{i=1}^N b \rho_i (y_i - y_{i-1}), \quad (3.25)$$

Où  $m_l$  est la masse par unité de longueur de la poutre, et  $b$  est la largeur de la poutre et  $\rho_i$  est la densité de la couche  $i$ -ième. Ici,  $y_i$  est la distance entre l'axe neutre de la poutre et la couche  $i$ .

Pour une poutre sandwich (fig.3.3), l'équation (3.25) devient:

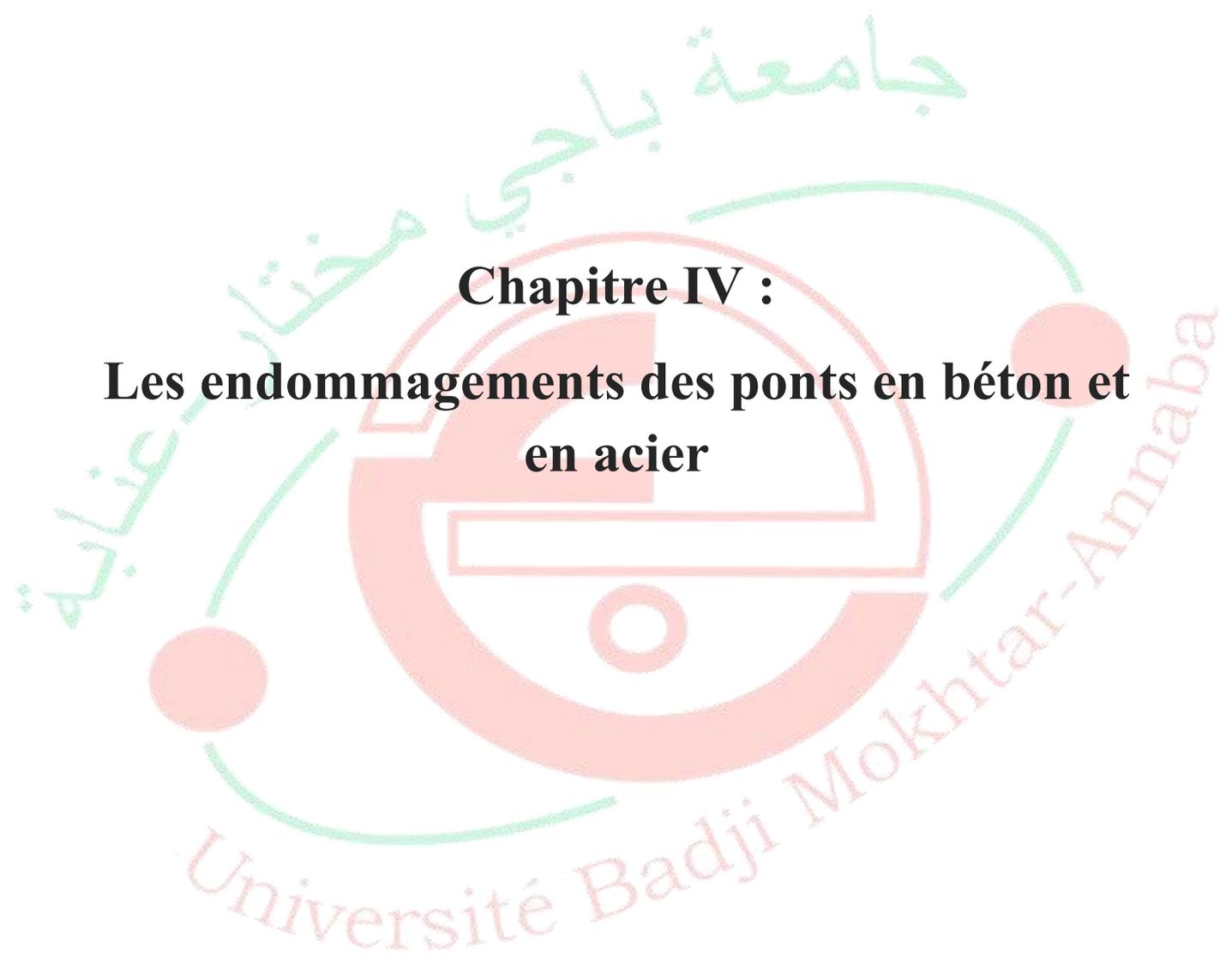
$$m_l = 2b[\rho_c h + \rho_f (H - h)], \quad (3.26)$$

Où  $\rho_c$  et  $\rho_f$  sont les densités du noyau et des faces de la poutre, respectivement.

La densité du stratifiée (faces) est donnée par la loi des mélange :

$$\rho_{st} = \rho_{lf} = \rho_{fibre} V_{fibre} + \rho_{matrice} V_{matrice} \quad (3.27)$$

Où  $\rho_{fibre}$  et  $\rho_{matrice}$  sont la densité de la fibre et de la matrice, respectivement.

The logo of Université Badji Mokhtar-Annaba is a large, stylized emblem in the background. It features a central circular element with a horizontal bar and a smaller circle below it, all in a reddish-pink color. This is surrounded by a green circular path with two red dots. The university's name is written in Arabic 'جامعة باجي مختار عنابة' at the top and 'Université Badji Mokhtar-Annaba' at the bottom, both in a light green color.

**Chapitre IV :**  
**Les endommagements des ponts en béton et**  
**en acier**

#### IV.1. Introduction :

On générale, les défaillances et les ruptures dans les ponts sont rares. Par ailleurs, les usagers sont intolérants face à toutes défaillances et requièrent qu'un niveau de sécurité élevé soit assuré. En ingénierie, ne permet pas d'assurer un niveau de sécurité absolue, ce qui serait trop coûteux et pratiquement impossible, mais assure plutôt un niveau de risque dit « acceptable »

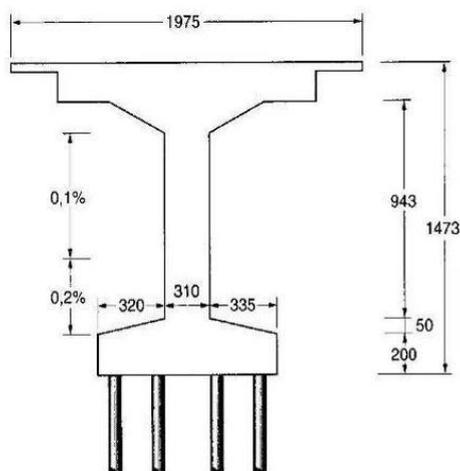
#### IV.2. Réponse dynamique de la structure d'un pont :

La structure du pont présente peu de redondance pour résister à des charges latérales, Et son mouvement dynamique est gouverné par l'équilibre des forces dépendantes du temps. Il

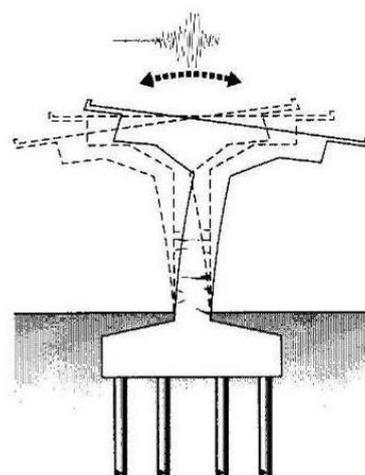
S'agit de forces internes qui sont fonction de la rigidité des piles de la structure (selon une Direction particulière), de forces d'amortissement qui peuvent être matérielles ou structurales Et de forces d'inertie qui dépendent de la masse et de l'accélération. De ce fait, l'intégrité Structurale d'un pont lors d'un événement sismique repose essentiellement sur sa masse et sa Rigidité.

La figure 1.2 illustre le scénario d'effondrement d'un pont autoroutier à la suite du Tremblement de terre de Kôbe en 1995 au Japon. On remarque au début du mouvement, L'apparition de fissures de flexion pendant la vibration transversale des piles (*Voir figure 1.2.2*). Ce mouvement amène les fissures à pénétrer plus profondément dans la section des Piles (*Voir figure 1.2.3 et 1.2.4*), ce qui cause une importante dégradation du béton et un Allongement des barres d'armatures longitudinales. De plus, l'effet P- $\Delta$  et la rupture des Armatures longitudinales et transversales dans les piles amènent à l'effondrement total du pont (*Voir figure 1.2.5 et 1.2.6*).

①



②



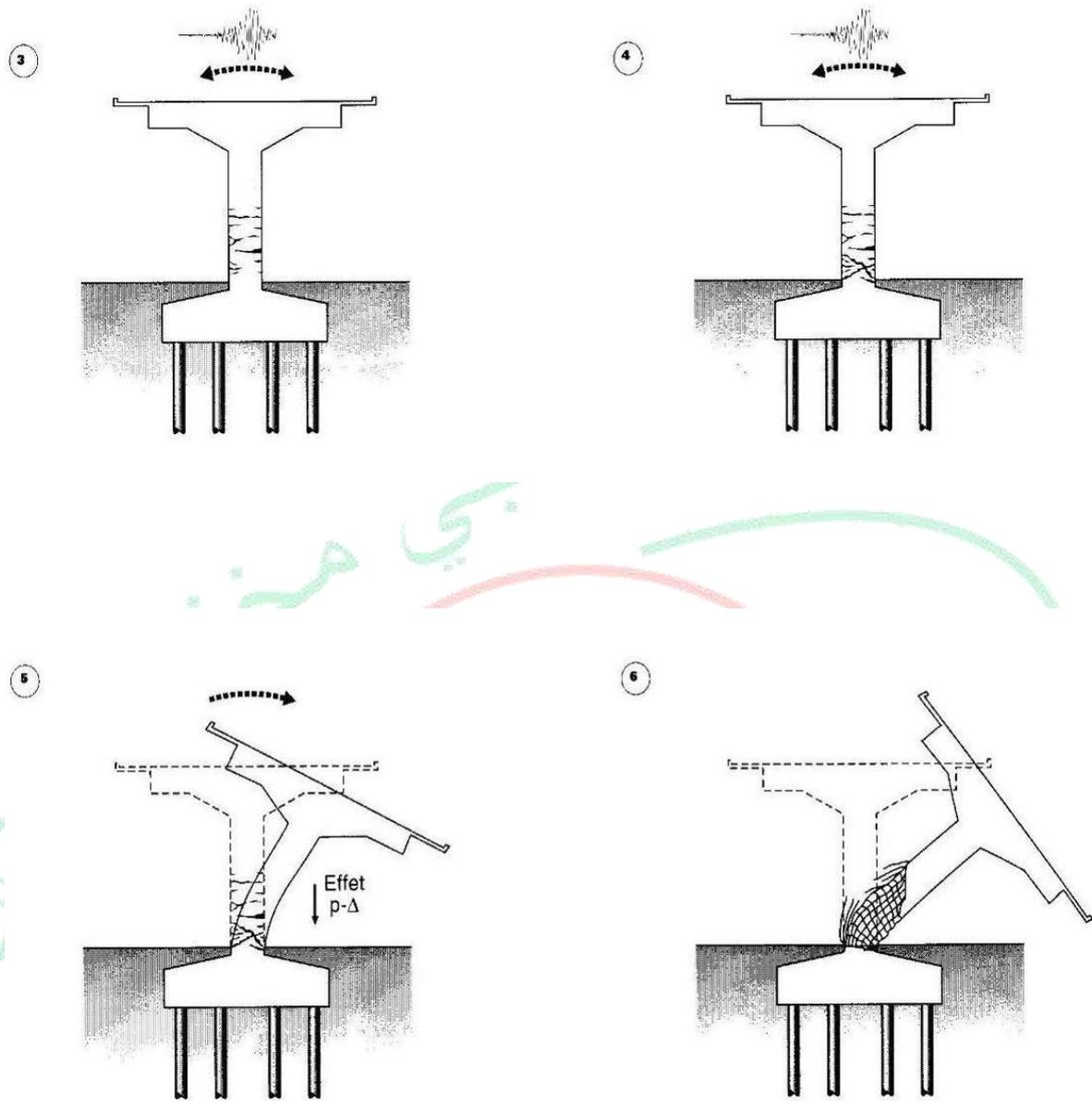


Figure IV.1 : Scénarios d'effondrement d'un pont autoroutier Kôbe. Japon, 1995

### IV. 3. Elément poutre multifibre :

Les modèles « classiques » E.F. sont des outils puissants pour la simulation du Comportement non linéaire des parties complexes des structures (joints, assemblages, ...), leur

Application à la totalité d'une structure peut s'avérer peu pratique à cause d'un temps de calcul Prohibitif ou de la taille mémoire nécessaire à la réalisation de ce calcul. Par contre, une Modélisation de type poutre multifibre possède les avantages des hypothèses simplificatrices d'une cinématique de type poutre d'Euler Bernoulli ou

Timoshenko tout en offrant une solution pratique et efficace pour une analyse non linéaire Complexe d'éléments de structures composites tels que ceux que l'on peut rencontrer par Exemple en béton armé. De plus, cette modélisation "intermédiaire" est relativement robuste

Et peu coûteuse en temps de calcul du fait de l'utilisation de modèles de comportement non Linéaires 1D.

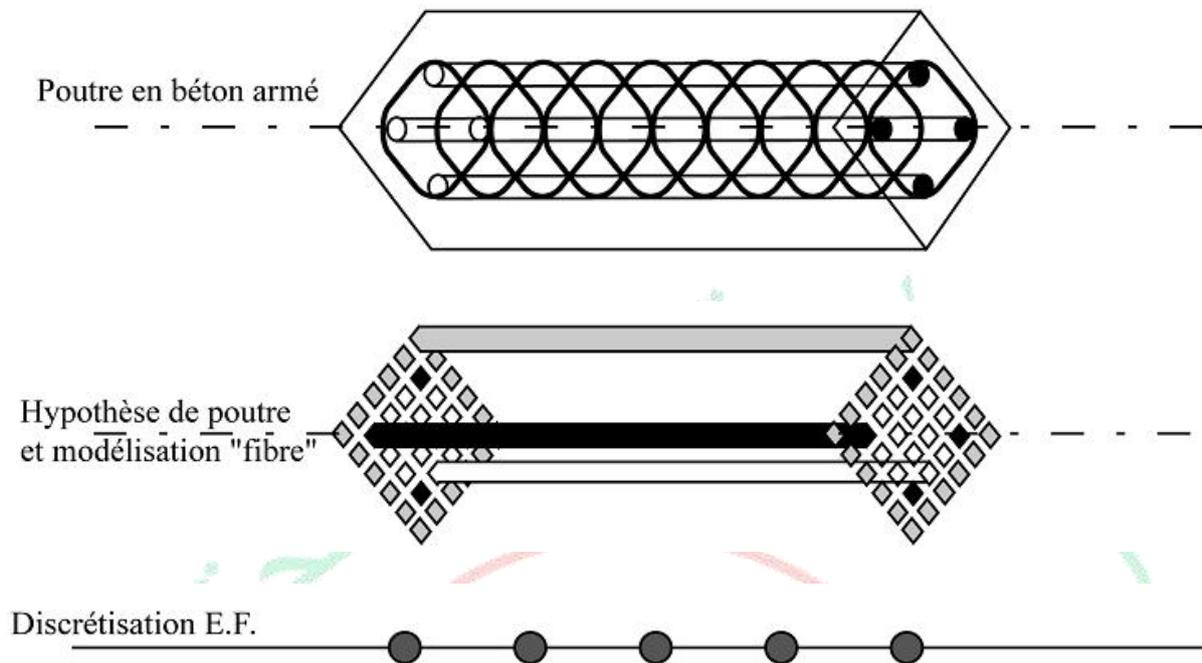


Figure IV.6 : Description d'une modélisation de type poutre multifibre.

#### IV.4.Évolution des Propriétés mécaniques de l'acier :

La corrosion diminue localement l'aire de la barre d'acier, ces pertes peuvent varier considérablement le long de la circonférence et de la longueur de la barre corrodée (Du et al. 2005). Almusallam (2001) et Du et al. (2005) ont étudié l'influence de la corrosion sur les propriétés mécaniques de barres d'armatures soumises à la corrosion accélérée causée par un courant électrique. Ils ont utilisé des barres de diamètres variant de 8 à 32 mm.

Il est bien important de mentionner que la corrosion ne change pas les propriétés fondamentales de l'acier. Toutefois, le comportement observé en traction d'une barre d'acier corrodée est différent de celui d'une barre d'acier non-corrodée. La ductilité et la résistance apparentes des barres corrodées seraient réduites dues aux concentrations de contraintes qui se produisent aux piqûres de corrosion. Ainsi, pour représenter le comportement observé, il est possible de prétendre que les propriétés fondamentales de l'acier sont modifiées.

Ils soutiennent que même si les barres de plus petits diamètres voient leur résistance résiduelle diminuer plus rapidement que les barres de gros diamètres, la 80

Grosseur des barres est un paramètre qui peut être négligé en pratique. Il faut toutefois préciser que dans leur étude, les auteurs ont limité le niveau de corrosion à une perte de 25% de l'aire d'une barre d'armature.

Ce modèle est néanmoins utilisé pour modifier la limite élastique apparente de l'acier corrodé au-delà de cette limite. Ainsi, selon ce modèle, une barre ayant un niveau de corrosion de 10%, aura une limite élastique apparente égale à 95% de sa résistance initiale et, à 25% de corrosion, une limite élastique équivalente à 87.5% de sa résistance initiale. Ce modèle est aussi utilisé par Stewart et Horthy (2008) et Stewart et Suo (2009) dans le cadre d'études fiabilistes sur des poutres en béton armé.

Les résultats d'Almusallam (2001), figure 4.7, démontrent clairement que la corrosion cause une perte de ductilité apparente des armatures à partir de 12,6% de corrosion. Du et al. (2005) observent un changement significatif de la ductilité apparente lorsque la masse de la barre est réduite de plus de 16%. Toutefois, puisque la ductilité de l'acier ne rentre pas directement dans les équations de résistance du code CAN\CSA S6-06, cette propriété de l'acier n'est pas considérée ici. Il serait intéressant d'inclure cette propriété dans l'analyse fiabiliste d'une structure puisqu'il s'agit d'une propriété très importante concernant la sécurité : le mode de rupture d'une structure devrait toujours être ductile afin de permettre d'aviser les usagers d'une rupture imminente.

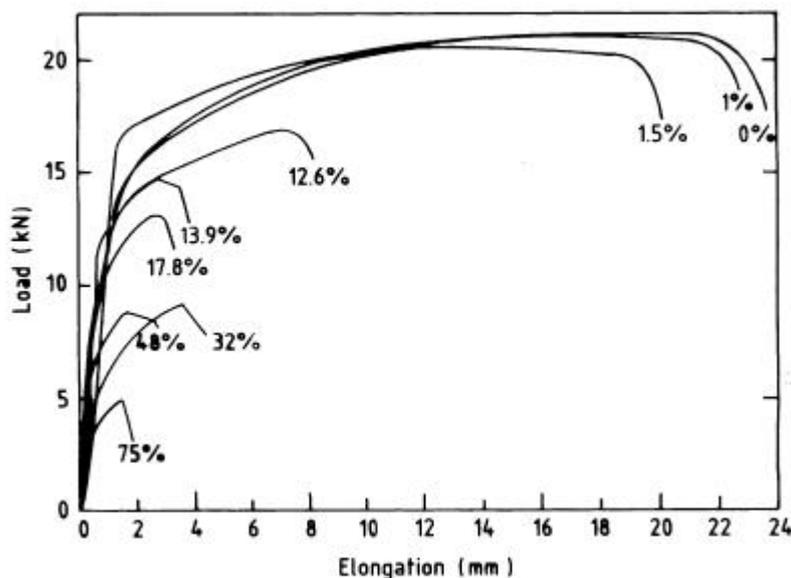
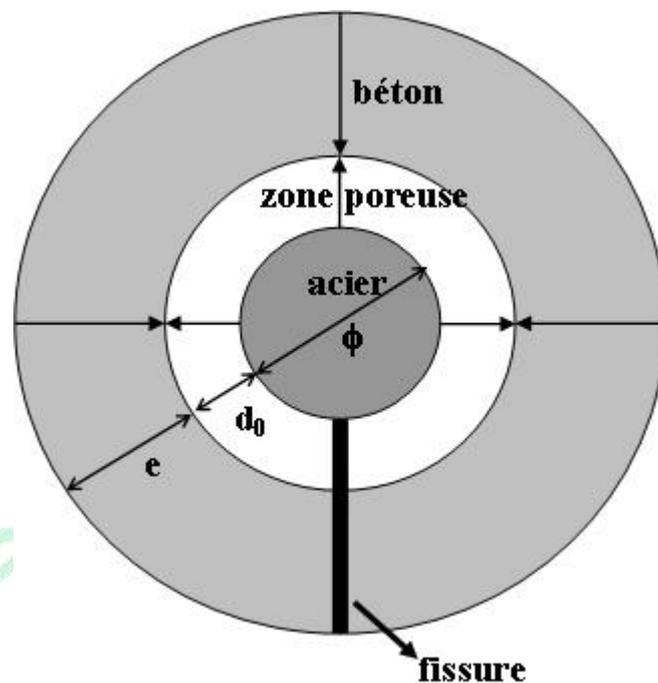


Figure IV.8: Courbes force-élongation pour une barre de 6 mm de diamètre selon différents niveaux de corrosion (tiré de Almusallam (2001))

Basé sur les résultats d'Almusallam (2001) et de Du et al. (2005), le module élastique de l'acier est considéré constant et indépendant du niveau de corrosion.

Les longueurs de scellement des barres en flexion ont été considérées dans l'analyse selon les indications de MTQ (2005). L'augmentation des longueurs de scellement due à la perte d'adhérence entre les barres d'armature et le béton n'est pas considérée ici. Il est difficile de

quantifier le glissement entre les barres et l'effet que celui-ci aurait sur la résistance de la section en flexion. De plus, il semblerait que ce facteur n'aurait pas d'influence sur la résistance à l'ultime selon Dekoster (2003), Vidal (2003), et Val et al. (1998).



**Figure IV.7: Schéma de corrosion et de fissuration d'une barre d'acier (Cycles de gel-dégel).**

#### **IV.5.Évolution des Propriétés mécaniques de béton :**

L'hydratation continue de la pâte de ciment cause une augmentation de la résistance en compression du béton. Cette augmentation est toutefois négligée dans les calculs d'évaluation où c'est la résistance en compression spécifiée sur les plans qui est utilisée ou celle provenant d'échantillons prélevés sur la structure. L'analyse de dix-sept rapports d'expertises du MTQ effectuées sur des dalles de ponts construits dans les années cinquante et soixante a permis de faire une compilation des résistances en compression telles que mesurées sur des carottes. Les résultats, illustrés à la figure 4.8, démontrent que même si les structures sont âgées et endommagées, la résistance du béton en compression est acceptable. Les fissures longitudinales dans la structure ne semblent pas affecter la résistance en compression de l'éprouvette de béton car celles-ci se referment lorsque comprimées. Il semble raisonnable de considérer la résistance en compression du béton comme une valeur constante dans le temps. Cette résistance pourrait diminuer si la structure est affectée par la réaction alcalis-granulat ou par le phénomène de gel-dégel, deux phénomènes qui ne sont pas considérés dans cette étude.

#### IV.6. Estimer et comparer la durée de vie des ponts :

L'étude de l'indice de fiabilité des ponts peut être utilisée pour améliorer la gestion des structures. La prédiction de la fiabilité d'une structure soumise à un endommagement faciliterait la planification des opérations de réparation. De plus, la comparaison de la performance de différents ponts permettrait de prioriser les structures dont l'indice de fiabilité est le plus affecté par l'endommagement. Cette section décrit comment il est possible d'évaluer et de comparer la durée de vie de plusieurs ponts soumis à un endommagement similaire ou différent.





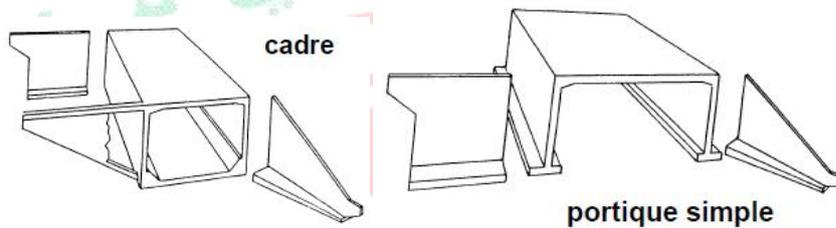
# **Chapitre V**

## **Applications et résultats**

## V. ETUDE DE CAS : Ponts portiques ou cadres

### V.1 Introduction :

Les ponts cadres ou portique sont des structures entièrement en béton armé. La dalle est liée rigidement aux murs porteurs qui sont tenus latéralement de part et d'autre par des murs d'aile **Figure III.17**. Les portées les plus fréquentes vont de 6 à 12 mètres. Les ponts portique ou cadre d'une longueur inférieure à 15 m sont répandus sur le réseau autoroutier. Les tabliers des ponts- cadre sont constitués d'une dalle massive en béton armé. La dalle et les murs porteurs du pont sont modélisés des éléments linéaires à deux dimensions, à deux nœuds et trois degrés de liberté par nœud (déplacement suivant l'axe  $x$ ,  $y$ , déplacement suivant l'axe  $y$ ,  $\theta$  déplacement angulaire). **Figure III.17**.



**Figure V.1 Schémas des ponts cadre et portique simple**

La discrétisation est faite en élément poutre linéaire à 13 nœuds et trois degrés de liberté par nœud (déplacement suivant l'axe  $x$ ,  $y$  et déplacement angulaire  $\theta$  )

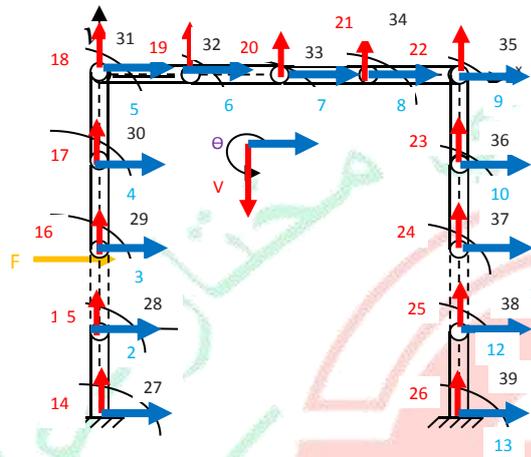
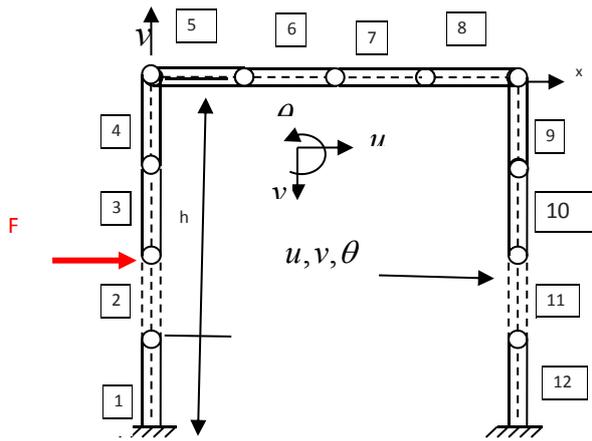


Figure V.2.2

Figure

5.2.2

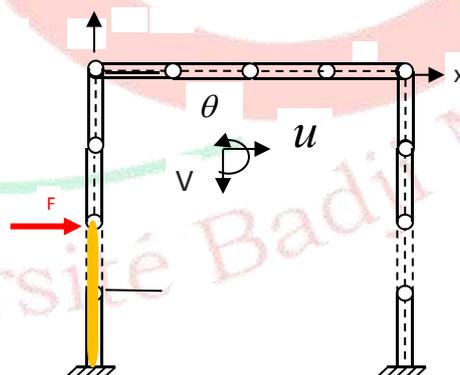


Figure V.2.3

Figure V.2 Discretisation du Pont portique en éléments finis

Figure V.2.1 : Discretisation par la MEF du pont non renforcé en 12 éléments.

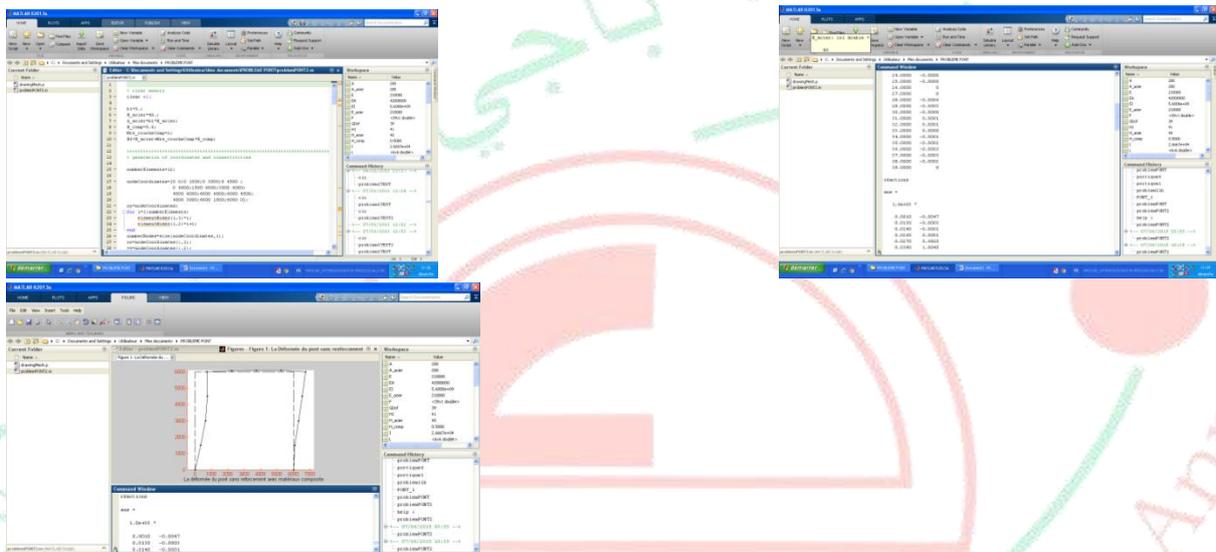
Figure V.2.2 : Discretisation par la MEF du pont non renforcé en 37 DDL .

**Figure V.2.3 : Discrétisation par la MEF du pont renforcé avec un matériau composite le renforcement se fait au niveau des éléments 1 et 2 .**

Le nombre de degrés de liberté de toute la structure (pont) est de 39 DDL, on a 12 éléments et le nombre de nœud est de 13, avec les deux nœuds 1 et 13 qui sont complètement immobiles. Le nœud (2) est chargé par la force mobile.

## V.2 Résultats et analyse du pont poutres

Le programme réalisé dans le cadre de ce projet, permet de calculer la déformation du pont renforcé en matériau composite sous l'influence des pressions externes. Les déformations axiales obtenues permettent de trouver le déplacement vertical et horizontal du pont. Les modèles analytiques utilisés sont programmés à l'aide de l'outil de calcul MATLAB.



**Figure V.3 affichage de résultats par MATLAB**

**Tableau V.1 caractéristiques mécanique et géométrique du Pont en acier**

Description	Valeur
Longueur du pont	L = 30.0 m
Module d'élasticité béton armé	E = 2.1 10 <sup>5</sup> MPa
Masse volumique béton armé	$\rho$ = 7850 kg/m <sup>3</sup>

Module DE CISAILEMENT	4.4. 10 <sup>4</sup>
Section transversale de la poutre	A = 0.1 m <sup>2</sup>
Force	F = 5324.256 N
Coefficient de poisson	0.29

**Tableau V.2. Modules élastiques du matériau composite unidirectionnel avec  $V_{\text{fibre}} = 0,6$**

Modules élastiques	Carbone/époxyde
$E_{11}$ (GPa)	177
$E_{22}$ (GPa)	10.8
$G_{12}$ (GPa)	76
$\nu_{12}$	0.207
$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	1600

**Tableau V.3 déplacements pour pont en acier:**

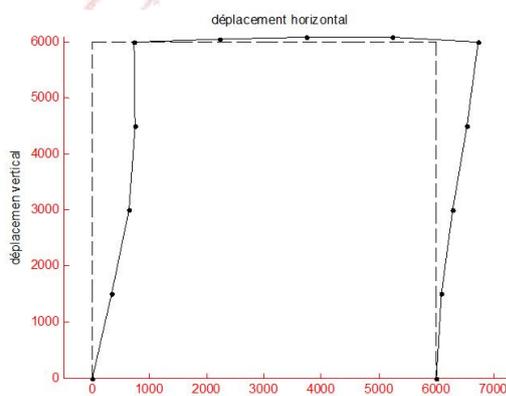
DDL aux nœuds	Déplacements sans renfort	Déplacements avec renfort
1.0000	0	0
2.0000	1.3374	0.2799
3.0000	2.5560	0.6558
4.0000	2.9809	0.8796
5.0000	2.9417	0.9218
6.0000	2.9417	0.9218
7.0000	2.9417	0.9218
8.0000	2.9417	0.9218
9.0000	2.9416	0.9218
10.0000	2.1491	0.6787
11.0000	1.1749	0.3728
12.0000	0.3486	0.1110
13.0000	0	0
14.0000	0	0
15.0000	0.0000	0.0000
16.0000	0.0000	0.0000
17.0000	0.0000	0.0000
18.0000	0.0000	0.0000
19.0000	0.2018	0.0404
20.0000	0.3767	0.0946
21.0000	0.3632	0.1015
22.0000	-0.0000	-0.0000
23.0000	-0.0000	-0.0000

24.0000	-0.0000	-0.0000
25.0000	-0.0000	-0.0000
26.0000	0	0
27.0000	0	0
28.0000	-0.0012	-0.0003
29.0000	-0.0005	-0.0002
30.0000	-0.0001	-0.0001
31.0000	0.0001	0.0000
32.0000	0.0001	0.0000
33.0000	0.0001	0.0000
34.0000	-0.0001	-0.0000
35.0000	-0.0004	-0.0001
36.0000	-0.0006	-0.0002
37.0000	-0.0006	-0.0002
38.0000	-0.0004	-0.0001
39.0000	0	0

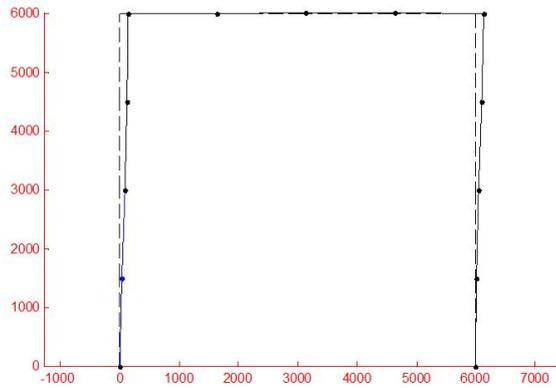
**Tableau V.4 réactions aux appuis**

DDL aux nœuds	Réactions ( $10^4$ ) sans renfort	Réactions ( $10^4$ ) avec renfort
1	0-0.0009	-0.0010
13	-0.0001	-0.0000
14	-0.0000	-0.0000
26	0.0000	0.0000
27	1.1384	1.3750
39	0.2009	0.0641

Les résultats obtenus sont logiques et évident car avec l'utilisation des couches composites pour le renforcement du pont en acier a provoqué la diminution des déplacements et l'augmentation de la résistance à la déformation. Ceci est remarqué, en comparant les résultats dans le **Tableau V.2**



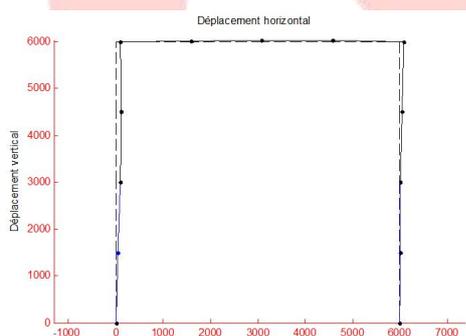
**Figure V.4: la déformation du pont en acier sans renforcement.**



**Figure 5.V: la déformation du pont en  
MC des éléments 1 ; 2**

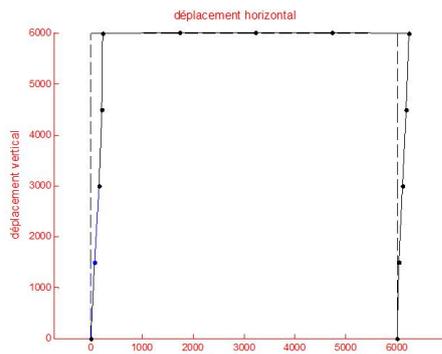
En comparant les résultats des deux cas, pont sans renforcement et le pont renforcé par matériau composite on constate que le renforcement du pont a amélioré les caractéristiques mécanique du pont d'où la résistance aux effets extérieurs est plus grande le taux de renforcement est  $\varepsilon=68.66\%$  (nœud 5).

La variation du déplacement vertical est très faible et presque constant dans plusieurs nœuds car la force provoquant la déformation dans notre cas d'étude est horizontale ce qui explique les importante valeurs des déplacements horizontales elles varient par exemple pour le nœud 3 de 2.5560 et diminue jusqu'à 0.6558 après renforcement.



**Figure 5.6: Déformation des ponts après renforcement des éléments 1 ; 2 ; 11 et 12**

L'augmentation des éléments renforcés par matériau composite augmente la résistance à la déformation due aux chocs et Contraintes extérieurs



**Figure 5.7:** Déformation des ponts avec renforcement et différent orientation des fibres (0° et 90°)

L'orientation des fibres influe sur l'efficacité du renforcement, les fibres perpendiculaires à contraintes extérieures donnent les meilleures résistances aux fissuration et agressions extérieures.

**Tableau 5.5** caractéristique mécanique et géométrique du Pont en béton armé

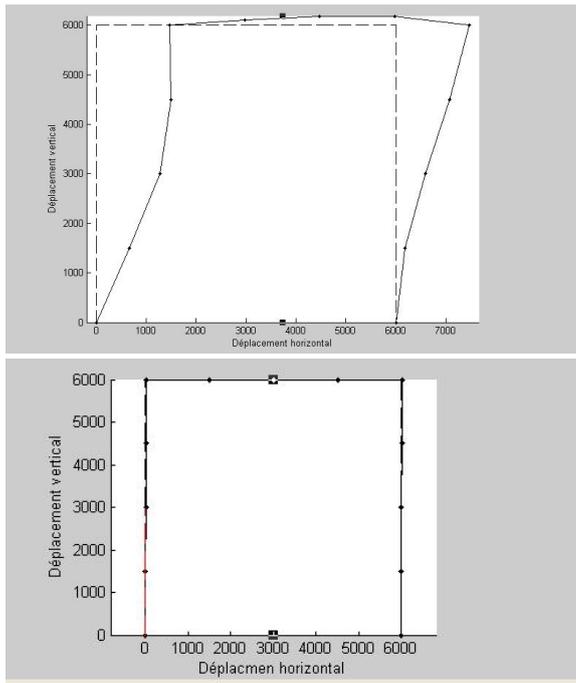
Description	Valeur
Longueur du pont	L = 30.0 m
Module d'élasticité béton armé	E = 4. 10 <sup>5</sup> MPa
Masse volumique béton armé	$\rho = 9576 \text{ kg/m}^3$
Module DE CISAILLEMENT	2.5 10 <sup>5</sup>
Section transversale de la poutre	A = 0.1 m <sup>2</sup>
Force	F = 5324.256 N
Coefficient de poisson	0.20

**Tableau 5.6** résultats des déplacements aux nœuds :

DDL aux nœuds	Déplacements sans renfortent	Déplacements avec renforcement
1.0000	0	0
2.0000	1.5374	0.0000
3.0000	2.6560	0.0000
4.0000	2.9809	0.0000
5.0000	2.9717	0.0000
6.0000	2.9717	0.0000
7.0000	2.9717	0.0000

8.0000	2.9717	0.0000
9.0000	2.9716	0.0000
10.0000	2.2412	0.0000
11.0000	1.2049	0.0000
12.0000	0.4386	0.0000
13.0000	0	0
14.0000	0	0
15.0000	0.0000	0.0000
16.0000	0.0000	0.0000
17.0000	0.0000	0.0000
18.0000	0.0000	0.0000
19.0000	0.2518	0.0000
20.0000	0.3567	0.0000
21.0000	0.3732	0.0000
22.0000	-0.000	-0.0000
23.0000	-0.000	-0.0000
24.0000	-0.000	-0.0000
25.0000	-0.000	-0.0000
26.0000	0	0
27.0000	0	0
28.0000	-0.0017	-0.0000
29.0000	-0.0006	-0.0000
30.0000	-0.0002	-0.0000
31.0000	0.0002	0.0000
32.0000	0.0002	0.0000
33.0000	0.0002	0.0000
34.0000	-0.0002	-0.0000
35.0000	-0.0005	-0.0000
36.0000	0.0008	0.0000
37.0000	-0.0008	-0.0000
38.0000	-0.0005	-0.0000
39.0000	-0.0009	0.0010
13	-0.0001	-0.0000
14	-0.0000	-0.0000
26	0.0000	0.0000
27	1.1384	1.5000
39	0.2009	-0.0010

**Tableau 5.7 réactions aux appuis:**



**Figure 5.8**

**Figure 5.9**

Comparant avec le pont en acier, la déformation du pont en béton est légèrement plus grande et le renforcement avec matériaux composites donne d'excellents résultats pour les ponts en béton.

### V.3. Conclusion

- Plus le renforcement sera efficace plus il donne une stabilité au pont et une résistance aux contraintes extérieures. Le renforcement augmente des résistances post-fissuration, l'augmentation de la ductilité ainsi que l'augmentation de la durabilité.
- Les ponts en béton offre un bon transfert des efforts mieux que les ponts en acier.
- L'utilisation des couche en composites afin de renforcer des insuffisances locales ou globales modifie peu l'aspect et les dimensions de la structure à réparer. le collage de la couche en matériaux composite à la surface du béton assure un bon transfert des efforts et permet ainsi une augmentation de la résistance et de raideur de la structure renforcée.
- L'orientation des fibres influe sur l'efficacité du renforcement, les fibres perpendiculaires à contraintes extérieures donnent les meilleures résistances aux fissuration et agressions extérieures.

## Conclusion générale :

L'utilisation de poutre d'acier ou de matériau composite permet de renforcer les structures de façon significative que ce soit en flexion ou en cisaillement. Des modèles analytiques basés sur la théorie des stratifiés et le calcul de béton armé prédisent de façon relativement satisfaisante les charges ultimes et le comportement de structures ainsi renforcées. Il faut toutefois prendre des précautions quant aux problèmes locaux pouvant mener à une rupture fragile. Plusieurs auteurs se sont penchés sur ces problèmes. La difficulté réside toutefois dans la résolution du système d'équations équivalentes et les solutions analytiques sont très difficiles à obtenir compte tenu des discontinuités du modèle. Une étude sérieuse du fonctionnement du renforcement est impérative avant toute mise en œuvre.

Dans le cadre de ce travail, nous avons développé une solution numérique par la méthode des éléments finies pour calculer les déplacements transversals et longitudinal et rotationnelles.

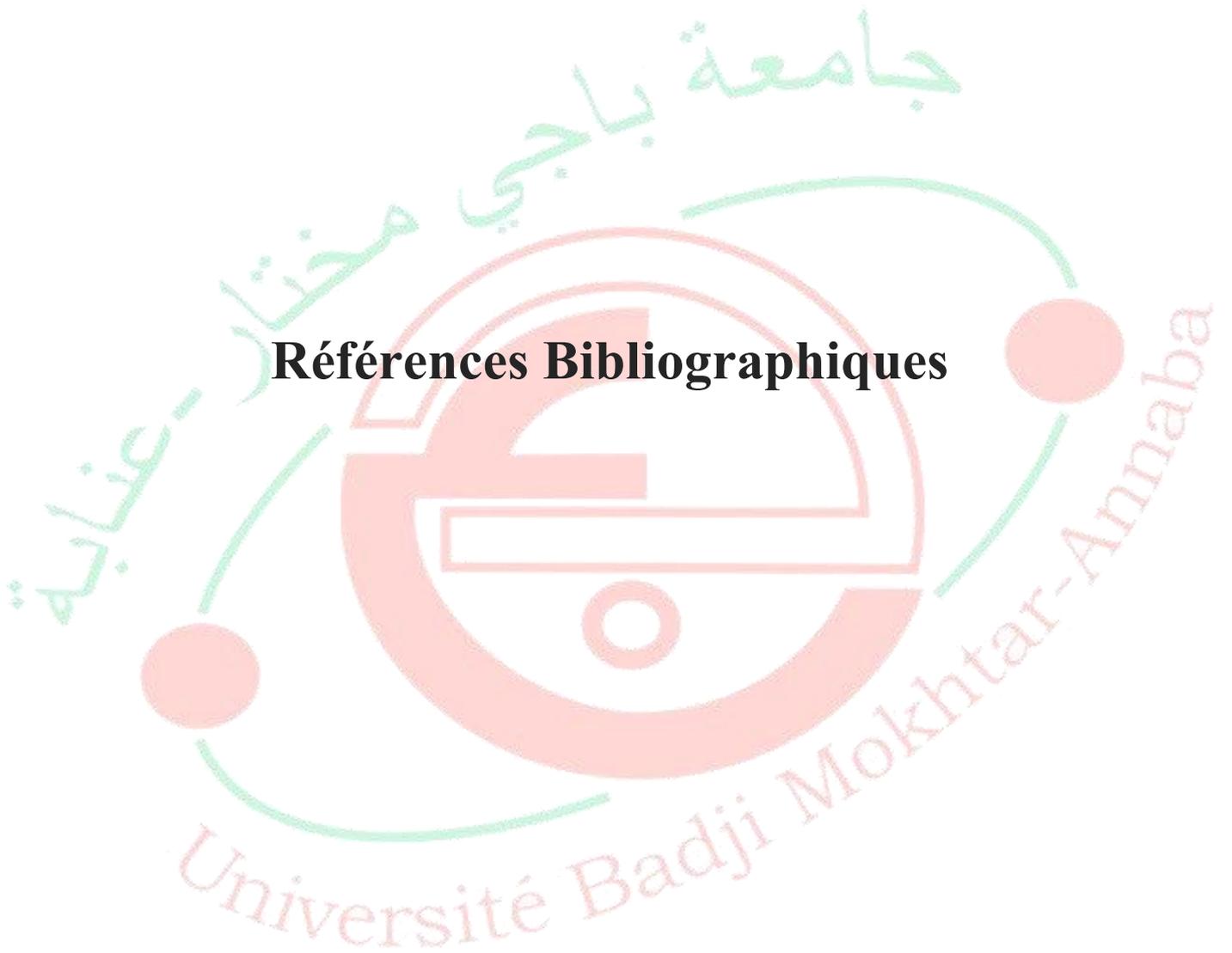
En plus, il a été constaté que :

- L'utilisation des couches composites pour le renforcement du pont en acier a provoqué la diminution des déplacements et l'augmentation de la résistance à la déformation.
- L'augmentation des éléments renforcés par matériau composite augmente la résistance à la déformation due aux chocs et Contraintes extérieures
- L'orientation des fibres influe sur l'efficacité du renforcement, les fibres perpendiculaires à contraintes extérieures donnent les meilleures résistances aux fissuration et agressions extérieures.
- Le renforcement avec matériaux composites donne d'excellents résultats pour les ponts en béton car ce dernier offre un bon transfert des efforts.

### Recommandation et perspectives

Les résultats obtenus dans ce travail ouvrent des perspectives sur l'utilisation d'autres théories de poutre tels que les théories de fissuration et endommagement en contrainte et déformation, et les calculs en remplaçant la charge statique avec charge dynamique charge roulante (véhicule train .....).

## Références Bibliographiques



### Références bibliographiques :

- [1] <https://www.amp-composite.com/le-composite/>
- [2] TOUMI WAFA (optimisation de la configuration des tubes en matériaux composites sous pression) mémoire de master université de Mohamed khi der de Biskra ;
- [3] SEHOUL MOHAMED (Etude du comportement mécanique des plaques Composite en utilisant des théories de déformations de cisaillement non-polynomiales) thèse de doctorat ; Université Djilali Liabes de Sidi Bel Abbés
- [4] TIKILI SABIHA mémoire de fin d'étude université BADJI MOKHTAR ANNABA
- [5] SAHLI SAMI (calcul des portiques par la méthode des déplacements)
- [6] <https://www.larousse.fr> ›
- [7] BELKHOUCHE Kamel BELHADI Mohammed. / Analyse à la rupture des ponts en béton armé à l'échelle semi-globale UNIVERSITE ABOUBEKR BELKAID – TLEMEN FACULTE DE TECHNOLOGIE
- [8] Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures de l'Université Laval dans le cadre du programme de maîtrise en génie civil pour l'obtention du grade de Maître ès sciences, (M. SC.)  
DÉPARTEMENT DE GÉNIE CIVIL  
FACULTÉ DES SCIENCES ET DE GÉNIE  
UNIVERSITÉ LAVAL QUÉBEC  
2010 © Anne-Marie Langlois, 2010