

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

BADJI MOKHTAR UNIVERSITY OF ANNABA
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR-ANNABA

جامعة باجي مختار عنابة



Année : 2012

FACULTE DES SCIENCES DE L'INGENIEUR
DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

MEMOIRE

PRESENTE EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME DE MASTER

INTITULE

Simulation du transfert thermique lors d'un
refroidissement sous buse d'injection d'une plaque
hautement chauffée

DOMAINE : SCIENCES ET TECHNIQUE

FILIERE : GENIE MECANIQUE

SPECIALITE : ENERGETIQUE ET ENVIRONNEMENT

PRESENTE PAR : ACHOURI BILLEL

DIRECTEUR DU MEMOIRE : Pr H. MZAD

DEVANT LE JURY

PRESIDENT : Pr H. MZAD

EXAMINATEURS : Pr L. BOUMARAF

Dr A. DJEMILI

Dr S. AZZOUZ

Table des matières

Introduction générale	3
Chapitre I : Rappels de Transfert de Chaleur	
I.1. Introduction.....	4
I.2. Convection	4
I.2.1. Nombre de Nusselt	5
I.2.2. Nombre de Prandtl	7
I.2.3. Nombre de Reynolds	8
I.2.4. Ecoulement de la chaleur en régime laminaire et en régime turbulent	8
I.2.5. Convection naturelle.....	10
I.3. Conduction	15
I.3.1. Equation de la chaleur	15
I.3.2. Transfert unidirectionnel	17
I.3.2.1. Mur simple.....	17
I.3.2.2. Mur multicouches	19
I.3.2.3. Mur composite.....	20
I.3.3. Transfert multidirectionnel.....	21
I.4. Rayonnement	22
I.4.1. Phénomène physique	23
I.4.2. Emissance énergétique	23
I.4.3. Intensité énergétique dans une direction.....	24
I.4.4. Luminance énergétique dans une direction	24
I.4.5. Rayonnement du corps noir	24
I.4.6. Rayonnement des corps non noirs	26
I.4.7. Rayonnement réciproque de plusieurs surfaces.....	26
I.4.7.1. Radiosité et flux net perdu	27
I.4.7.2. Facteur de forme géométrique	27
Chapitre II : Méthode des différences finies	
II.1. Introduction.....	29
II.2. Equations aux dérivées partielles (EDP)	29
II.2.1. EDP de nature parabolique	31
II.2.2. EDP de nature elliptique	31
II.2.3. EDP de nature hyperbolique.....	32
II.2.4. Conditions aux limites.....	32
II.3. Présentation de la méthode des différences finies	33

II.3.1. Méthode des différences finies	33
II.3.2. Grille de calcul	34
II.3.3. Maillage non-structuré	35
II.3.4. Le développement en série de Taylor	35
II.3.5. Construction des schémas pour la dérivée d'ordre un et deux.....	35
II.4. Equation de conduction de la chaleur (Joseph Fourier)	36
II.4.1. Problème stationnaire	37
II.4.2. Problème non stationnaire	39
II.4.2.1. Schéma explicite	39
II.4.2.2. Schéma implicite	45
II.4.2.3. Schéma de Crank-Nickolson	46
II.4.2.4. Schéma de Duffort Frankel.....	46
II.4.3. Concept de consistance d'un schéma	47
Chapitre III : Modélisation et simulation de transfert de chaleur sur plaque plane	
III.1. Introduction.....	48
III.2. Cas stationnaire	48
III.2.1. Solution par la méthode des différence finie.....	50
III.2.2. Domaine	50
III.2.3. Conditions aux limites.....	50
III.2.4. Développement en série de Taylor	51
III.2.5. Maillage	52
III.2.6. Formulation	52
III.2.7. Programme en FORTRAN (Cas stationnaire)	56
III.2.8. Représentation des résultats	59
III.3. Cas du régime non stationnaire 2 D	59
III.3.1. Domaine	59
III.3.2. Maillage	61
III.3.3. Schéma explicite	62
III.3.4. Programme en FORTRAN (Cas non stationnaire).....	63
III.3.5. Résultats	68
III.4. Interprétations	73
Conclusion générale	75
Références bibliographiques.....	76

Introduction générale

L'objectif de la science du ***transfert thermique (transfert de chaleur)*** est l'analyse du taux de transfert thermique ayant lieu dans un système.

L'énergie transférée pendant le transfert de chaleur n'est pas directement mesurable mais elle peut être appréciée par une quantité mesurable appelée ***la température***.

On a constaté par des observations expérimentales que lorsque, dans un système, il y a une différence de température, un *flux de chaleur* (flux thermique) apparaît et il est orienté de la région à haute température vers la région à basse température. Lorsqu'il y a un flux thermique dans un système, un gradient de température est également présent.

La connaissance de la distribution de la température dans un système est nécessaire dans l'étude du transfert thermique, mais dans beaucoup de cas pratiques, la géométrie des corps ainsi que les conditions aux limites sont très complexes pour permettre une solution analytique de ce problème. C'est pour cela, on a recours aux méthodes numériques. Ces dernières sont des méthodes approximatives basées sur une technique appelée les différences finies.

Afin d'appliquer une méthode numérique quelconque à un problème de transfert de chaleur, certaines mesures doivent être prises, le but étant d'approximer l'équation différentielle et les conditions aux limites par un groupe d'équations algébriques, ceci est généralement accompli en subdivisant le domaine continu étudié en une série d'éléments finis.

Dans chaque élément, on assume que la température est constante et correspond à celle de son centre et on remplace le système par un réseau de tiges joignant les centres des différents nœuds.

Dans notre travail on s'intéresse à faire intervenir la résolution de l'équation de la chaleur par l'une des méthodes numériques itératives, et on a choisi la méthode de Gauss-Seidel qui convienne ou qui peut être appliquée par l'utilisation du principe de résistances thermiques.

Ce travail contient trois chapitres. Le premier commence par des généralités sur le transfert de chaleur. Le second, traite le théorème des différences finies. Le troisième chapitre entame la modélisation du problème de refroidissement de la plaque hautement chauffée. Finalement, on arrive à une conclusion générale qui couronne ce modeste travail.

I.1. Introduction

La science qui permet de prédire le transfert d'énergie entre des corps à différentes températures porte le nom «transfert de chaleur», la thermodynamique classique l'appelle science de la « chaleur ».

La théorie du transfert de chaleur s'intéresse non seulement au mécanisme de transfert d'énergie mais aussi à la vitesse à laquelle ce transfert a lieu.

La thermodynamique permet de déterminer l'énergie nécessaire pour passer d'un état d'équilibre à un autre, mais pas à quelle vitesse il se fait, c'est pourquoi à la thermodynamique sont ajoutées des règles empiriques établies par la théorie de transfert de chaleur.

Prenons un exemple d'une barre de fer chaud plongée dans une bassine d'eau, la thermodynamique permettra de déterminer la température finale de la barre et de l'eau à l'équilibre mais pas à tout instant par contre le transfert de chaleur permettra de trouver la température de la barre à tout instant.

I.2. Convection

La convection est un mode de transport d'énergie par l'action combinée de la conduction, de l'accumulation de l'énergie et du mouvement du milieu [1]. La convection est le mécanisme le plus important de transfert d'énergie entre une surface solide et un liquide ou un gaz. Le transfert d'énergie par convection d'une surface dont la température est supérieure à celle du fluide qui l'entoure s'effectue en plusieurs étapes.

D'abord la chaleur s'écoule par conduction de la surface aux molécules du fluide adjacentes. L'énergie ainsi transmise sert à augmenter la température et l'énergie interne de ces molécules du fluide. Ensuite les molécules vont se mélanger avec d'autres molécules situées dans une région à basse température et transférer une partie de leur énergie. Dans ce cas l'écoulement transporte le fluide et l'énergie est emmagasinée dans les molécules du fluide et elle est transportée sous l'effet de leur mouvement.

La transmission de chaleur par convection est désignée, selon le mode d'écoulement du fluide, par **convection libre** et **convection forcée**. Lorsqu'il se produit au sein du fluide des courants dus simplement aux différences de température, on dit que la convection est naturelle ou libre. Par contre si le mouvement du fluide est provoqué par une action externe, telle une pompe ou un ventilateur, le processus est appelé convection forcée.

On peut exprimer la quantité de chaleur transmise par convection entre une paroi solide et un fluide au moyen de l'équation :

$$P = h \cdot S \cdot (T_1 - T_2) \quad (I.1)$$

Comme le transfert d'énergie par convection est très intimement lié au mouvement du fluide, il est nécessaire de connaître le mécanisme de l'écoulement du fluide avant d'examiner celui de l'écoulement de la chaleur. Un des plus importants aspects de

l'étude hydrodynamique est d'établir si le mouvement du fluide est laminaire ou turbulent. Lorsqu'un fluide s'écoule en mouvement laminaire le long d'une surface dont la température est différente de celle du fluide, la chaleur est transmise seulement par conduction aussi bien à l'intérieur du fluide qu'à l'interface entre le fluide et la surface. Par contre dans un écoulement turbulent, le mécanisme de conduction est modifié et favorisé par d'innombrables tourbillons. Les petits volumes de fluide en se mélangeant avec d'autres jouent le rôle de porteur d'énergie. Par conséquent un accroissement de turbulence amène une augmentation de la quantité de chaleur s'écoulant par convection.

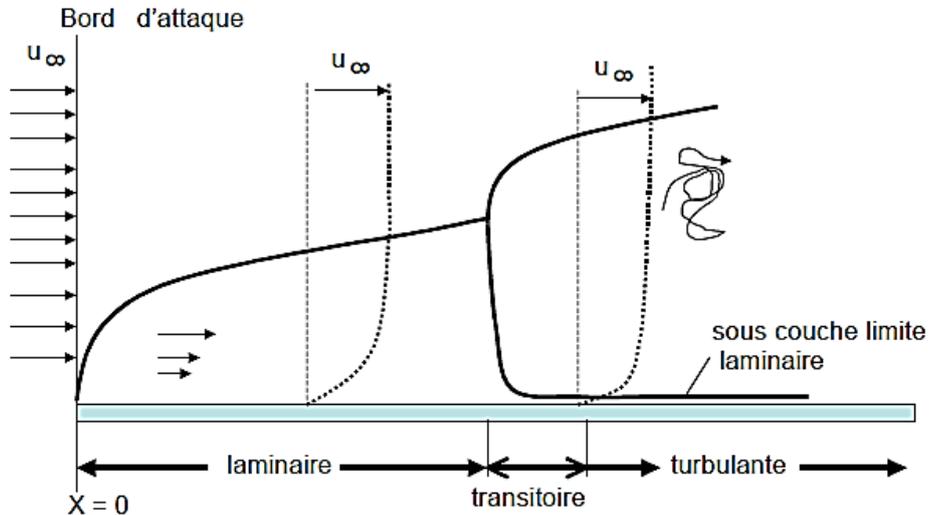


Figure I.1 : Profils des vitesses pour les couches limites laminaire et turbulente dans un écoulement sur une plaque plane.

1.2.1. Nombre de Nusselt

Lorsque la vitesse du fluide et la turbulence sont faibles, le transport d'énergie n'est que faiblement aidé par les courants de mélange à une échelle macroscopique. Par contre, si la vitesse est grande et si le mélange entre le fluide chaud et le fluide froid contribue notablement au transfert d'énergie, le mécanisme de conduction devient moins important. En conséquence, pour transporter par convection à travers un fluide une quantité de chaleur donnée, il est nécessaire que le gradient de température soit plus grand dans la région à faible vitesse que dans celle où la vitesse est élevée. Au voisinage immédiat de la paroi la chaleur se meut par conduction pure, les molécules du fluide étant stationnaires par rapport à la frontière de la couche limite. On compte naturellement sur un grand gradient de la température dans cette couche. A mesure que l'on s'éloigne de la paroi, le mouvement du fluide favorise le transport d'énergie et le gradient de température diminue de moins en moins vite pour atteindre finalement celui du courant principal. La répartition des températures pour l'écoulement turbulent de l'air le long d'une plaque plane, représentée sur la **figure I.1**, illustre qualitativement ce comportement. La répartition des températures dans une couche limite turbulente pour un fluide s'écoulant sur une plaque chauffée comme à l'interface.

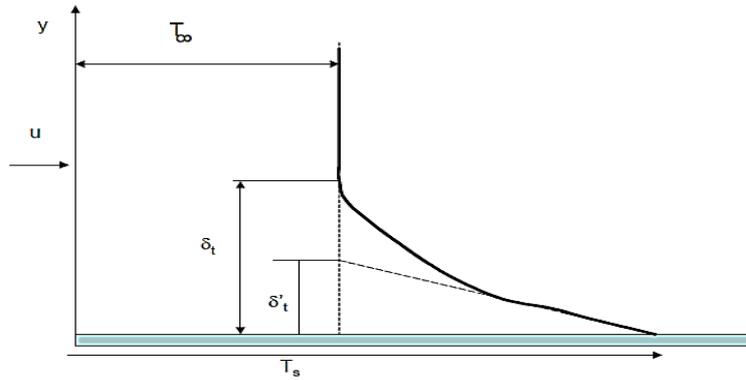


Figure I.2 : Répartition des températures dans une couche limite turbulente pour un fluide s'écoulant sur une plaque chauffée.

Quand ($y=0$) la chaleur s'écoule seulement par conduction, la densité du flux de chaleur peut être calculée à partir de l'équation :

$$Q_{s-f} = -k_f \cdot \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} \quad (I.2)$$

k_f = conductivité thermique du fluide.

On peut établir une relation entre le coefficient d'échange de chaleur h , défini par l'équation (I.1), et le gradient de température à la paroi. En égalisant les équations (I.1) et (I.2) on obtient :

$$P_{s-f} = Q_{s-f} \cdot S = S \cdot k_f \cdot \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = \bar{h}_c \cdot (T_s - T_\infty) \quad (I.3)$$

\bar{h}_c = coefficient de conductance moyenne de convection par unité de surface, [$W/m^2 \cdot ^\circ C$]. La valeur du gradient de température dans le fluide étant la même indépendamment de la température de référence on peut écrire $\partial T = \partial (T - T_s)$. En introduisant une longueur L caractéristique du corps à partir duquel la chaleur se transmet, l'équation (I.3) se met sous la forme adimensionnelle

$$\frac{\bar{h}_c S}{k_f S} = \frac{-\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0}}{T_s - T_\infty} \Rightarrow \frac{\bar{h}_c L}{k_f L} = \frac{-\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0}}{T_s - T_\infty} \Rightarrow \frac{\bar{h}_c L}{k_f} = \frac{-\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0}}{\frac{T_s - T_\infty}{L}} = Nu \quad (I.4)$$

La combinaison du coefficient d'échange de chaleur par convection \bar{h}_c , de la longueur caractéristique L , de la conductivité thermique du fluide k_f , sous la forme $\bar{h}_c L/k_f$ est appelée le Nombre de Nusselt, Nu . Ce nombre est une quantité adimensionnelle. Le nombre de Nusselt peut être interprété physiquement comme étant le rapport du gradient de température dans le fluide en contact immédiat avec la surface sur le gradient de température de référence $(T_s - T_\infty)/L$. Le nombre de Nusselt est une mesure commode du coefficient d'échange de chaleur par convection car, une fois sa valeur connue, on peut calculer le coefficient d'échange de chaleur par convection d'après la relation :

$$\bar{h}_c = N_u \cdot \frac{k_f}{L} \quad (1.5)$$

1.2.2. Nombre de Prandtl

Ce nombre est entièrement caractéristique du fluide considéré[2].

$$Pr = \frac{\mu C_p}{K_f} \quad (1.6)$$

L'inverse du nombre de Prandtl est appelé par les « thermiciens » français : le nombre de Stanton (S) [2]. Dans le cas des gaz, Pr est sensiblement constant avec la pression et la température et ne varie qu'avec les changements thermiques de $C_p(T)$.

Gaz	Pr
H₂	0.69
Air	0.69
Ar	0.66
CO₂	0.75
CO	0.72
He	0.71
N₂	0.70
O₂	0.70
H₂O (vapeur)	1.06

Tableau 1.1 : des exemples du nombre de Prandtl à 100°C pour des gaz courants.

Dans le cas des liquides, le nombre de Prandtl est beaucoup plus variable :

Liquide	T (°C)	Pr
Eau	0	13.6
	20	7.03
	100	1.75
Alcool éthylique	0	21.8
	30	13.9
	60	12.1
Glycol	20	203
	100	25
Glycérine	0	100000
	30	5200

Tableau 1.2 : Exemples du nombre de Prandtl pour des gaz liquide.

1.2.3. Nombre de Reynolds

Le nombre de Reynolds est défini par l'équation suivante :

$$Re = \frac{u_m d \rho}{\mu} \quad (I.7)$$

Si on introduit la viscosité cinématique $\nu = \mu / \rho$

$$Re = \frac{u_m d}{\nu} \quad (I.8)$$

Ce nombre joue un rôle fondamental dans la caractérisation de l'écoulement :

- Si $Re < 2400$ on est en régime laminaire.
- Pour des vitesses plus élevées, $Re > 2400$, le régime turbulent apparaît (Figure I.1).

1.2.4. Ecoulement de la chaleur en régime laminaire et en régime turbulent (convection forcée)

a) Cas d'une plaque plane parallèle à l'écoulement laminaire

Le nombre de Nusselt en un point situé à une distance x du bord de la plaque est

$$Nu(x) = 0.322 [Re(x)]^{1/2} [Pr]^{1/3} \quad (I.9)$$

Où la fonctionnalité de x indique que dans le calcul de Nu et de Re la dimension d est à remplacer par x . Le nombre de Nusselt moyen sur une plaque de largeur L .

$$Nu(L) = 0.664 [Re(L)]^{1/2} [Pr]^{1/3} \quad (I.10)$$



b) Cas d'un écoulement laminaire dans un tube

Pratiquement on considère deux domaines :

- 1) Le régime est établi :

$$Nu = 3.7 \quad (I.11)$$

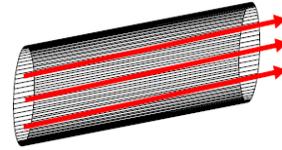
Ceci correspond à la région où

$$\frac{x}{r \cdot Re \cdot Pr} > 0.1 \quad (I.12)$$

Avec x : distance à partir de l'entrée du tube, r : rayon du tube (Remarque : le produit $Re \cdot Pr = Pe$, nombre de Péclet).

Cette condition correspond à

- Pour l'air : $x/r > 80$
- Pour l'eau : $x/r > 600$
- Pour l'huile : $x/r > 10000$



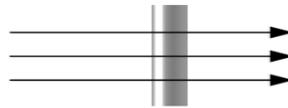
Donc dans un tuyau d'un mètre de rayon, il faut 600m avant que l'eau entre en régime établi.

2) Le régime n'est pas établi :

$$Nu = 1.06 \left(\frac{x}{r \cdot Re \cdot Pr} \right)^{1/3} \quad (I.13)$$

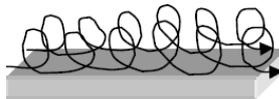
c) Cas d'un tube perpendiculaire à écoulement laminaire

$$Nu = 0.82 Re^{0.4} Pr^{0.3} \quad (I.14)$$



d) Cas d'une plaque parallèle à écoulement turbulent

$$Nu(x) = 0.0298 Pr^{1/3} [Re(x)]^{0.8} \quad (I.15)$$



e) Cas d'un tube lisse à écoulement turbulent

Dans le cas des gaz la formule adoptée en pratique est :

$$Nu = 0.026 (Re \cdot Pr)^{3/4} \quad (I.16)$$



Pour les liquides, on utilise surtout l'équation suivante :

$$Nu = 0.023Re^{0.8} Pr^{0.4} \tag{I.17}$$

1.2.5. Convection naturelle

Lorsqu'un fluide se trouve en contact avec un corps chaud, sa température augmente et sa masse volumique diminue, et il se déplace (il monte) par rapport au corps chaud [3]. Cet écoulement de fluide le long de ce corps chaud entraîne un phénomène de convection que l'on appelle naturelle ou libre. Si le fluide est plus chaud que le corps, l'écoulement se fera vers le bas mais il y aura toujours de la convection.

Pour les applications pratiques on utilise généralement l'équation :

$$\delta P = h_c \cdot \delta A \cdot (T_s - T_\infty) \tag{I.18}$$

La raison pour laquelle on rapporte cette équation à une surface infiniment petite δA est que le coefficient d'échange de chaleur, h_c , par convection naturelle n'est pas uniforme sur une surface. De même qu'en convection forcée sur une plaque plane, on fera la distinction entre une valeur locale de h_c et une valeur moyenne \bar{h}_c obtenue en prenant la moyenne de h_c sur la surface entière.

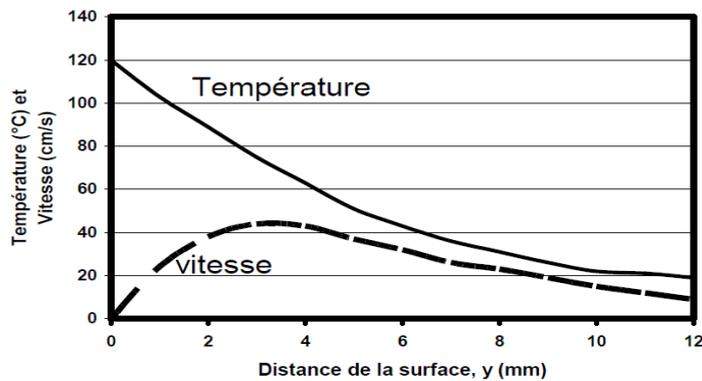


Figure I.3 : Variation de la vitesse d'écoulement et de la température perpendiculairement à une plaque chaude.

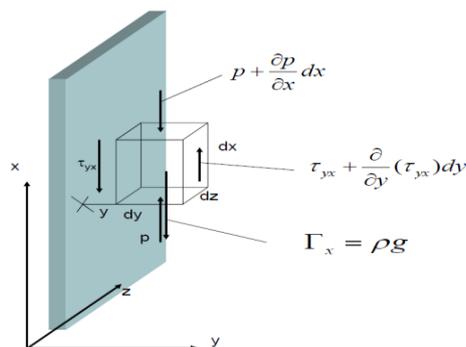


Figure I.4: Schéma montrant les forces qui agissent sur un élément de fluide un écoulement en convection naturelle.

Supposons une paroi verticale à température sensiblement uniforme T_p et un fluide à température T_f . Au voisinage de cette paroi, la température du fluide évolue lentement de T_f à T_p créant ainsi une couche limite. Soit un élément de volume infiniment petit du fluide situé tout près de la paroi de dimensions dx , dy et dz . Lorsqu'il se trouve très près de la paroi, sa température est T_p . Lorsque la température du fluide est différente de celle de la paroi, par exemple $T_f > T_p$ la densité du fluide se diminue. Par suite la force de gravité (définie comme étant la force par unité de masse) agissant sur une unité de volume dans la partie chauffée du fluide est plus faible que dans le fluide non chauffé. Ce déséquilibre est à l'origine de la montée du fluide chaud.

Lorsque l'air est en mouvement, des forces de pression et de frottement viennent s'ajouter à la force ascensionnelle. Une fois que le régime permanent est établi, la force totale sur un élément de volume $dx dy dz$ agit dans la direction positive de l'axe x :

1. La force due au gradient de pression :

$$P dy dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy dz = - \frac{\partial p}{\partial x} (dx dy dz) \quad (I.19)$$

2. La force de gravité :

$$\Gamma_x = g \rho dx dy dz \quad (I.20)$$

Où g est l'accélération de la gravité.

3. Les forces de cisaillement dues au gradient de vitesse :

$$(-\tau_{yx}) dx dz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz \quad (I.21)$$

Puisque en écoulement laminaire $\tau_{yx} = \mu (\partial u / \partial y)$, la force de frottement résultant est:

$$\left(\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx dy dz \quad (I.22)$$

avec v = vitesse moyenne dans le temps suivant la direction y .

En appliquant, au volume élémentaire, la seconde loi de Newton on obtient :

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} - \rho g + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (I.23)$$

Le fluide non chauffé, loin de la plaque, est en équilibre hydrostatique, soit $\partial p_e / \partial x_e = -\rho g$, où l'indice e indique les conditions d'équilibre. A n'importe quel niveau la pression est uniforme et par conséquent $\partial p / \partial x = \partial p_e / \partial x$. Donc l'équation (I.23) devient :

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = (\rho_e - \rho) g + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (I.24)$$

Une autre simplification peut être introduite en supposant que la densité ρ dépend seulement de la température et non de la pression. Ceci est évident pour un fluide incompressible, mais pour un gaz cela implique que la dimension verticale du corps est suffisamment petite pour que la densité hydrostatique ρ_e soit constante. Avec ces hypothèses le terme ascensionnel peut s'écrire :

$$g (\rho_e - \rho) = g (\rho_\infty - \rho) = -\rho g \beta (T_\infty - T) \quad (I.25)$$

où β est le coefficient de dilatation thermique défini par : $\beta = \frac{(\rho_\infty - \rho)}{\rho(T - T_\infty)}$.

Dans le cas d'un gaz parfait :

$$\beta = \frac{1}{T} \quad (I.26)$$

L'équation du mouvement pour la convection naturelle est obtenue finalement en substituant le terme ascensionnel exprimé par l'Éq. (I.26) dans l'Éq. (I.25), ce qui donne :

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \rho g \beta (T - T_\infty) + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (I.27)$$

Le problème consiste, maintenant, à déterminer les conditions pour lesquelles le champ de vitesse dans un système en convection naturelle est semblable au champ de vitesse dans un autre système. Les conditions aux limites sont identiques pour tous les systèmes en convection naturelle, c'est-à-dire que la vitesse est nulle à la fois sur la surface de la plaque et à une distance assez éloignée de la plaque. Il est alors possible de supposer $u = u_m f(y)$ de sorte que :

$$\frac{du}{dy} = u_m \frac{df}{dy} \quad (I.28)$$

on peut montrer, en utilisant la méthode d'analyse dimensionnelle, que :

$$u_m = \frac{\beta \rho \theta g D^2}{\mu} \quad (I.29)$$

avec $\theta = (T - T_\infty)$.

Par conséquent, dans le nombre sans dimensions qu'avait fourni l'analyse dimensionnelle (le nombre de Reynolds), il convient de remplacer u_m par $\frac{\beta \rho \theta g D^2}{\mu}$, la quantité restante étant sans dimensions.

On définit un nouveau nombre sans dimensions, le nombre de Grashof :

$$Gr = \frac{\rho D}{\mu} \frac{\beta \rho \theta g D^2}{\mu} = \frac{\rho^2 \beta \theta g D^3}{\mu^2} \quad (I.30)$$

Ainsi, la loi de la convection naturelle serait de la forme :

$$Nu = f(Gr, Pr, r_1, \dots, r_q) \quad (I.31)$$

Les équations de la convection naturelle :

En prenant :

$$Tm = 1/2(T_p - T_\infty) \quad (I.32)$$

on obtient la loi générale suivante :

$$Nu = a (Gr \cdot Pr)^n = a \cdot Ra^n \quad (I.33)$$

avec $Ra = Gr \cdot Pr$.

Ra étant le nombre de Rayleigh avec :

Gr•Pr	A	n
de 10^{-3} à $5 \cdot 10^2$	1.18	1/8
de $5 \cdot 10^2$ à $2 \cdot 10^7$	0.45	1/4
de $2 \cdot 10^7$ à 10^{13}	0.135	1/3

Tableau I.3 : les nombre de Rayleigh.

Pour des tubes horizontaux, on obtient une formule plus précise pour $0.7 < Pr < 30000$:

$$Nu_{T_f} = \frac{1}{2} Gr_{T_f}^{1/4} Pr_{T_f}^{1/4} \left(\frac{Pr_{T_f}}{Pr_{T_p}} \right)^{1/4} \quad (I.34)$$

- Dans le cas de gaz cette dernière équation se réduit en pratique à :

$$Nu_{T_f} = 0.46 Gr_{T_f}^{1/4} \quad (I.35)$$

Ces formules sont valables pour $1 < Pr \cdot Gr < 10^8$

- Dans le cas d'une plaque verticale de hauteur H :

$$h = 1.4 \left(\frac{\theta}{H} \right)^{1/4} [W/(m^2 \cdot ^\circ C)] \quad (I.36)$$

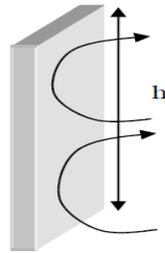
Pour un cylindre horizontal de diamètre D :

a) Pour l'air ambiant :

$$h = 1.3 \left(\frac{\theta}{H} \right)^{1/4} [W/(m^2 \cdot ^\circ C^1)] \quad (I.37)$$

b) Pour l'air à température T (en Kelvin) :

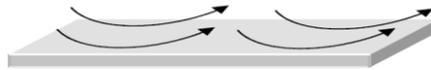
$$h = 5.6 \left(\frac{\theta}{D \cdot H} \right)^{1/4} [W/(m^2 \cdot ^\circ C^1)] \quad (I.38)$$



• Cas des plaques horizontales dans l'air :

a) Pour un flux descendant $Nu = 0.27 (Gr \cdot Pr)^{1/4}$ (I.39)

Valable si $3 \cdot 10^5 < Gr \cdot Pr < 3 \cdot 10^{10}$

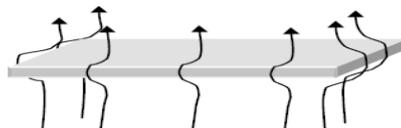


b) Pour un flux ascendant $Nu = 0.54 (Gr \cdot Pr)^{1/4}$ (I.40)

Valable si $3 \cdot 10^5 < Gr \cdot Pr < 3 \cdot 10^7$

$$Nu = 0.14 (Gr \cdot Pr)^{1/3} \quad (I.41)$$

Valable si $2 \cdot 10^7 < Gr \cdot Pr < 3 \cdot 10^{10}$



Où les propriétés sont calculées à la température moyenne T_m .

1.3. Conduction

Le transfert de la chaleur par conduction est un transport de chaleur dans un milieu immobile ou mobile sans remous turbulent [4]. Ce mode de transport de la chaleur est le seul à exister au sein d'un solide opaque, aussi la conduction concerne essentiellement les solides. Dans les liquides et les gaz de transport de la chaleur par conduction est très souvent négligeable devant les deux autres types de transport de la chaleur.

Le flux de chaleur (dimension W/m^2) transféré par conduction dans une direction donnée est proportionnel au gradient de température dans cette direction. Cette loi, dite de Fourier, est donc telle que la composante sur l'axe Ox du flux est égale à :

$$\varphi_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \quad (I.42)$$

φ_x est la composante du flux sur l'axe O_x et T la température au point considéré. Dans cette loi, postulée dès 1822 par Fourier, le coefficient de proportionnalité λ est une caractéristique physico-chimique du point matériel désignée sous le nom de conductivité ou conductibilité thermique. Dans le système international, elle s'exprime en $W/(m \cdot K)$.

Dans le tableau suivant sont reportées les conductivités de quelques corps solides, liquides et gazeux, d'une façon générale.

Matériau	λ ($W m^{-1} K^{-1}$)	Matériau	λ ($W m^{-1} K^{-1}$)
Chrome	449	Ardoise	2.2
Argent	419	Grès	1.8
Cuivre	386	Verre	0.78
Aluminium	204	Papier	0.48
Zinc	112	Chêne	0.17
Fer (pur)	73	Laine de verre	0.038
Acier Inox	16	Eau	0.556
Mercure	8.2	Air	0.0262

Tableau I.4 : les conductivités thermique des quelque métaux

1.3.1. Equation de la chaleur

Dans sa forme monodimensionnelle, l'équation de la chaleur décrit le transfert de chaleur unidirectionnel au travers d'un mur plan [5] :

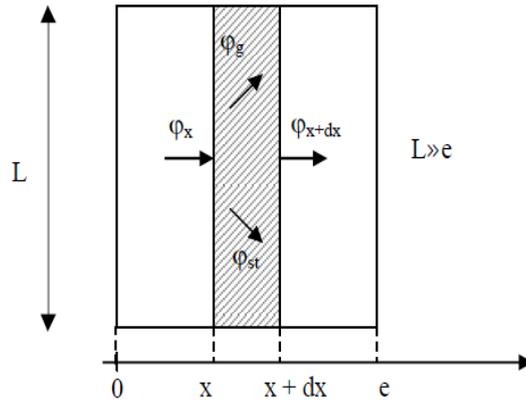


Figure I.5 : Bilan thermique sur un système élémentaire.

Considérons un système d'épaisseur dx dans la direction x et de section S normalement à la direction O_x .

Le bilan d'énergie sur ce système s'écrit :

$$\varphi_x + \varphi_g = \varphi_{x+dx} + \varphi_{st}$$

Avec :

$$\varphi_x = \left(-\lambda S \frac{\partial T}{\partial x} \right)_x \quad \text{et} \quad \varphi_{x+dx} = \left(-\lambda S \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x+dx}$$

$$\varphi_g = \dot{q} S dx$$

$$\varphi_{st} = \rho c S dx \frac{\partial T}{\partial t}$$

En reportant dans le bilan d'énergie et en divisant par dx , nous obtenons :

$$\frac{\left(\lambda S \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x+dx} - \left(\lambda S \frac{\partial T}{\partial x} \right)_x}{dx} + \dot{q} S = \rho c S \frac{\partial T}{\partial t}$$

Soit :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda S \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \dot{q} S = \rho c S \frac{\partial T}{\partial t}$$

Et dans le cas tridimensionnel, nous obtenons l'équation de la chaleur dans le cas le plus général :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (I.43)$$

Cette équation peut se simplifier dans un certain nombre de cas :

- a) Si le milieu est isotrope : $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z = \lambda$,

- b) S'il n'y a pas de génération d'énergie à l'intérieur du système : $\dot{q} = 0$,
 c) Si le milieu est homogène, λ n'est fonction que de T. Les hypothèses a) + b) + c) permettent d'écrire :

$$\lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{d\lambda}{dt} \left[\left(\frac{dT}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dT}{dy} \right)^2 + \left(\frac{dT}{dz} \right)^2 \right] = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$$

- d) Si de plus λ est constant (écart modéré de température), nous obtenons l'équation de Poisson :

$$a \nabla^2 T = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (I.44)$$

Le rapport $a = \frac{\lambda}{\rho c}$ est appelé la diffusivité thermique (m^2/s) qui caractérise la vitesse de propagation d'un flux de chaleur à travers un matériau :

- e) En régime permanent, nous obtenons l'équation de Laplace :

$$\nabla^2 T = 0 \quad (I.45)$$

Par ailleurs, les hypothèses a), c) et d) permettent d'écrire :

- Equation de la chaleur en coordonnées cylindriques :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \hat{r}^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{\lambda} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (I.46)$$

Dans le cas d'un problème à symétrie cylindrique où la température ne dépend que de r et de t, l'équation (I.46) peut s'écrire sous forme simplifiée : $\frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\dot{q}}{\lambda} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}$

- Equation de la chaleur en coordonnées sphériques :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rT)}{\partial \hat{r}^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\dot{q}}{\lambda} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (I.47)$$

1.3.2. Transfert unidirectionnel

1.3.2.1. Mur simple

On se placera dans le cas où le transfert de chaleur est unidirectionnel et où il n'y a pas de génération ni de stockage d'énergie [6].

On considère un mur d'épaisseur e, de conductivité thermique λ et de grandes dimensions transversales dont les faces extrêmes sont à des températures T_1 et T_2 :

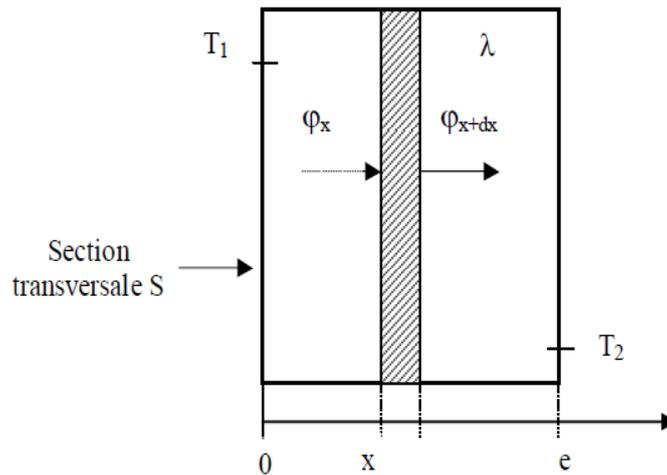


Figure I.6 : Bilan thermique élémentaire sur un mur simple.

En effectuant un bilan thermique sur le système (S) constitué par la tranche de mur comprise entre les abscisses x et $x + dx$, il vient :

$$\varphi_x = \varphi_{x+dx} \rightarrow \left(-\lambda S \frac{\partial T}{\partial x} \right)_x = \left(-\lambda S \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x+dx}$$

D'où
$$\frac{dT}{dx} = A \text{ et } T(x) = Ax + B$$

Avec les conditions aux limites : $T(x = 0) = T_1$ et $T(x = e) = T_2$

D'où :
$$T = T_1 \frac{x}{e} (T_1 - T_2) \tag{I.48}$$

Le profil de température est donc linéaire. La densité de flux de chaleur traversant le mur s'en déduit par la relation :

$$\phi = -\lambda \frac{dT}{dx}, \text{ d'où : } \phi = -\lambda \frac{T_1 - T_2}{e} \tag{I.49}$$

$$\varphi = \phi / s \tag{I.50}$$

La relation(I.50) peut également se mettre sous la forme : $\varphi = \frac{T_1 - T_2}{\frac{e}{\lambda S}}$, cette relation est analogue à la loi d'Ohm en électricité qui définit l'intensité du courant comme le rapport de la différence de potentiel électrique sur la résistance électrique. La température apparaît ainsi comme un potentiel thermique et le terme $\frac{e}{\lambda S}$ apparaît comme la résistance thermique d'un mur plan d'épaisseur e , de conductivité thermique λ et de surface latérale S . On se ramène donc au schéma équivalent représenté sur la figure I.7.

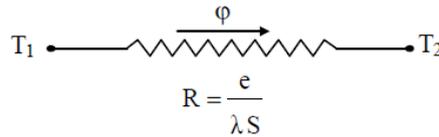


Figure I.7: Schéma électrique équivalent d'un mur simple

1.3.2.2. Mur multicouches

C'est le cas des murs réels (schématisé sur la figure I.8) constitués de plusieurs couches de matériaux différents et où on ne connaît que les températures T_{f1} et T_{f2} des fluides en contact avec les deux faces du mur de surface latérale S .

En régime permanent, le flux de chaleur se conserve lors de la traversée du mur et s'écrit :

$$\varphi = h S(T_{f1} - T_{f2}) = \frac{T_2 - T_3}{\frac{e_B}{\lambda_B S}} = \frac{T_3 - T_4}{\frac{e_C}{\lambda_C S}} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{e_A}{\lambda_A S}} = h S (T_{f1} - T_{f2})$$

D'où :

$$\varphi = \frac{T_{f1} - T_{f2}}{\frac{1}{h_1 S} + \frac{e_A}{\lambda_A S} + \frac{e_B}{\lambda_B S} + \frac{e_C}{\lambda_C S} + \frac{1}{h_2 S}} \quad (I.51)$$

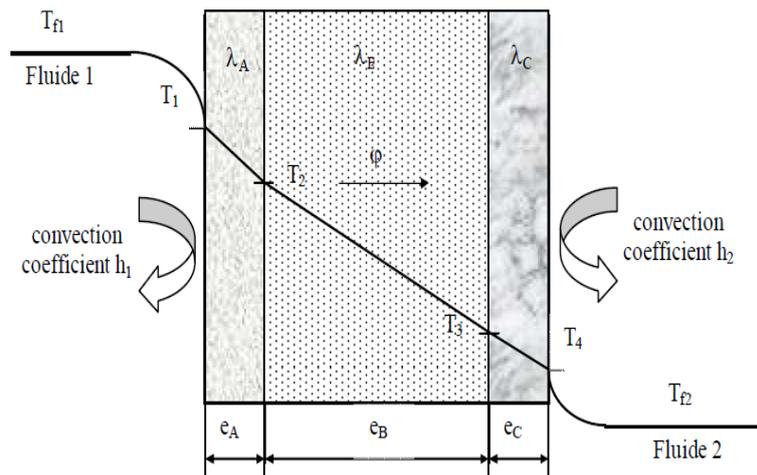


Figure I.8 : Schématisation des flux et des températures dans un mur multicouches

On a considéré que les contacts entre les couches des différentes nature étaient parfaits et qu'il n'existait pas de discontinuité de température aux interfaces. En réalité, compte-tenu de la rugosité des surfaces, une microcouche d'air existe entre les creux des surfaces en regard qui contribue à la création d'une résistance thermique (l'air est un isolant) appelée résistance thermique de contact. La formule précédente s'écrit alors :

$$\varphi = \frac{T_{f1} - T_{f2}}{\frac{1}{h_1 S} + \frac{e_A}{\lambda_A S} + R_{AB} + \frac{e_B}{\lambda_B S} + R_{BC} + \frac{e_C}{\lambda_C S} + \frac{1}{h_2 S}} \quad (I.51)$$

Le schéma électrique équivalent est représenté sur la figure I.10.

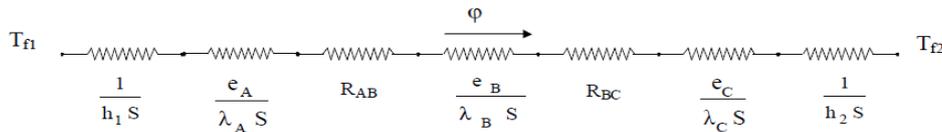


Figure I.9: Schéma électrique équivalent d'un mur multicouche

Remarque

- Une résistance thermique ne peut être définie en l'absence de sources que sur un tube de flux.
- Cette résistance thermique de contact est négligée si le mur comporte une paroi isolante ou si les parois sont jointes par soudure.

1.3.2.3. Mur composite

C'est le cas le plus couramment rencontré dans la réalité où les parois ne sont pas homogènes. Considérons à titre d'exemple un mur de largeur L constitué d'agglomérés creux (figure I.10).

En supposant le transfert unidirectionnel et en tenant compte des axes de symétrie, on peut se ramener au calcul du flux à travers l'élément isolé sur la droite de la figure et calculer la résistance thermique R équivalente d'une portion de mur de largeur L et de hauteur $\varrho = \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3$ en utilisant les lois d'association des résistances en série et en parallèle par la relation :

$$R = R_1 + R_2 + \frac{1}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}} + R_6 + R_7$$

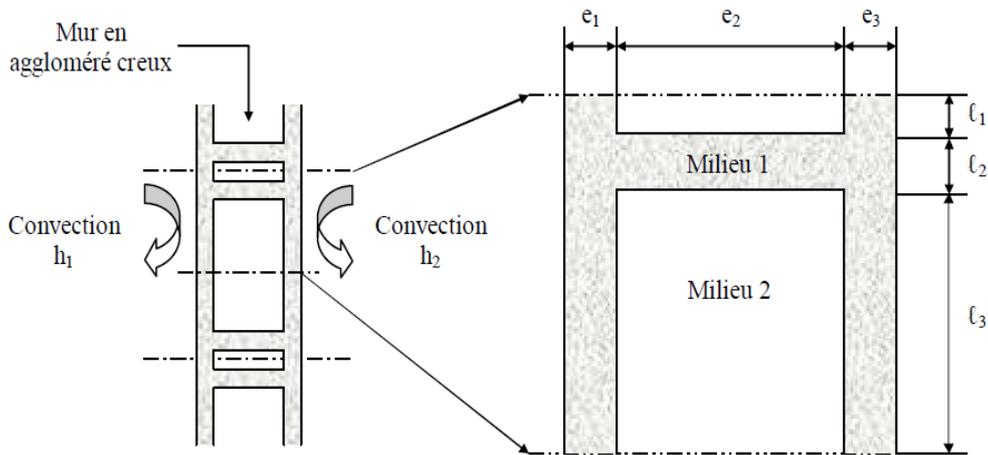


Figure I.10: Schématisation d'un mur composite

Avec :

$$R_1 = \frac{1}{h_1 \ell L}; R_2 = \frac{e_1}{\lambda_1 \ell L}; R_3 = \frac{e_2}{\lambda_2 \ell_1 L}; R_4 = \frac{e_2}{\lambda_1 \ell_2 L}; R_5 = \frac{e_2}{\lambda_2 \ell_3 L}; R_6 = \frac{e_3}{\lambda_1 \ell L}; R_7 = \frac{1}{h_2 \ell L}$$

Ce qui peut être schématisé par le schéma électrique équivalent représenté sur la figure I.11.

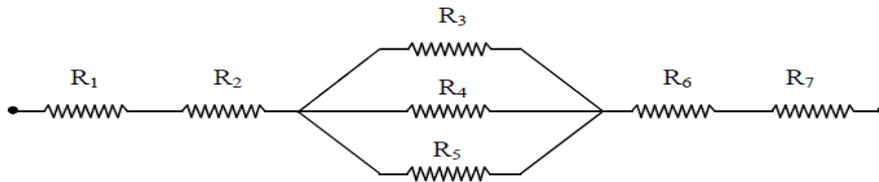


Figure I.11 : Schéma électrique équivalent du mur composite

1.3.3. Transfert multidirectionnel

Dans les systèmes bidimensionnels ou tridimensionnels où n'interviennent que deux températures limites T_1 et T_2 , on montre que le flux de chaleur peut se mettre sous la forme :

$$\varphi = \lambda \cdot F \cdot (T_1 - T_2) \quad (I.53)$$

Avec :

λ Conductivité thermique du milieu séparant les surfaces S_1 et S_2 ($W m^{-1} \text{ } ^\circ C^{-1}$)

T_1 Température de la surface S_1 ($^\circ C$).

T_2 Température de la surface S_2 ($^\circ C$).

F Coefficient de forme (m).

Le coefficient de forme F ne dépend que de la forme, des dimensions et de la position relative des deux surfaces S_1 et S_2 .

Cas particulier : Enceinte tridimensionnelle (four, chambre froide, pièce climatisée...).

Méthode : on découpe l'enceinte en différents éléments et on calcule le flux traversant chacun d'eux selon la représentation de la figure (I.12).

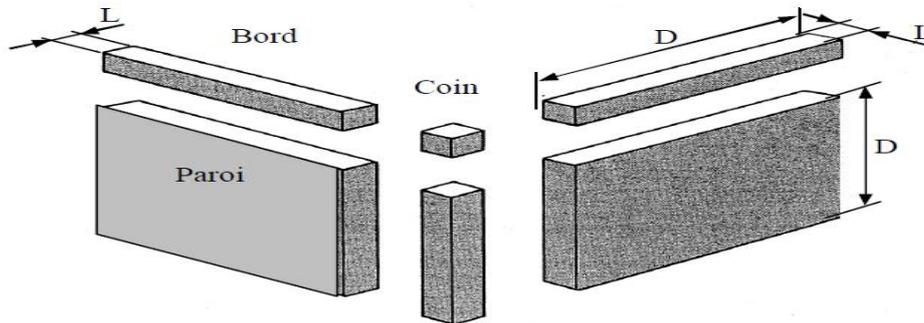


Figure I.12: Méthode de découpe d'une enceinte tridimensionnelle

Si les dimensions longitudinales sont grandes devant l'épaisseur e des parois (supposée constante), les coefficients de forme des différents éléments ont pour valeur :

$$F_{\text{paroi } i} = S_i / L_i$$

$$F_{\text{bord } i} = 0.54 D_i$$

$$F_{\text{coin } i} = 0.15 L_i$$

Avec : S_i : Aire de la paroi i

D_i : Longueur de la paroi ou du bord i

L_i : Epaisseur des parois

Le flux de chaleur traversant l'enceinte s'écrit alors :

$$\varphi = \sum_{i=1}^6 \lambda_i F_{\text{paroi } i} \Delta T_i + \sum_{i=1}^{12} \lambda_i F_{\text{bord } i} \Delta T_i + \sum_{i=1}^8 \lambda_i F_{\text{coin } i} \Delta T_i$$

Avec :

λ_i : Conductivité thermique (équivalente si paroi multicouche) de la paroi i ($\text{W m}^{-1} \text{°C}^{-1}$)

ΔT_i : Différence de température entre les faces intérieure et extérieure de la paroi i (°C)

I.4. Rayonnement

Dans le transfert d'énergie par rayonnement, contrairement aux deux types de transferts précédents, le transport se fait par des ondes électromagnétiques. Le corps chaud émet des photons, donc une onde qui est absorbée par le corps froid et transformée en chaleur.

Un exemple typique de ce mode de transfert est le chauffage de la Terre par la lumière solaire.

1.4.1. Phénomène physique

Le rayonnement thermique dont les ondes varient entre $0.1 < \lambda < 100\mu\text{m}$ n'occupe qu'une partie du spectre électromagnétique [7]. On trouvera représenté sur la figure I.13 les différents types d'ondes électromagnétiques et leurs longueurs d'ondes correspondantes. On retiendra que le rayonnement thermique émis par les corps se situe entre 0.1 et 100 μm .

- Par l'œil : $0.38 < \lambda < 0.78 \mu\text{m}$ rayonnement visible.
- Par la peau : $0.78 < \lambda < 314 \mu\text{m}$ rayonnement IR.

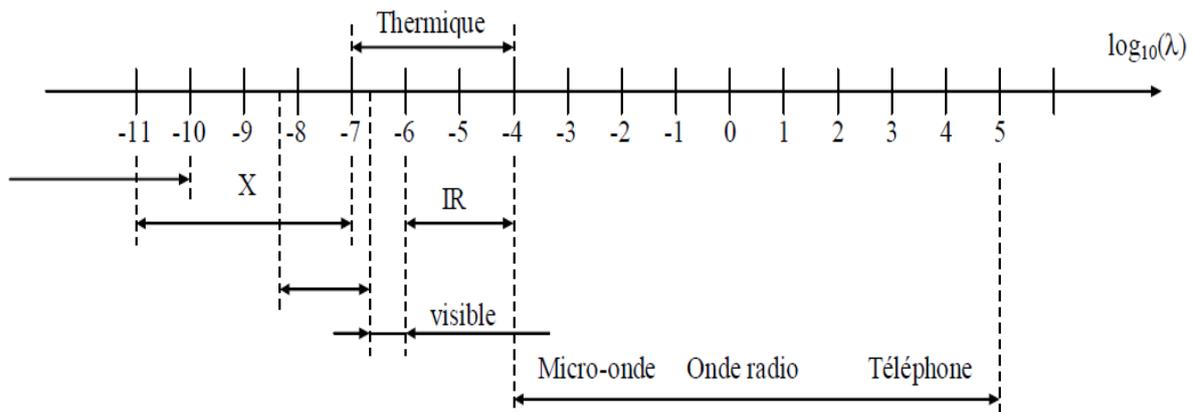


Figure I.13 : Spectre des ondes électromagnétiques (λ en μm)

1.4.2. Emission énergétique

- **Monochromatique**

Un élément de surface dS émet un certain flux d'énergie par rayonnement dans toutes les directions du $\frac{1}{2}$ espace [8]. Ce flux est réparti sur un intervalle de longueurs d'ondes. Si l'on considère le flux d'énergie $d\varphi_{\lambda}^{\lambda+d\lambda}$ émis entre les deux longueurs d'ondes λ et $\lambda+d\lambda$, on définit l'émission monochromatique d'une source à la température T par :

$$M_{\lambda T} = \frac{d\varphi_{\lambda}^{\lambda+d\lambda}}{dS d\lambda} \quad (I.54)$$

- **Totale**

C'est la densité de flux de chaleur émise par rayonnement par dS sur tout le spectre des longueurs d'ondes. Elle n'est plus fonction que de la température T et de la nature de la source :

$$M_T = \int_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} M_{\lambda T} d\lambda = \frac{d\varphi}{dS} \quad (I.55)$$

1.4.3. Intensité énergétique dans une direction

On appelle intensité énergétique I_x le flux par unité d'angle solide émis par une surface dS dans un angle solide $d\Omega$ entourant la direction O_x :

$$I_x = \frac{d\phi_x}{d\Omega} \quad (1.56)$$

1.4.4. Luminance énergétique dans une direction

Soit α l'angle fait par la normale \vec{n} à la surface émettrice S avec la direction O_x [9]. La projection de dS sur le plan perpendiculaire à O_x définit la surface émettrice apparente $dS_x = dS \cos \alpha$. L'intensité énergétique élémentaire dI_x dans la direction O_x par unité de surface émettrice apparente dS_x s'appelle la luminance énergétique L_x . En partant de la relation (1.56) :

$$L_x = \frac{I_x}{dS_x} = \frac{I_x}{dS \cos \alpha} = \frac{d^2\phi_x}{d\Omega dS \cos \alpha} \quad (1.57)$$

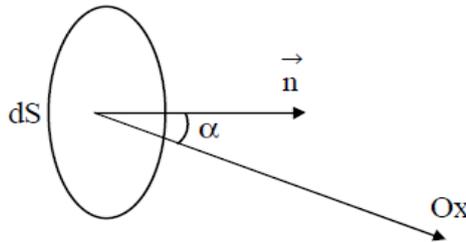


Figure I.14 : Schéma de définition des angles

1.4.5. Rayonnement du corps noir

Emittance monochromatique :

$$M_{o \lambda T} = \frac{C_1 \lambda^{-5}}{\exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right) - 1} \quad (1.58)$$

Elle est donnée par la loi de Planck :

Avec : $C_1 = 3.742 \cdot 10^{-16} \text{ (W/m}^2\text{)}$

$C_2 = 1.4385 \cdot 10^{-2} \text{ (m} \cdot \text{K)}$

La loi de Planck permet de tracer les courbes isothermes représentant les variations de $M_{0\lambda T}$ en fonction de la longueur d'onde pour diverses températures :

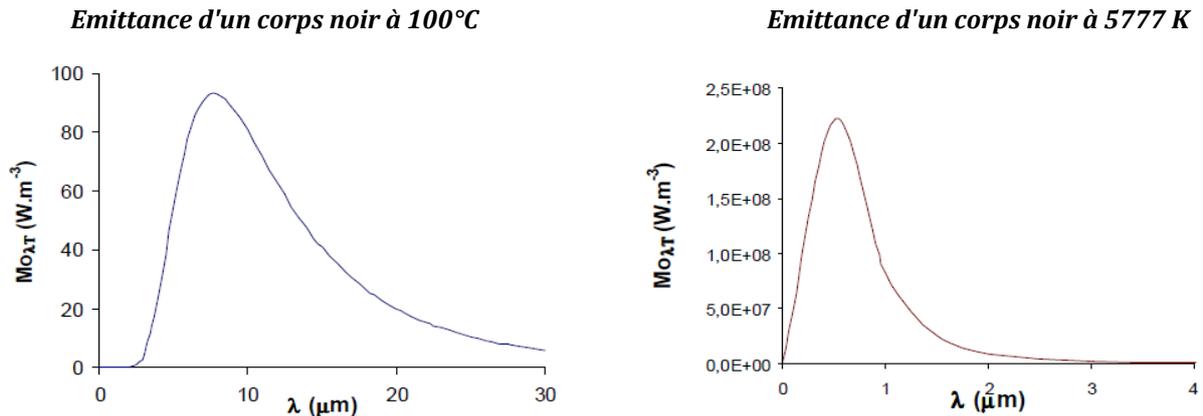


Figure I.15 : Emittance monochromatique d'un corps noir à deux températures différentes

Remarques : La longueur d'onde λ_M pour laquelle l'émission est maximale varie avec la température de la source :

$$\lambda_M = \frac{2.897 \cdot 10^{-3}}{T} \quad (I.59)$$

$$M_{0\lambda_M T} = 0.410 \cdot \left(\frac{T}{10}\right)^5 \quad (I.60)$$

Avec T : Température (K)

Pour le Soleil ($T \approx 5777$ K), 90% de l'énergie est émise entre 0.31 et 2.5 μm, le maximum étant situé dans le spectre visible. Par contre, un corps noir à 373 K (100°C) a son émission maximale vers $\lambda = 8$ μm dans l'IR.

Emittance totale M_{0T}

L'intégration de la formule de Planck pour toutes les longueurs d'onde donne l'émittance totale M_{0T} du corps noir qui n'est plus fonction que de la température T, on obtient la loi de Stefan-Boltzmann :

$$M_{0T} = \sigma \cdot T^4 \quad (I.61)$$

Avec $\sigma = 5.675 \cdot 10^{-8} \text{ W} / (\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$

Dans les calculs on écrira souvent :

$$M_{0T} = 5.675 \left(\frac{T}{100}\right)^4$$

C'est la fraction du flux émis par l'unité de surface du corps noir à la température T entre les longueurs d'ondes λ_1 et λ_2 :

$$F_{\lambda_{1T}-\lambda_{2T}} = \frac{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} M_{o\lambda T} d\lambda}{\int_0^{\infty} M_{o\lambda T} d\lambda} = \frac{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} M_{o\lambda T} d\lambda}{\sigma T^4} = \frac{\int_0^{\lambda_2} M_{o\lambda T} d\lambda - \int_0^{\lambda_1} M_{o\lambda T} d\lambda}{\sigma T^4}$$

$$= \frac{\int_0^{\lambda_2} M_{o\lambda T} d\lambda}{\sigma T^4} - \frac{\int_0^{\lambda_1} M_{o\lambda T} d\lambda}{\sigma T^4}$$

Ce qui peut également s'écrire $F_{\lambda_{1T}-\lambda_{2T}} = F_{0-\lambda_{2T}} - F_{0-\lambda_{1T}}$ Calculons $F_{0-\lambda T}$ à T constant:

$$F_{0-\lambda T} = 1/\sigma T^4 \int_0^{\lambda} \frac{C_1 \lambda^{-5}}{\exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right) - 1} d\lambda = \frac{1}{\sigma} \int_0^{\lambda} \frac{C_1 \lambda^{-5}}{\exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right) - 1} T d\lambda$$

$$= \frac{1}{\sigma} \int_0^{\lambda} \frac{C_1 \lambda^{-5}}{\exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right) - 1} d(T\lambda) =$$

Nous constatons que $F_{0-\lambda T}$ ne dépend que du produit λT . Il suffit donc de dresser une fois pour toutes une table à une entrée unique λT donnant $F_{0-\lambda T}$ et de l'utiliser pour le calcul de $F_{\lambda_{1T}-\lambda_{2T}} = F_{0-\lambda_{2T}} - F_{0-\lambda_{1T}}$.

1.4.6. Rayonnement des corps non noirs

On définit les propriétés émissives des corps réels par rapport aux propriétés émissives du corps noir dans les mêmes conditions de température et de longueur d'onde et on les caractérise à l'aide de coefficients appelés facteurs d'émission ou émissivités. Ces coefficients monochromatiques ou totaux sont définis par :

$$\varepsilon_{\lambda T} = \frac{M_{\lambda T}}{M_{o\lambda T}} \text{ et } \varepsilon_T = \frac{M_T}{M_{oT}} \quad (I.62)$$

D'après la loi de Kirchoff, on montre que :

$$\alpha_{\lambda T} = \varepsilon_{\lambda T} \quad (I.63)$$

Ils sont caractérisés par $\alpha_{\lambda T} = \varepsilon_{\lambda T}$ soit d'après ce qui précède : $\varepsilon_{\lambda T} = \varepsilon_T$

Or : $M_T = \varepsilon_T M_{oT}$, nous en déduisons l'émittance du corps gris à la température T :

$$M_T = \varepsilon_T \sigma T^4 \quad (I.64)$$

1.4.7. Rayonnement réciproque de plusieurs surfaces

Les surfaces considérées sont supposées homogènes, opaques, isothermes et grises. Les éclaircements sont supposés homogènes et les réflexions diffuses.

1.4.7.1. Radiosité et flux net perdu

Le rayonnement qui quitte une surface S_i est la somme de son émission propre et de la réflexion d'une partie du rayonnement incident sur cette surface. On appelle radiosité, que l'on note J_i , l'émittance apparente de la surface S_i donc :

$$J_i = \epsilon_i \sigma T_i^4 + (1 - \epsilon_i) E_i \tag{I.65}$$

Avec E_i : Eclairement de la surface S_i (W/m^2)

Considérons maintenant la surface S_i choisie parmi n surfaces isothermes et homogènes qui délimitent un volume :

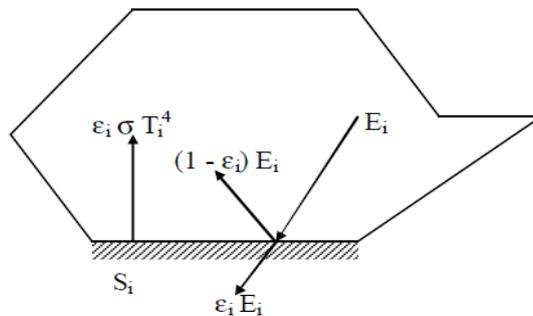


Figure I.16 : Schématisation des flux de rayonnement sur une surface

La densité d'énergie nette perdue par rayonnement par S_i s'écrit :

$$\phi_{i \text{ net}} = \epsilon_i \sigma T_i^4 - E_i$$

En introduisant, d'après (I.65), la radiosité J_i par : $E_i = \frac{1}{1 - \epsilon_i} (J_i - \epsilon_i \sigma T_i^4)$, nous obtenons :

$$\phi_{i \text{ net}} = \frac{\epsilon_i}{1 - \epsilon_i} (\sigma T_i^4 - J_i) \quad \epsilon_i (J_i - \sigma T_i^4) = J_i - E_i \tag{I.68}$$

1.4.7.2. Facteur de forme géométrique

On considère une surface S_i qui sur toute son étendue à une émission apparente [10] : $\phi_i = S_i J_i$.

La surface S_i est environnée par un nombre n de surfaces et ϕ_i est envoyé sur toutes ces surfaces (la surface S_i peut également rayonner vers elle-même si elle est concave). Le flux apparent j_i peut donc se décomposer de la manière suivante :

$$\phi_i = \phi_{i \rightarrow 1} + \phi_{i \rightarrow 2} + \dots + \phi_{i \rightarrow i} + \dots + \phi_{i \rightarrow n}$$

Calculons $\phi_{i \rightarrow k}$ qui est la part du flux quittant S_i qui atteint S_k :

D'après la formule de Bouguer, le flux $d^2\varphi_{i \rightarrow k}$ envoyé par la surface élémentaire dS_i vers la surface élémentaire dS_k s'écrit :

$$d^2\varphi_{i \rightarrow k} = L_i = \frac{dS_i \cos \alpha_i dS_k \cos \alpha_k}{r^2}$$

Avec $L_i = \frac{J_i}{\pi}$ comme la surface grise S_i suit la loi de Lambert.

Nous en déduisons : $\varphi_{i \rightarrow k} = J_i \int_{S_i} \int_{S_k} \frac{\cos \alpha_i \cos \alpha_k}{\pi r^2} ds_i ds_k$

Le facteur de forme géométrique f_{ik} de la surface S_i par rapport à la surface S_k est alors défini par la relation :

$$S_i f_{ik} = \int_{S_i} \int_{S_k} \frac{\cos \alpha_i \cos \alpha_k}{\pi r^2} ds_i ds_k \quad (I.69)$$

Il ne dépend que de la géométrie et de la disposition relative des surfaces S_i et S_k . Le flux $\varphi_{i \rightarrow k}$ peut alors s'écrire simplement : $\varphi_{i \rightarrow k} = J_i f_{ik} S_i$

Le facteur de forme géométrique f_{ik} s'interprète simplement comme la fraction du flux total émis en apparence par S_i ($\varphi_i = J_i S_i$) qui atteint la surface S_j .

II.1. Introduction

Dans ce chapitre on a représenté classification des équations aux driver partielle (EDP) et le théorème de la méthode des différences finies, avec un exemple uni dimensionnelle.

La méthode différence finie est une des plus anciennes méthodes de simulation numériques qui est encore utilisée pour certaines applications, comme la propagation d'ondes (simple ou électromagnétiques) ou la mécanique des fluides compressibles. Pour d'autre application, comme la mécanique du soleil ou celle des fluides incompressibles, on lui préfère souvent la méthode des éléments finis. Néanmoins, de nombreux concepts en différences finies se retrouvent dans les autres méthodes numériques.

La méthode d'approximation de la solution d'une EDP par différences finies consiste à approcher la valeur de la solution en un nombre fini de points, appelés points de discrétisation du maillage. Nous allons d'abord d'écrire la méthode dans un cas simple en dimension 1 avant de nous intéresser aux schémas explicites et implicites pour l'équation de la chaleur.

II.2. Equations aux dérivées partielles (EDP)

Dans cette partie un classement des équations aux dérivées partielles et des conditions aux limites est présenté [11].

Classification

Considérons la forme générale d'une Equation aux Dérivées Partielles (EDP) de second ordre suivant les deux variables indépendantes (x et y) :

$$A \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + D \frac{\partial \phi}{\partial x} + E \frac{\partial \phi}{\partial y} + F\phi + G = 0 \quad (\text{II.1})$$

Une classification assez simple de cette équation peut être faite sur la base des coefficients associés aux dérivées d'ordre le plus élevé A, B et C. On calcule le déterminant défini par :

$$\Delta = B^2 - 4AC$$

L'équation est dite de type :

- Elliptique si $\Delta < 0$,
- Parabolique si $\Delta = 0$,
- Hyperbolique si $\Delta > 0$.

Dans le cas d'un système d'EDP, il faut écrire l'équation caractéristique du système pour trouver sa nature. La marche à suivre est illustrée par l'exemple suivant :

$$A_1 \frac{\partial U}{\partial x} + B_1 \frac{\partial U}{\partial y} + C_1 \frac{\partial V}{\partial x} + D_1 \frac{\partial V}{\partial y} = E_1 \quad (\text{II.2})$$

$$A_2 \frac{\partial U}{\partial x} + B_2 \frac{\partial U}{\partial y} + C_2 \frac{\partial V}{\partial x} + D_2 \frac{\partial V}{\partial y} = E_2 \quad (\text{II.3})$$

On écrit les déplacements :

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy \quad (\text{II.4})$$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy \quad (\text{II.5})$$

Les équations précédentes s'écrivent sous la forme compacte suivante :

$$\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ dx & dy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dy & dx \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ dU \\ dV \end{bmatrix} \quad (\text{II.6})$$

Le déterminant :

$$(A_1 C_2 - A_2 C_1) dy^2 - (A_1 D_2 - A_2 D_1 + B_1 C_2 - B_2 C_1) dx dy + (B_1 D_2 - B_2 D_1) dx^2 = 0 \quad (\text{II.7})$$

On divise l'équation précédente par dx^2 , et on définit $f' = \frac{dy}{dx}$

$$af'^2 - bf' + c = 0 \quad (\text{II.8})$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad (\text{II.9})$$

L'équation est dite de type **elliptique** si $\Delta < 0$, elle est **parabolique** si $\Delta = 0$, et **hyperbolique** si $\Delta > 0$.

Une des utilités de cette classification est de prévoir le comportement de l'équation vis-à-vis des conditions aux limites. Si nous imaginons un écoulement de fluide de gauche vers la droite, une perturbation en un point donné n'a pas d'influence amont si l'équation est de type parabolique. Si par contre l'équation est de type elliptique une perturbation quelconque en un point quelconque aura une influence dans toutes les directions de l'espace. Une conséquence directe de cette caractéristique est qu'un problème de type parabolique peut être résolu par une marche avant, alors qu'une

équation de type elliptique nécessite la prise en considération des conditions aux limites imposées sur toutes les frontières du domaine de calcul.

Exemple

L'équation de Laplace	$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$	elliptique.
L'équation de diffusion	$\frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0$	parabolique.
L'équation	$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$	hyperbolique.

II.2.1. EDP de nature parabolique

C'est le cas d'un problème de propagation associé à un mécanisme de dissipation tel que la conduction thermique non stationnaire.

L'équation $\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$ liée aux conditions initiales : $\phi = \sin \pi x$ et aux conditions aux limites : $\phi(0, t) = \phi(1, t) = 0$ accepte la solution exacte suivante :

$$\phi(x, t) = \sin(\pi x) \exp(-\pi^2 t)$$

C'est une équation linéaire d'ordre 2, parabolique par rapport à la variable du temps t. La propagation en avant dans le temps et la diffusion dans l'espace, font que la solution en un point P peut influencer n'importe quel point pour $t \geq t_i$. Cependant les points se situant dans la zone $t < t_i$ ne sont pas influencés par la solution au point P. En d'autres termes on dira que le passé influe sur le futur alors que l'inverse n'est pas vrai.

La dissipation dans l'espace, fait que même si la distribution initiale pour $t = t_i$ est discontinue, la solution devient continue pour $t > t_i$.

II.2.2. EDP de nature elliptique

Cette catégorie d'EDP est associée aux problèmes de nature stationnaire ou d'équilibre tels que l'écoulement stationnaire d'un fluide visqueux, la répartition stationnaire du champ de température ou la distribution d'un potentiel.

L'équation de Laplace du type $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$, associée aux conditions aux limites suivantes :

$$\phi(x, 0) = \sin(\pi x), \phi(x, 1) = \sin(\pi x) \exp(-\pi) \text{ et } \phi(0, y) = \phi(1, y) = 0$$

Accepte la solution exacte suivante : $\phi(x, y) = \sin(\pi x) \exp(-\pi y)$.

La principale caractéristique de ce type d'équation elliptique est qu'une perturbation introduite en un point quelconque à l'intérieur du domaine de calcul influe sur la totalité du domaine. Ceci implique que pour résoudre un problème de type elliptique il est impératif de poser les conditions aux limites sur toutes les frontières du domaine.

Ici aussi une discontinuité dans les conditions aux limites est rapidement effacé (lissé) à l'intérieur du domaine de calcul.

II.2.3. EDP de nature hyperbolique

Cette catégorie d'EDP peut être considérée comme extension des équations elliptiques pour lesquels certaines valeurs critiques des paramètres doivent être déterminées en même temps que la distribution d'équilibre correspondante. La résonance de circuit électrique ou d'enceintes acoustiques ainsi que la détermination des fréquences propres des structures élastiques constituent des exemples de ce type d'équations.

L'équation de propagation d'une onde suivante $\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$ représente un très bon exemple pour l'équation de type hyperbolique. Cette équation associée aux conditions initiales.

$\phi(x, 0) = \sin(\pi x), \partial \phi / \partial t (x, 0) = 0$ et aux conditions aux limites $\phi(0, t) = \phi(L, t) = 0$ accepte la solution suivante : $\phi(x, t) = \sin(\pi x) \cos(\pi t)$.

Enfin, la **figure II.1** représente schématiquement l'influence d'une perturbation au point P sur l'ensemble du domaine de calcul pour les trois types d'équations.

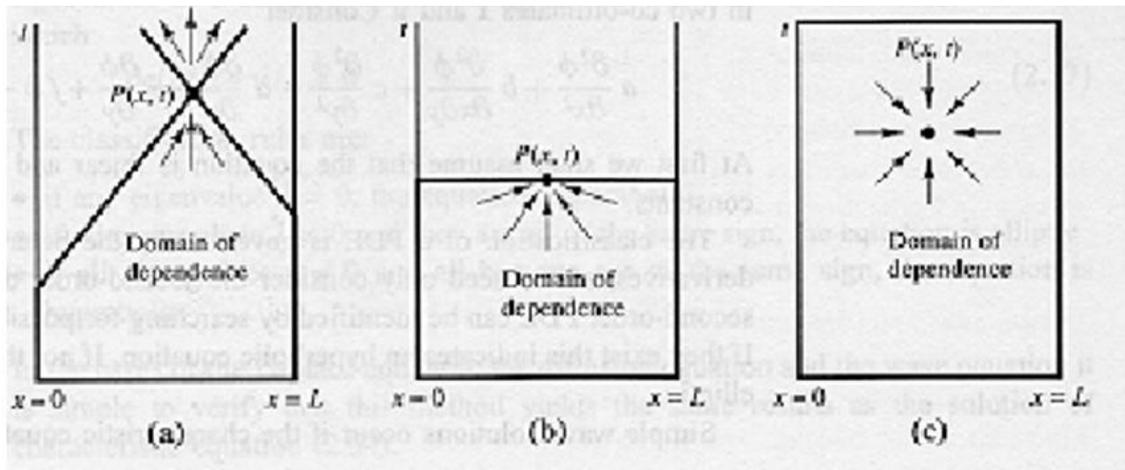


Figure II.1 : Nature des équations et conditions aux limites, (a) Hyperbolique, (b) Parabolique et (c) Elliptique.

II.2.4. Conditions aux limites

Soit un problème défini dans un domaine R, limité par la frontière ∂R . Les conditions aux limites peuvent être de trois natures :

Dirichlet : Dans ce type de conditions la valeur de la variable dépendante est imposée sur la frontière du domaine de calcul :

$$\phi = f \quad \text{sur} \quad \partial R \quad (\text{II.10})$$

Newman : La variable dépendante n'est pas connue sur la frontière mais sa dérivée est bien défini :

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = f \quad \text{Ou} \quad \frac{\partial \phi}{\partial s} = q \quad \text{sur} \quad \partial R \quad (\text{II.11})$$

Mixte : Une combinaison linéaire des deux premières conditions est imposée sur la frontière :

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} + k\phi = f, k > 0 \quad \text{sur} \quad \partial R \quad (\text{II.12})$$

Un problème de transfert de chaleur ou d'écoulement est dit bien posé si en résolvant les équations du problème liées aux conditions aux limites et initiales :

- La solution numérique existe.
- La solution numérique est unique.
- La solution numérique dépend de façon continue de la variation des conditions aux limites.

II.3. Présentation de la méthode des différences finies

II.3.1. Méthode des différences finies

Cette méthode est basée sur la technique du développement en séries de Taylor qui permet d'approximer la valeur d'une fonction en un point donné si on connaît la valeur de la dite fonction ainsi que toute ces dérivées en un point voisin en espace ou en temps [12]. Cette technique permet de développer des schémas pour remplacer les dérivées premières et secondes des EDP pour pouvoir envisager une solution numérique par calculateur.

Pour obtenir une solution numérique il faut tout d'abord définir un domaine numérique constitué par un ensemble de points discrets appelé grille de calcul. Les valeurs instantanées et locales des variables dépendantes du problème sont définit sur l'ensemble des points de la grille de calcul. La différence entre cette vue numérique à travers un certain nombre de points et la distribution continue exacte représente l'erreur commise par la méthode numérique. Il est tout à fait logique de penser que plus le nombre de points est important plus la visualisation est claire, un peu comme les pixels d'une photo numérique. La **figure II.1** représente des exemples de grilles de calcul.

L'étape suivante consiste à approximer ou remplacer toutes les dérivées partielles par des schémas discrets (différence finies). L'EDP sera transformée en équation algébrique. Cette équation algébrique est ensuite appliquée sur l'ensemble des nœuds de la grille de calcul. Le résultat sera un système d'équation comportant autant d'équations que d'inconnues (nœuds). Ce système sera ensuite résolu par une méthode appropriée. Le résultat sera une distribution discrète de la solution sur l'ensemble des points du domaine de calcul.

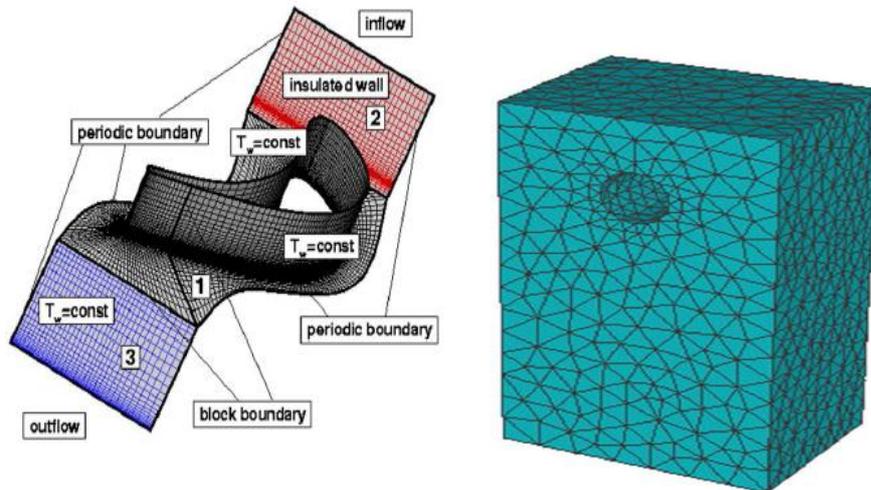


Figure II.2 : Exemples de grilles de calcul

II.3.2. Grille de calcul

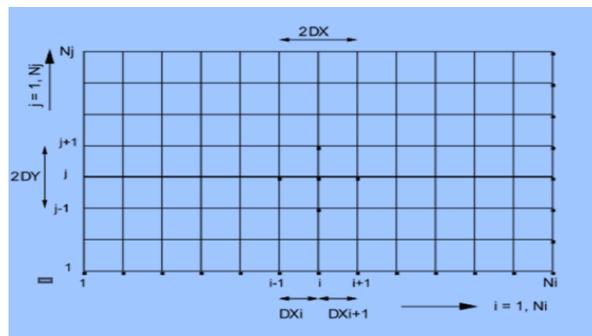


Figure II.3 : Grille de calcul structurée 2D

Avant de commencer, il faut trouver un moyen qui nous permettra de localiser spatialement et temporellement tous les points de la solution numérique. C'est ce qu'on va appeler création de la grille de calcul. Dans la suite, on va raisonner sur un espace plan (2D) et l'extension pour le 3D sera faite de manière intuitive. La figure II.3 représente la manière la plus directe pour repérer les points suivant la procédure structurée. C'est un peu comme une matrice, chaque point sera affecté de deux indexes (i, j) qui le positionneront par rapport à ces voisins. Soit U, la variable à calculer. Sa valeur aux différents points de la grille s'écrit de la manière suivante :

$$U_{i+1,j} = U(x_0 + \Delta x, y_0) \quad (\text{II.13})$$

$$U_{i-1,j} = U(x_0 - \Delta x, y_0) \quad (\text{II.14})$$

$$U_{i,j+1} = U(x_0 + y_0 + \Delta y) \quad (\text{II.15})$$

$$U_{i,j-1} = U(x_0 + y_0 - \Delta y) \quad (\text{II.16})$$

II.3.3. Maillage non-structuré

L'autre façon de mailler un domaine de calcul est de définir un nuage de points, pas nécessairement structuré. Dans ce cas-là, il faudra numéroter les points de calcul un par un. Chaque point aura ces coordonnées x et y . En plus il faudra relier ces points entre eux de façon à créer des éléments (généralement des triangles, voir **Figure II.2**).

Le fichier de la grille de calcul sera compléter par une liste des éléments (eux-mêmes numéroter) et les points composants chaque élément.

II.3.4. Le développement en série de Taylor

$$U(x_0 + \Delta x, y_0) = U(x_0, y_0) + \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_0 \Delta x + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \Big|_0 \frac{\Delta x^2}{2!} + \dots + \frac{\partial^n U}{\partial x^n} \Big|_0 \frac{\Delta x^n}{n!} + R_n \quad (\text{II.17})$$

$$U(x_0 - \Delta x, y_0) = U(x_0, y_0) - \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_0 \Delta x + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \Big|_0 \frac{\Delta x^2}{2!} - \dots + \frac{\partial^n U}{\partial x^n} \Big|_0 \frac{\Delta x^n}{n!} + R_n \quad (\text{II.18})$$

Une autre écriture de l'équation (II.17), on oublie temporairement la deuxième dimension.

$$U(x_{i+1}) = U(x_i) + U'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{U''(x_i)}{2!} (x_{i+1} - x_i)^2 + \dots + \frac{U^n(x_i)}{n!} (x_{i+1} - x_i)^n + R_n$$

Le terme R_n , représente les termes omis d'ordre $(n+1)$ à l'infini. Théoriquement, on aura besoin d'un nombre infini de termes pour pouvoir calculer la valeur de $U(x_{i+1})$. En pratique, on se limite à un nombre fini de terme et tout le reste sera considéré en tant que l'erreur de l'approximation (erreur de troncature).

II.3.5. Construction des schémas pour la dérivée d'ordre un et deux

En arrangeant l'équation (II.17), on obtient le schéma aux différences avant:

$$\frac{\partial U}{\partial x} \Big|_0 = \frac{U(x_0 + \Delta x, y_0) - U(x_0, y_0)}{\Delta x} + \partial(\Delta x) \quad (\text{II.19})$$

L'équation (II.18), donne le schéma aux différences arrière :

$$\frac{\partial U}{\partial x} \Big|_0 = \frac{U(x_0, y_0) - U(x_0 - \Delta x, y_0)}{\Delta x} + \partial(\Delta x) \quad (\text{II.20})$$

Le schéma aux différences centrées s'obtient en soustrayant l'équation (II.18) de l'équation (II.17) :

$$\frac{\partial U}{\partial x} \Big|_0 = \frac{U(x_0 + \Delta x, y_0) - U(x_0 - \Delta x, y_0)}{2\Delta x} + \partial(\Delta x^2) \quad (\text{II.21})$$

La dérivée seconde est obtenue en additionnant l'équation (II.17) à l'équation (II.18) :

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_0 = \frac{U(x_0+\Delta x, y_0) - 2U(x_0, y_0) + U(x_0-\Delta x, y_0)}{\Delta x^2} + \partial(\Delta x^2) \quad (\text{II.22})$$

Les schémas ci-dessus s'écrivent sous forme indicielle :

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{U_{i+1,j} - U_{i,j}}{\Delta x} + \partial(\Delta x) \quad (\text{II.23})$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{U_{i,j} - U_{i-1,j}}{\Delta x} + \partial(\Delta x^2) \quad (\text{II.24})$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{U_{i+1,j} - U_{i-1,j}}{\Delta x} + \partial(\Delta x) \quad (\text{II.25})$$

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_{i,j} = \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{\Delta x} + \partial(\Delta x^2) \quad (\text{II.26})$$

II.4. Equation de conduction de la chaleur (Joseph Fourier)

L'équation de Fourier traduisant le transfert de chaleur par conduction sera utilisée dans la suite comme exemple de base pour illustrer l'application de la méthode des différences finies [13].

$$C_p \rho \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \cdot \nabla T + Q \quad (\text{II.27})$$

Où $T(x, y, t)$: La température, fonction de l'espace et du temps.

C_p : La chaleur spécifique.

ρ : La masse volumique.

Q : Source de chaleur par unité de temps et de volume.

λ : Le coefficient de conductivité thermique.

t : Le temps.

Bien que la conductivité thermique, la chaleur spécifique et la masse volumique puissent varier en fonction de la température, elles seront considérées constantes dans la suite. Notre première approche du problème sera d'appliquer cette équation pour un cas assez simple tel que le transfert de chaleur en 1D. Soit un fil métallique de section droite très petite par rapport à sa longueur de façon à ce que le flux de chaleur existe seulement suivant la longueur du fil. Si en plus la source de chaleur est absente, l'équation précédente prend la forme suivante :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (\text{II.28})$$

Où : $a = \frac{\lambda}{c_p \rho}$, représente la diffusivité thermique.

Si les températures maximale et minimale du processus sont connues, la température sera dimensionnalisée comme suit :

$$\theta = \frac{T - T_{\min}}{T_{\max} - T_{\min}} \quad (\text{II.29})$$

Et en introduisant la variable d'espace adimensionnelle, $x = x'/L$ où L est la longueur du fil, l'équation précédente s'écrit :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (\text{II.30})$$

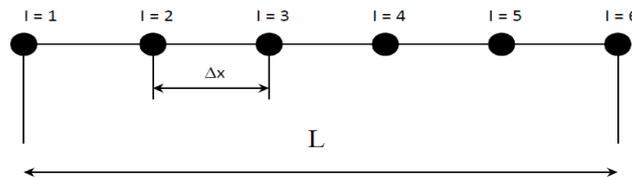
Où x' a été remplacée par x pour simplifier l'écriture.

II.4.1. Problème stationnaire

Si en plus le problème est stationnaire, l'équation devient :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{II.31})$$

Le problème sera complété par la pose des conditions aux limites.



L Longueur du fil.

NI = 6 Nombre de nœuds du maillage.

Les conditions aux limites seront du type Dirichlet :

$$\theta(1) = 1, \quad \theta(\text{NI}) = 0 \quad (\text{II.32})$$

On calcul Δx par l'expression suivante :

$$\Delta x = L / (\text{NI} - 1) \quad (\text{II.33})$$

Et on génère la grille de calcul par la portion de programme :

```

x (1) = 0.0
Do I=2, NI
x (i) = x (i-1)+Δx
End do
    
```

L'équation (II.25) sera discrétisée par un schéma centré de second ordre :

$$\frac{\theta_{i-1} - 2\theta_i + \theta_{i+1}}{\Delta x^2} = 0 \quad (\text{II.34})$$

Le nombre de nœuds global étant 6 dont deux sont réservés pour les conditions aux limites et quatre sont à calculés par la méthode des différences finies.

L'application de l'équation algébrique (II.28) aux quatre nœuds donne le système suivant :

$$I = 2 \quad \theta_1 - 2\theta_2 + \theta_3 = 0 \quad \text{soit} \quad -2\theta_2 + \theta_3 = -1 \quad (\text{II.35})$$

$$I = 3 \quad \theta_2 - 2\theta_3 + \theta_4 = 0 \quad \text{soit} \quad \theta_2 - 2\theta_3 + \theta_4 = 0 \quad (\text{II.36})$$

$$I = 4 \quad \theta_3 - 2\theta_4 + \theta_5 = 0 \quad \text{soit} \quad \theta_3 - 2\theta_4 + \theta_5 = 0 \quad (\text{II.37})$$

$$I = 5 \quad \theta_4 - 2\theta_5 + \theta_6 = 0 \quad \text{soit} \quad \theta_4 - 2\theta_5 + \theta_6 = 0 \quad (\text{II.38})$$

Mathématiquement parlant, on dispose d'un système de quatre équations à quatre inconnus :

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.39})$$

Ce type de matrice est appelée, matrice tri diagonale et elle est facilement résolue par la méthode du pivot (triangulation).

Solution :

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$-5\theta_5 = -1 \quad \rightarrow \quad \theta_5 = 0.2$$

$$-4\theta_4 + 3\theta_5 = -1 \quad \rightarrow \quad \theta_4 = 0.4$$

$$-3\theta_3 + 2\theta_4 = -1 \quad \rightarrow \quad \theta_3 = 0.6$$

$$-2\theta_2 + \theta_3 = -1 \quad \rightarrow \quad \theta_2 = 0.8$$

On a aussi : $\theta_1 = 1$ et $\theta_6 = 0$.

Il est clair que la solution est une droite en parfaite concordance avec la conduction thermique uni directionnelle qui possède un caractère linéaire.

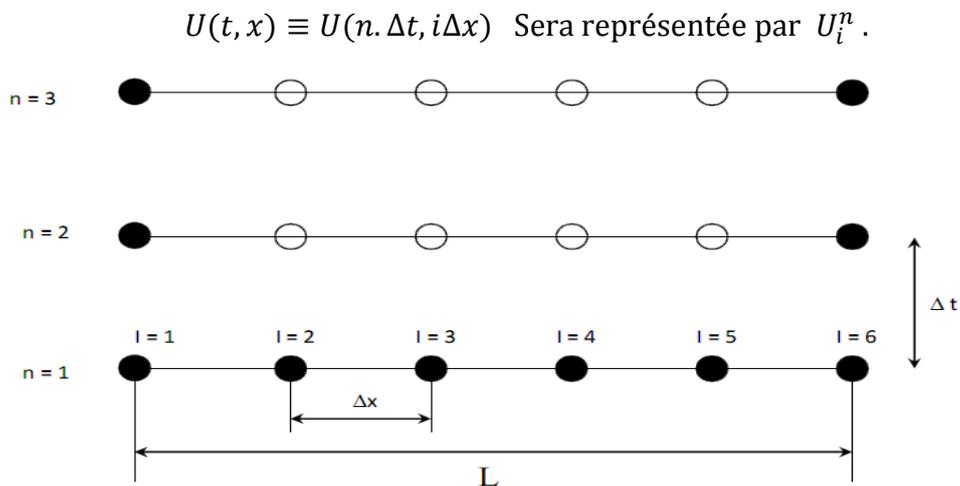
Remarque : La solution de ce type de problème est possible analytiquement (deux intégrations successives) et la solution est celle d'une ligne droite.

II.4.2. Problème non stationnaire

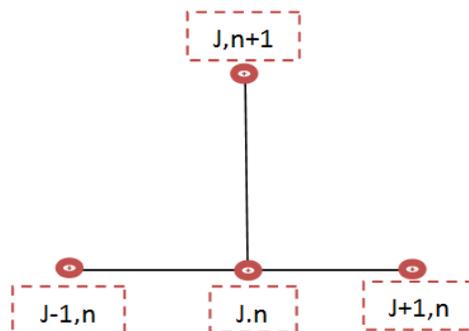
On reprend l'équation (II.30)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Dans ce genre de problème, en plus des conditions aux limites on a besoin des conditions initiales. C'est à dire une distribution initiale de la solution pour le temps zéro. Les variables auront deux indices : le premier se rapportant au temps et le deuxième à l'espace.



II.4.2.1. Schéma explicite



L'équation précédente sera approximée par le schéma suivant :

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} + \partial(\Delta t) = a \frac{U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n}{\Delta x^2} + \partial\Delta x^2 \quad (\text{II.40})$$

On remarque qu'on a utilisé un schéma avant d'ordre un pour la dérivée par rapport au temps et un schéma centré d'ordre deux pour la dérivée par rapport à l'espace. Lors de cette discrétisation nous avons choisi de prendre les termes de droites au temps n. ce schéma s'appelle un schéma explicite, puisqu'il permet de formuler l'expression de la variable au point i et à l'instant n+1 explicitement en fonction de la solution déjà calculée au temps n. Ce schéma est représenté par la molécule suivante.

L'équation (II.34) sera arrangée comme suit :

$$U_i^{n+1} = \lambda U_{i-1}^n + (1 - 2\lambda)U_i^n + \lambda U_{i+1}^n \quad (\text{II.41})$$

Avec
$$\lambda = a \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \quad (\text{II.42})$$

L'équation (II.41) sera appliqué aux nœuds d'une même rangé (c.à.d. n = cste).

Reprenons le problème de conduction de la température précédent $\frac{\partial\theta}{\partial t} = a \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}$ et posons les conditions aux limites suivantes :

$(\theta(t, 0) = 1.0, \theta(t, 1) = 0.0)$ et les conditions initiales $((0, x) = 0.0$ pour $0 < x < 1$).

Si on reprend le même nombre de nœuds que précédemment (NI=6) le pas d'espace sera $\Delta x=0.2$.

Cas 1: $\Delta t=0.1$ ($\lambda=2.5$)

Le problème de conduction de la température précédent est :

$$n=0 \rightarrow U_0^0 = 0; U_1^0 = 0.2; U_2^0 = 0.4; U_3^0 = 0.6; U_4^0 = 0.8; U_5^0 = 1; U_6^0 = 0$$

Les conditions aux limites $(\theta(t, 0) = 1.0, \theta(t, 1) = 0.0)$ et les conditions initiales $((0, x) = 0.0$ pour $0 < x < 1$)

$$n=1 \rightarrow U_1^1 = 1; U_2^1 = 0.0; U_3^1 = 0.0; U_4^1 = 0.0; U_5^1 = 0.0; U_6^1 = 0$$

On applique l'équation (II.41) :

$$U_i^{n+1} = \lambda U_{i-1}^n + (1 - 2\lambda)U_i^n + \lambda U_{i+1}^n$$

$$n = 1 \left\{ \begin{array}{l} U_2^2 = \lambda U_1^1 + (1 - 2\lambda)U_2^1 + \lambda U_3^1 \\ U_3^2 = \lambda U_2^1 + (1 - 2\lambda)U_3^1 + \lambda U_4^1 \\ U_4^2 = \lambda U_3^1 + (1 - 2\lambda)U_4^1 + \lambda U_5^1 \\ U_5^2 = \lambda U_4^1 + (1 - 2\lambda)U_5^1 + \lambda U_6^1 \end{array} \right.$$

On trouve : $n=2 \rightarrow U_1^2 = 1; U_2^2 = 2.5; U_3^2 = 0.0; U_4^2 = 0.0; U_5^2 = 0; U_6^2 = 0$

$$n = 2 \begin{cases} U_2^3 = \lambda U_1^2 + (1 - 2\lambda)U_2^2 + \lambda U_3^2 \\ U_3^3 = \lambda U_2^2 + (1 - 2\lambda)U_3^2 + \lambda U_4^2 \\ U_4^3 = \lambda U_3^2 + (1 - 2\lambda)U_4^2 + \lambda U_5^2 \\ U_5^3 = \lambda U_4^2 + (1 - 2\lambda)U_5^2 + \lambda U_6^2 \end{cases}$$

On trouve $n=3 \rightarrow U_1^3 = 1; U_2^3 = -7.5; U_3^3 = 6.25; U_4^3 = 0.0; U_5^3 = 0; U_6^3 = 0$

x	0.0000	0.2000	0.4000	0.6000	0.8000	1.0000
1	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	1.0000	2.5000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	1.0000	-7.5000	6.2500	0.0000	0.0000	0.0000

A ce niveau, on peut arrêter les calculs puisqu'on remarque que les résultats numériques de la prédiction ne peuvent être acceptés physiquement. En l'absence de source de chaleur les valeurs de la température doivent être bornées par les conditions aux limites, pire encore on voit apparaître des valeurs négatives de la température adimensionnelle. On conclue que le schéma numérique n'est pas stable puisqu'il amplifie les erreurs introduites par les conditions initiales.

Cas 2 : $\Delta t=0.1 (\lambda=0.25)$

On applique l'équation (II.41) :

$$U_i^{n+1} = \lambda U_{i-1}^n + (1 - 2\lambda)U_i^n + \lambda U_{i+1}^n$$

$$n = 1 \begin{cases} U_2^2 = \lambda U_1^1 + (1 - 2\lambda)U_2^1 + \lambda U_3^1 \\ U_3^2 = \lambda U_2^1 + (1 - 2\lambda)U_3^1 + \lambda U_4^1 \\ U_4^2 = \lambda U_3^1 + (1 - 2\lambda)U_4^1 + \lambda U_5^1 \\ U_5^2 = \lambda U_4^1 + (1 - 2\lambda)U_5^1 + \lambda U_6^1 \end{cases}$$

On trouve : $n = 2 \rightarrow U_1^2 = 1; U_2^2 = 2.5; U_3^2 = 0.0; U_4^2 = 0.0; U_5^2 = 0.0; U_6^2 = 0$

$$n = 2 \begin{cases} U_2^3 = \lambda U_1^2 + (1 - 2\lambda)U_2^2 + \lambda U_3^2 \\ U_3^3 = \lambda U_2^2 + (1 - 2\lambda)U_3^2 + \lambda U_4^2 \\ U_4^3 = \lambda U_3^2 + (1 - 2\lambda)U_4^2 + \lambda U_5^2 \\ U_5^3 = \lambda U_4^2 + (1 - 2\lambda)U_5^2 + \lambda U_6^2 \end{cases}$$

AN :

$$n = 3 \begin{cases} U_2^3 = (0.25 \times 1) + (1 - 2 \times 0.25) * 0.25 + (0.25 \times 0) \\ U_2^3 = (0.25 \times 0.25) + (1 - 2 \times 0) * 0.25 + (0.25 \times 0) \\ U_2^3 = (0.25 \times 0) + (1 - 2 \times 0) * 0.25 + (0.25 \times 0) \\ U_2^3 = (0.25 \times 0) + (1 - 2 \times 0) * 0.25 + (0.25 \times 0) \end{cases}$$

On trouve : $n = 3 \rightarrow U_1^3 = 1; U_2^3 = 0.375; U_3^3 = 0.0625; U_4^3 = 0.0; U_5^3 = 0.0; U_6^3 = 0$

On calcule de même manière pour la suite jusqu'à trouver $\Delta t=0.01$.

X	0.0000	0.2000	0.4000	0.6000	0.8000	1.0000
1	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	1.0000	0.2500	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	1.0000	0.3750	0.0625	0.0000	0.0000	0.0000
4	1.0000	0.4531	0.1250	0.0156	0.0000	0.0000
5	1.0000	0.5078	0.1797	0.0391	0.0039	0.0000
6	1.0000	0.5488	0.2266	0.0654	0.0117	0.0000
7	1.0000	0.5811	0.2628	0.0923	0.0222	0.0000
8	1.0000	0.6072	0.3018	0.1184	0.0342	0.0000
9	1.0000	0.6276	0.3323	0.1432	0.0467	0.0000
10	1.0000	0.6476	0.3592	0.1663	0.0591	0.0000.

D'après les résultats ci-dessus, on remarque que la première variante avec $\Delta t=0.1$ est instable. Elle ne peut pas aboutir à une solution raisonnable. Alors qu'avec $\Delta t=0.01$ le processus est stable. Conclusion : la stabilité d'un schéma explicite n'est pas toujours assurée.

- **Concept de stabilité d'un schéma**

Un schéma est dit stable s'il amorti les erreurs provenant des C.I., des C.L. Et de l'approximation utilisée [14]. S'il amplifie les erreurs, le schéma sera instable et ne pourra pas converger vers une solution réaliste.

Pour introduire le concept de stabilité nous allons utiliser le schéma de l'équation (II.41) :

$$U_i^{n+1} = \lambda U_{i-1}^n + (1 - 2\lambda)U_i^n + \lambda U_{i+1}^n$$

Soit u^n la solution exacte (en minuscule) et U^n la solution numérique à l'instant n. ces deux quantités seront liées par :

$$U_i^n = u_i^n + \delta u_i^n \tag{II.43}$$

Où δu_i^n est l'erreur introduite dans le calcul par l'approximation du schéma (erreur de troncature).

Remplaçons l'équation (II.43) dans (II.40), nous obtenons :

$$\frac{\delta u_i^{n+1} - \delta u_i^n}{\Delta t} - \frac{\delta u_{i+1}^n - 2\delta u_i^n + \delta u_{i-1}^n}{\Delta x^2} = \partial(\Delta t, \Delta x^2) \quad (\text{II.44})$$

Ou

$$\delta u_i^{n+1} = \lambda \delta u_{i-1}^n + (1 - 2\lambda) \delta u_i^n + \lambda \delta u_{i+1}^n + \Delta t \partial(\Delta t, \Delta x^2) \quad (\text{II.45})$$

Cette dernière équation décrit l'évolution de l'erreur en fonction du temps. Comme il est dit précédemment, un schéma numérique stable ne doit pas amplifier les erreurs. Cette conditions est bien vérifiée si $(1-2\lambda) > 0$, puisque $\lambda = \Delta t / \Delta x^2$ est toujours positif.

$$|\delta u_i^{n+1}| \leq (1 - 2\lambda) |\delta u_i^n| + \lambda |\delta u_{i-1}^n| + \lambda |\delta u_{i+1}^n| + \Delta t \partial(\Delta t, \Delta x^2) \quad (\text{II.46})$$

$$(\delta u_i^{n+1})_{max} \leq (\delta u_i^n)_{max} + \Delta t \partial(\Delta t, \Delta x^2)$$

En d'autres termes l'erreur introduite par un pas de temps Δt ne peut être supérieur à $\Delta t \partial(\Delta t + \Delta x^2)$.

- **Analyse de la stabilité par la transformation de Fourier**

Contrairement à l'erreur de troncature qui peut être estimé pour n'importe quel problème (aussi complexe soit-il), il est pratiquement très difficile d'analyser la stabilité d'un schéma donnée [15]. Il est même impossible d'étudier la stabilité d'un algorithme pour des équations non linéaires.

Une méthode d'analyse de la stabilité basée sur la transformation de Fourier peut être appliquée au schéma précédent (II.41) :

$$U_i^{n+1} = \lambda U_{i-1}^n + (1 - 2\lambda) U_i^n + \lambda U_{i+1}^n$$

La solution d'un tel problème peut s'écrire sous la forme suivante :

$$U_i^n = \psi(n\Delta t) e^{j\lambda i \Delta x} \quad (\text{II.47})$$

L'injection de cette solution dans l'équation (II.41) donne :

$$\psi((n+1)\Delta t) e^{j\lambda i \Delta x} = \psi(n\Delta t) [\lambda e^{j\lambda(i-1)\Delta x} + (1 - 2\lambda) e^{j\lambda i \Delta x} + \lambda e^{j\lambda(i+1)\Delta x}] \quad (\text{II.48})$$

Qui peut aussi s'écrire :

$$\psi((n + 1)\Delta t) = G\psi((n)\Delta t) \quad (\text{II.49})$$

Ou :

$$G = [\lambda e^{-j\lambda\Delta x} + (1 - 2\lambda) + e^{j\lambda\Delta x}] \quad (\text{II.50})$$

Est appelé facteur d'amplification.

Pour qu'un schéma soit stable il faut que $|G| \leq 1$.

Si on applique les égalités trigonométriques suivantes :

$$2 \cos \alpha = e^{-j\alpha} + e^{j\alpha}; (1 - \cos \alpha) = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \quad (\text{II.51})$$

À l'expression de G, nous obtenons :

$$G = 1 - 2\lambda + 2\lambda \cos(\lambda\Delta t) \quad (\text{II.52})$$

$$G = 1 - 4\lambda \sin^2 \frac{\lambda\Delta t}{2} \quad (\text{II.53})$$

Enfin : $|G| \leq 1$ sera vérifier si :

$$-1 \leq 1 - 4\lambda \sin^2 \frac{\lambda\Delta x}{2} \leq 1 \quad (\text{II.54})$$

$$\lambda \sin^2 \frac{\lambda\Delta x}{2} \leq \frac{1}{2} \quad (\text{II.56})$$

Cette conditions est vérifiée si :

$$0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2} \quad (\text{II.57})$$

En conclusion nous dirons que le schéma explicite étudié précédemment est stable pour la condition (II.57).

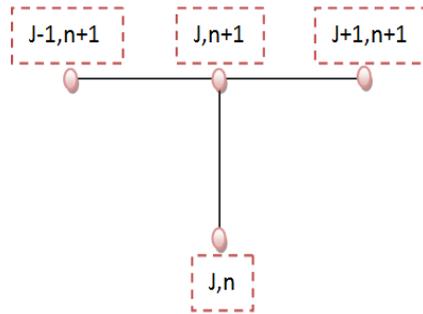
En analysant l'exemple cité précédemment nous constatons que l'algorithme est instable pour un $\Delta t=0.1$ qui correspond à $\lambda=2.5$, et que nous avons stabilisé le calcul en adoptant une valeur plus petite du pas du temps ; $\Delta t=0.0$ ($\lambda=0.25$).

Les conclusions seront :

- Pour un $\Delta x=0.2$ la valeur maximale du pas du temps pour un calcul stable sera $\Delta t=0.08$.
- Si nous voulons augmenter la précision du schéma en adoptant par exemple un $\Delta x = 0.1$, on doit aussi vérifier $\Delta t \leq 0.08$.

C'est à dire, plus la précision spatiale est grande plus le calcul sera plus long, puisque le pas du temps exigé pour la stabilité du schéma explicite sera plus petit. Du point de vue capacité de stockage en mémoire, ce schéma exige un espace double pour la distribution de la solution numérique (n et n+1).

II.4.2.2. Schéma implicite



Reprenons le problème de la conduction thermique non stationnaire et réécrivons l'équation discrète (II.40) comme suit (les termes de droite sont au temps $n+1$) [11] :

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} + \partial(\Delta t) = a \frac{U_{i-1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} + \partial(\Delta x^2) \quad (\text{II.58})$$

Après groupement et arrangement :

$$\lambda U_{i-1}^{n+1} - (1 - 2\lambda)U_i^{n+1} + \lambda U_{i+1}^{n+1} = U_i^n \quad (\text{II.59})$$

Cette équation présente trois inconnus en même temps, ce qui ne permet pas de la résoudre directement comme c'était le cas pour le schéma explicite. Cette forme de discrétisation est appelée schéma implicite. Pour trouver la solution il faut écrire l'ensemble des équations issues de l'application de (II.59) sur tous les nœuds de la même ligne et ensuite résoudre le système tout entier.

Si nous reprenons l'exemple précédent composé de six nœuds, le système s'écrira :

$$i = 2 \quad -(1 + 2\lambda)U_2^{n+1} + \lambda U_3^{n+1} = -U_2^n - \lambda U_1$$

$$i = 3 \quad \lambda U_2^{n+1} - (1 + 2\lambda)U_3^{n+1} + \lambda U_4^{n+1} = -U_3^n$$

$$i = 4 \quad \lambda U_3^{n+1} - (1 + 2\lambda)U_4^{n+1} + \lambda U_5^{n+1} = -U_4^n$$

$$i = 5 \quad \lambda U_4^{n+1} - (1 + 2\lambda)U_5^{n+1} = -U_5^n - U_6^n$$

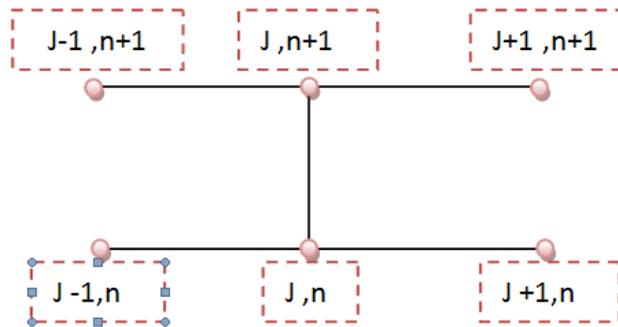
U_1 et U_6 sont connus et représentent les conditions aux limites.

On dispose maintenant d'un système de quatre équations à quatre inconnus.

$$\begin{bmatrix} -(1+2\lambda) & \lambda & 0 & 0 \\ \lambda & -(1+2\lambda) & \lambda & 0 \\ 0 & \lambda & -(1+2\lambda) & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda & -(1+2\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -U_2^* - \lambda \\ -U_3^* \\ -U_4^* \\ -U_5^* \end{bmatrix}$$

Les variables de type U_i^* représentent la solution numérique à l'itération précédente. La solution de ce système donne directement la solution de l'équation. On constate que l'adoption de n'importe quelle valeur du paramètre λ aboutit à une solution numérique stable. On conclue que le schéma implicite est inconditionnellement stable.

II.4.2.3. Schéma de Crank-Nickolson



Suivant ce schéma l'équation (II.30) [16] s'écrira de la manière suivante :

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} \equiv a \left(\frac{1}{2} \frac{U_{i-1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{1}{2} \frac{U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n}{\Delta x^2} \right) \quad (II.60)$$

Un tel schéma prend une moitié en explicite et l'autre moitié en implicite. Une façon plus généralisée de discrétiser l'équation (II.30) est :

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} \equiv a \left(\alpha \frac{U_{i-1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} + (\alpha - 1) \frac{U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n}{\Delta x^2} \right) \quad (II.61)$$

Pour $\alpha=0$ le schéma est explicite, pour $\alpha=1$ il est implicite et pour $\alpha=0.5$ il devient Crank-Nicholson.

II.4.2.4. Schéma de Duffort Frankel

C'est un schéma explicite et inconditionnellement stable [17] :

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^{n-1}}{2\Delta t} \equiv a \frac{U_{i-1}^n - U_i^{n+1} - U_i^{n-1} + U_{i+1}^n}{\Delta x^2} \quad (II.62)$$

II.4.3. Concept de consistance d'un schéma

Un schéma est dit consistant si et seulement si l'erreur de troncature tend vers zéro quand tous les pas Δx_i et Δt tendent vers zéro. En d'autres termes : plus on raffine le maillage de calcul plus le résultat doit être précis. Le schéma implicite et explicite introduits précédemment sont consistants puisque l'erreur de troncature $(\Delta t, \Delta x^2)$ tend vers zéro quand Δx et Δt tendent vers zéro.

Examinons le schéma de Duffort Frankel de l'équation (II.62).

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^{n-1}}{2\Delta t} = \frac{a}{\Delta x^2} (U_{i+1}^n - U_i^{n+1} - U_i^{n-1} + U_{i-1}^n)$$

L'erreur de troncature a la forme suivante :

$$\frac{\partial}{12} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} \Big|_{n,j} (\Delta x^2) - \alpha \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \Big|_{n,j} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 U}{\partial t^3} \Big|_{n,j} (\Delta t^2) + \dots \quad (\text{II.63})$$

Tout va pour le mieux si $\lim \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right) = 0$ quand $\Delta t \rightarrow 0$ et $\Delta x \rightarrow 0$

Par contre si Δx et Δt tendent vers zéro avec le même taux telle que $\frac{\Delta t}{\Delta x} = \beta$ alors ce schéma ne sera plus consistant.

III.1. Introduction

Les procédés de traitement thermique des surfaces sont d'une grande importance dans l'industrie. On citera, parmi de nombreux exemples, le refroidissement d'une tôle comme laminage à chaud, ou la trempe de verre par jets d'air plan. De part ces propriétés cinématiques, le jet d'air plan impactant, augmente les transferts thermiques sur la zone d'impact. Ils sont donc naturellement exploités afin d'améliorer l'efficacité énergétique du traitement thermique.

Toutefois, lorsque l'on étudie la dynamique du refroidissement (ou réchauffement) dans le matériau, il est nécessaire d'introduire la notion du couplage des transferts thermiques entre le solide et le fluide.

Ce chapitre étudie une simulation d'un refroidissement d'une plaque hautement chauffée par un jet d'eau, avec résolution de l'équation de chaleur par la méthode des différences finies à deux dimensions et dans deux cas.

III.2. Cas stationnaire

En considère une tôle en acier doux hautement chauffée à 500 °C, qu'on refroidira par jet d'eau à 23 °C.

On donne en plus les caractéristiques suivantes :

Largeur (épaisseur suivant z) de 30 cm,

Longueur (suivant x) de 50 cm,

Hauteur (suivant y) de 50 cm,

La chaleur spécifique : $c_p = 0.56 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K})$,

La masse volumique : $\rho = 7900 \text{ kg}/\text{m}^3$,

Le coefficient de conductivité thermique : $\lambda = 16 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$,

La diffusion thermique $a = 4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$,

Le contact de l'eau avec la tôle surchauffée crée une 'ébullition, ayant un coefficient de convection $h = 1500 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$.

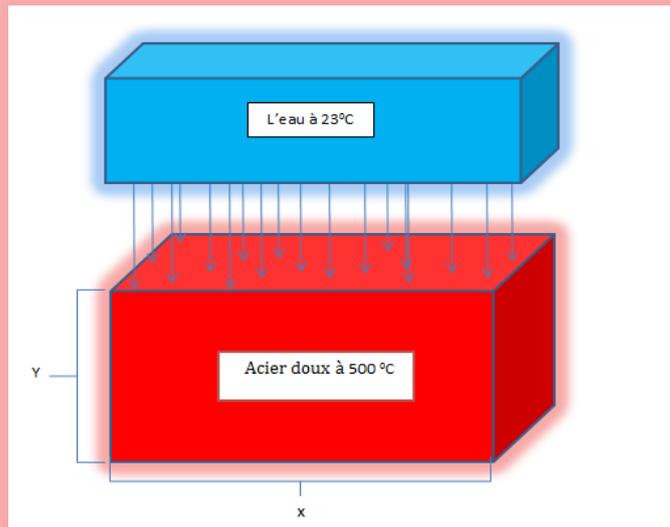


Figure III.1 : Tôle surchauffée et refroidie en 3D

Lorsque les conditions expérimentales conduisent à des isothermes verticales et parallèles, les flux thermiques selon z sont nulles, le problème relève d'un traitement bidimensionnelle et l'équation de la chaleur se réduit à :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \left(\frac{\rho c}{\lambda} \right) \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{III.1})$$

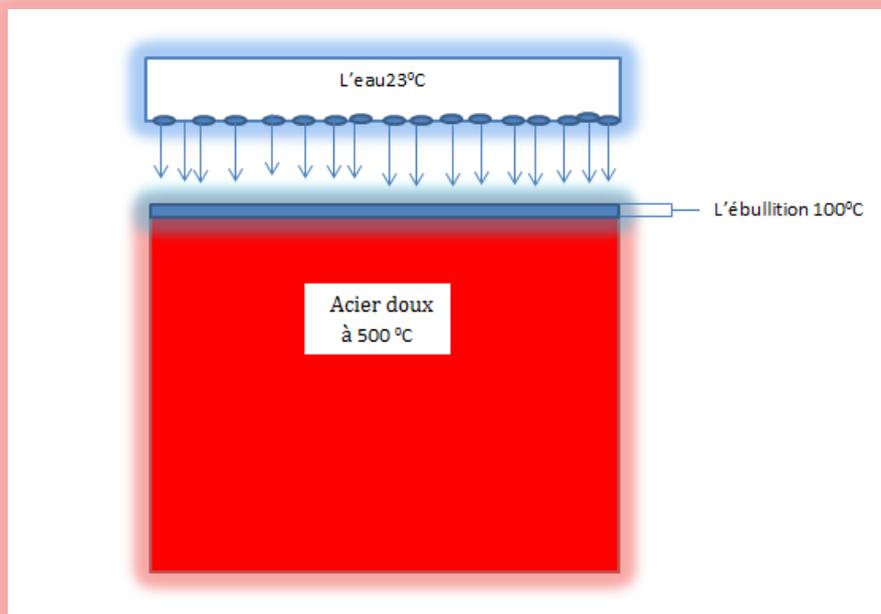


Figure III.2 : Plaque à deux dimensions (2D)

III.2.1. Solution par la méthode des différence finie

En régime permanent, la température $T(x,y)$ en tous point (x,y) de la plaque vérifie l'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{III.2})$$

III.2.2. Domaine

Le domaine de la plaque est supposé de géométrie carré de dimensions $a = b$ comme le présente la figure suivante :

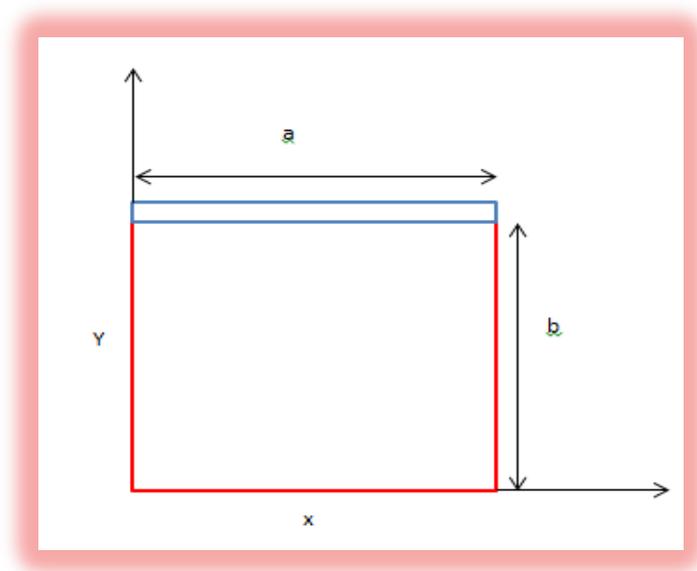


Figure III.3 : Le domaine de plaque à 2 dimensions

III.2.3. Conditions aux limites

Condition à la limite de type **DIRICHLET** :

$$T_{0,y} = 500^\circ\text{C}$$

$$T_{x,0} = 500^\circ\text{C}$$

$$T_{a,y} = 500^\circ\text{C}$$

Condition à la limite de type **CAUCHY** :

Dans les nœuds de frontière $T_{x,b}$, on a la condition suivante [21] :

$$-\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y>b} = h(T - T_{ext}) \quad (III.3)$$

III.2.4. Développement en série de Taylor

La fonction $T(x', y)$ autour de (x, y) [12] où $x' = x \pm \Delta x$ s'écrit :

$$T_{(x+\Delta x, y)} = T_{(x, y)} + \frac{\partial T}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \frac{\Delta x^2}{2!} + R \quad (III.4)$$

$$T_{(x-\Delta x, y)} = T_{(x, y)} - \frac{\partial T}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \frac{\Delta x^2}{2!} + R \quad (III.5)$$

En additionnant ces deux relations et en divisant par $(\Delta x)^2$, on trouve :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{(x+\Delta x, y)} - 2T_{(x, y)} + T_{(x-\Delta x, y)}}{(\Delta x)^2} + \phi(\Delta x)^2 \quad (III.6)$$

En opérant de la même manière pour la variable y , on trouve :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{T_{(x, y+\Delta y)} - 2T_{(x, y)} + T_{(x, y-\Delta y)}}{(\Delta y)^2} + \phi(\Delta y)^2 \quad (III.7)$$

Dans notre cas, on a $\Delta x = \Delta y = p$, donc le Laplacien bidimensionnel s'écrit :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{T_{(x+\Delta x, y)} - 2T_{(x, y)} + T_{(x-\Delta x, y)}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{(x, y+\Delta y)} - 2T_{(x, y)} + T_{(x, y-\Delta y)}}{(\Delta y)^2} + \phi(\Delta x)^2 + \phi(\Delta y)^2 \quad (III.8)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{T_{(x+\Delta x, y)} + T_{(x-\Delta x, y)} - 4T_{(x, y)} + T_{(x, y+\Delta y)} + T_{(x, y-\Delta y)}}{p^2} + 2\phi p^2 \quad (III.9)$$

- **Pour les nœuds fictifs**

Le schéma aux différences centrées s'obtient en soustrayant l'équation (III.4) de l'équation (III.5) :

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{T_{(x, y+\Delta y)} - T_{(x, y-\Delta y)}}{2\Delta y} + \phi(\Delta y)^2 \quad (III.10)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{T_{(x, y+\Delta y)} - T_{(x, y-\Delta y)}}{2p} + \phi p^2 \quad (III.11)$$

III.2.5. Maillage

On considère que $\Delta x = \Delta y$.

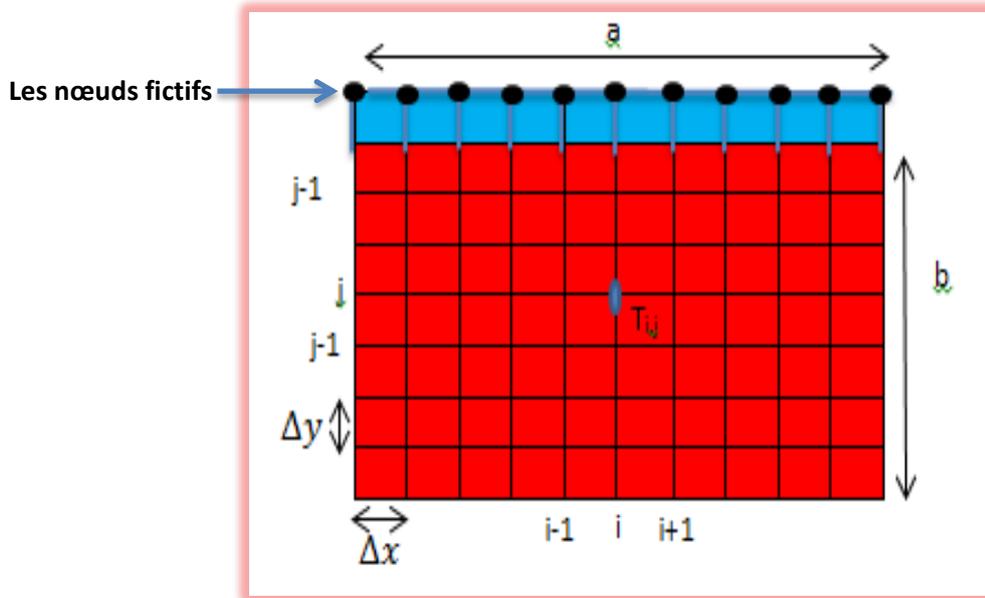


Figure III.4 : Maillage du domaine rectangulaire régulier

On pose :

$$\begin{cases} x_i = i\Delta x = i.p \rightarrow 1 \leq i \leq n \\ y_j = j\Delta y = j.p \rightarrow 1 \leq j \leq m \end{cases}$$

$$n = \frac{a}{\Delta x} + 1 = \frac{50}{1} + 1 = 51$$

$$m = \frac{b}{\Delta y} + 1 = \frac{50}{1} + 1 = 51$$

III.2.6. Formulation

Pour simplifier la notation, l'expression précédente de l'équation (III.9) s'écrit sous la forme :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{T_{i+1,j} + T_{i-1,j} - 4T_{i,j} + T_{i,j-1} + T_{i,j+1}}{p^2} + 2\phi p^2 \quad (\text{III.12})$$

Cette équation peut être représentée par la forme moléculaire suivante :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{p^2} \left\{ \begin{array}{c} \textcircled{1} \\ \textcircled{1} - \textcircled{-4} - \textcircled{1} \\ \textcircled{1} \end{array} \right\} + 2\phi p^2$$

L'équation (III.11) s'écrit sous la forme :

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{T_{(i,j+1)} - T_{(i,j-1)}}{2p} + \phi p^2 \quad (III.13)$$

$T_{(i,j+1)} \Rightarrow$ Nœud fictif.

$$-\lambda \left(\frac{T_{(i,j+1)} - T_{(i,j-1)}}{2p} \right) + \phi p^2 = h (T_{(i,j)} - T_{ext})$$

$$T_{(i,j+1)} = T_{(i,j-1)} - \frac{2ph}{\lambda} (T_{(i,j)} - T_{ext}) - \phi p^2 2p \quad (III.14)$$

Dans les nœuds de frontière : on applique l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{T_{(i-1,j)} + T_{(i+1,j)} - 4T_{(i,j)} + 2T_{(i,j-1)} - \frac{2ph}{\lambda} (T_{(i,j)} - T_{ext})}{p^2} - \frac{2\phi p^2}{p} + 2\phi p^2 \quad (III.15)$$

En prenant des valeurs pour i, j à ces équations on trouve :

$$\left\{ \begin{array}{l} i = 1, j = 1 \rightarrow \frac{T_{2,2} + T_{0,1} - 4T_{1,1} + T_{1,0} + T_{1,2}}{p^2} + 2\phi p^2 = 0 \\ i = 2, j = 1 \rightarrow \frac{T_{3,1} + T_{1,1} - 4T_{2,1} + T_{1,0} + T_{2,2}}{p^2} + 2\phi p^2 = 0 \\ \vdots \\ i = 50, j = 1 \rightarrow \frac{T_{51,1} + T_{49,1} - 4T_{50,1} + T_{50,0} + T_{50,2}}{p^2} + 2\phi p^2 = 0 \\ i = 1, j = 2 \rightarrow \frac{T_{2,2} + T_{0,2} - 4T_{1,2} + T_{1,1} + T_{1,3}}{p^2} + 2\phi p^2 = 0 \\ \vdots \\ i = 1, j = 50 \rightarrow \frac{T_{0,50} + T_{250} - 4T_{1,50} + 2T_{1,49} - \frac{2ph}{\lambda} (T_{(1,50)} - T_{ext})}{p^2} - \frac{2\phi p^2}{p} + \phi p^2 = 0 \\ i = 2, j = 50 \rightarrow \frac{T_{1,5} + T_{3,50} - 4T_{2,50} + 2T_{2,49} - \frac{2ph}{\lambda} (T_{(2,50)} - T_{ext})}{p^2} - \frac{2\phi p^2}{p} + \phi p^2 = 0 \\ \vdots \\ i = 50, j = 50 \rightarrow \frac{T_{49,50} + T_{51,50} - 4T_{50,50} + 2T_{50,49} - \frac{2ph}{\lambda} (T_{(50,50)} - T_{ext})}{p^2} - \frac{2\phi p^2}{p} + \phi p^2 = 0 \end{array} \right.$$

$\emptyset p \rightarrow$ est une quantité qui tend vers 0 ; Donc on trouve 50 équations sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} i = 1, j = 1 \rightarrow T_{2,2} - 4T_{1,1} + T_{1,2} = -1000 \\ i = 2, j = 1 \rightarrow T_{3,1} + T_{1,1} - 4T_{2,1} + T_{2,2} = -500 \\ \vdots \\ i = 50, j = 1 \rightarrow T_{51,1} + T_{49,1} - 4T_{50,1} + T_{50,2} = -500 \\ i = 1, j = 2 \rightarrow T_{2,2} - 4T_{1,2} + T_{1,1} + T_{1,3} = -500 \\ \vdots \\ i = 1, j = 50 \rightarrow T_{2,50} + \left(4 - \frac{2ph}{\lambda}\right)T_{1,50} + 2T_{1,49} = -\frac{2ph}{\lambda}T_{ext} - 500 \\ i = 2, j = 50 \rightarrow T_{1,50} + T_{3,50} + \left(4 - \frac{2ph}{\lambda}\right)T_{2,50} + 2T_{2,49} = -\frac{2ph}{\lambda}T_{ext} \\ \vdots \\ i = 50, j = 50 \rightarrow T_{49,50} + \left(4 - \frac{2ph}{\lambda}\right)T_{50,50} + 2T_{5,49} = -\frac{2ph}{\lambda}T_{ext} - 500 \end{array} \right.$$

D'après ces équations on trouve un système matriciel de la forme $[A] \times [B] = [C]$:

$$\left(\begin{array}{cccccccc} -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & \dots & 2 & 1 & 1 & -\left(4 + \frac{2ph}{\lambda}\right) & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 2 & 1 & -\left(4 + \frac{2ph}{\lambda}\right) & \dots & \dots & \dots \end{array} \right) \begin{pmatrix} T_{1,1} \\ T_{2,1} \\ T_{3,1} \\ T_{4,1} \\ \vdots \\ T_{20,50} \\ \vdots \\ T_{50,50} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1000 \\ -500 \\ -500 \\ -500 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ -\frac{2ph}{\lambda}T_{ext} \\ \vdots \\ -\frac{2ph}{\lambda}T_{ext} - 500 \end{pmatrix}$$

On a donc un système de 50 équations à 50 inconnues, ce système (ou l'équation de Laplace discrétisée) peut être résolu(e) par la méthode de Gauss-Seidel (méthode explicite) et la méthode SOR (successive over-relaxation) ou méthode de sur-relaxation est obtenue à partir de la méthode de Gausse-Seidel [18]. Celle-ci ne converge pas rapidement, la méthode SOR est utilisée pour accélérer la convergence.

La procédure itérative [19] est écrite comme suit :

$$T_i^{(k)} = \omega \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=0}^{i-1} a_{ij} T_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^m a_{ij} T_j^{(k)} \right) + (1 - \omega) T_i^{(k-1)} \quad i = 1, m \quad (III.16)$$

ω =correspond à la méthode de Gausse-Seidel,

SOR= correspond à la méthode de sur-relaxation,

Programmation de la méthode de résolution de problèmes elliptiques

La méthode SOR correspond parfaitement bien à la programmation de l'équation puisque le terme central de la molécule est justement le terme se trouvant sur la diagonale du système d'équations algébriques. Il suffit donc de calculer T_{ij} dans l'équation :

$$T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j-1} + T_{i,j+1} - 4T_{i,j} = 0$$

Sauf la dernière sous forme

$$T_{i-1,j} + T_{i+1,j} + 2 * T_{i,j-1} + \frac{2ph}{\lambda} T_{i,j+1} \left(4 + \frac{2ph}{\lambda} \right) T_{i,j} = 0$$

Puis la méthode de SOR où l'équation donne :

$$T_{i,j} = 1/4(T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j-1} + T_{i,j+1})$$

$$T_{i,j} = 1/\left(4 + \frac{2ph}{\lambda} \right) (T_{i-1,j} + T_{i+1,j} + 2 * T_{i,j-1} + \frac{2ph}{\lambda} T_{i,j+1})$$

La méthode SOR donne

$$T_{i,j} = \frac{1}{4} * \omega + (T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j-1} + T_{i,j+1}) + (\omega * T_{i,j}) \quad \text{(III.17)}$$

$$T_{i,j} = \left(\omega * \frac{1}{\left(4 + \frac{2ph}{\lambda} \right)} \right) * (T_{i-1,j} + T_{i+1,j} + 2 * T_{i,j-1} + \frac{2ph}{\lambda} T_{i,j+1}) + (\omega * T_{i,j}) \quad \text{(III.18)}$$

Identification des symboles de programme :

$$g = \frac{2ph}{\lambda}; \text{coh} = \frac{1}{\left(4 + \frac{2ph}{\lambda} \right)}; \text{Text} = \text{Température extérieure};$$

$$k = 16 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K}) = \lambda; \text{Lx} = \text{Longueur de 50 cm}, \text{Ly} = \text{Hauteur de 50 cm}.$$

III.2.7. Programme en FORTRAN (Cas stationnaire)

```

c *****
c ***
c ** Programme de calcul de la température d'un problème bidimensionnel stationnaire **
c *** avec les conditions aux limites de couchy et direchly ***
c **
c *****
c **
c *** Réalisé par ACHOURI Billel 03/06/2012 ***
c **
c *** Dirigé par : Pr MZAD Hocine ***
c **
c *** Master Energétique et Environnement ***
c **
c *** Département de Génie Mécanique ***
c **
c *** Université BADJI MOKHTAR DE ANNABA / ALGERIE ***
c **
c *****
implicit real (8) (a-h,o-z)
common/maillage/deltax,deltay,m,n
common/donnee/eps,w,Text,g,coh
common/teper/t(101,101)
open (12,file='Tx',status='new')
open (13,file='Ty',status='new')
data w,eps,Lx,Ly,Text,h,k/1.3,1.d-3,50.,50.,100.0,1500.,16./
deltax=1.
deltay=1.
g=(2*deltax*1.e-2*h)/k
coh=1/(4*g)
n=int(Lx/deltax)+1
m=int(Ly/deltay)+1
c Initialisation
Tinit=500.
do j=2,m-1
do i=2,n-1
t(i,j)=Tini
end do
end do
c Conditions aux limites
c 1) Conditions aux limites de ébullition
do i=1,n
t(i,m)=Text
end do
c 2) Conditions aux limites de Dirichlet
c Coté gauche
do j=2,m-1
t(1,j)=500.
end do
c Coté bas
do i=1,n
t(i,1)=500.
write(*,*) 't(',i,1,')=',t(i,1)
end do
c Coté droit

```

```

do j=2,m-1
  t(n,j)=500.
end do
c Appel du sous-programme
call calcul_temp
c Résultats
do i=1,n
write (12,10) i,(T(i,j),j=1,m)
end do
do j=1,m
write (13,11) j,(T(i,j),i=1,n)
end do
10 format (i3,51(1x,f10.3))
11 format (i3,51(1x,f10.3))

close (unit=10)
close (unit=12)
close (unit=13)

stop
end

c *****
c *****
c ***
c *** Sous programme de calcul de la température par la méthode de Gauss-seidel améliorée *
c *** avec la méthode de sur-relaxation (sor) *
c *** *
c *****

subroutine calcul_temp

implicit real (8) (a-h,o-z)
common/maillage/deltax,deltay,m,n
common/donnee/eps,w,Text,g,coh
common/teper/t(101,101)

w=1.3
sor=1-w
write(*,*) 'sor=',sor
dmax=100.
it=1
write(*,*) 'itération n',it

do while (dmax.gt.eps.and.it.lt.1000)

write(*,*) 'dmax=',dmax,'eps=',eps,'it=',it

dmax=0
do j=2,m-1
do i=2,n-1.

if((j.ge.2).and.(j.le.(m-2)))then
som=t(i,j)*sor+w*0.25*(t(i-1,j)+t(i+1,j)+t(i,j-1)+t(i,j+1))
endif
c condition aux limites de cauchy
if(j.eq.m-1)then
som=t(i,j)*sor+w*0.013*(t(i+1,j)+t(i-1,j)+2*t(i,j-1)+g*t(i,j+1))
endif
dt=abs(som-t(i,j))/som
if(dt.gt.dmax) dmax=dt
t(i,j)=som

c print *,'som=',som,'t(',i,j,')=',t(i,j),'dt=',dt,'dmax=',dmax

end do

end do

it=it+1

end do

return

end subroutine

```

Exécution du programme

L'exécution du programme Fortran affiche : dmax, eps et itération comme montré dans la figure suivante :

```

"C:\Program Files\DevStudio\MyProjects\Debug\couchy direchly.exe"
dmax= 1.339385464657235E-003 eps= 1.000000000000000E-003 it= 101
dmax= 1.321674588248496E-003 eps= 1.000000000000000E-003 it= 102
dmax= 1.304248876068846E-003 eps= 1.000000000000000E-003 it= 103
dmax= 1.287103533471224E-003 eps= 1.000000000000000E-003 it= 104
dmax= 1.270233808557643E-003 eps= 1.000000000000000E-003 it= 105
dmax= 1.253634995922204E-003 eps= 1.000000000000000E-003 it= 106
dmax= 1.237302439941412E-003 eps= 1.000000000000000E-003 it= 107
dmax= 1.221231537635885E-003 eps= 1.000000000000000E-003 it= 108
dmax= 1.205417741155411E-003 eps= 1.000000000000000E-003 it= 109
dmax= 1.189856559910133E-003 eps= 1.000000000000000E-003 it= 110
dmax= 1.174543562391630E-003 eps= 1.000000000000000E-003 it= 111
dmax= 1.159474377708991E-003 eps= 1.000000000000000E-003 it= 112
dmax= 1.144644696849846E-003 eps= 1.000000000000000E-003 it= 113
dmax= 1.130528172629993E-003 eps= 1.000000000000000E-003 it= 114
dmax= 1.116795341622646E-003 eps= 1.000000000000000E-003 it= 115
dmax= 1.103262325806439E-003 eps= 1.000000000000000E-003 it= 116
dmax= 1.089926166524737E-003 eps= 1.000000000000000E-003 it= 117
dmax= 1.076783922692223E-003 eps= 1.000000000000000E-003 it= 118
dmax= 1.063832673221383E-003 eps= 1.000000000000000E-003 it= 119
dmax= 1.051069519200573E-003 eps= 1.000000000000000E-003 it= 120
dmax= 1.038491585837659E-003 eps= 1.000000000000000E-003 it= 121
dmax= 1.026096024199969E-003 eps= 1.000000000000000E-003 it= 122
dmax= 1.013880012752513E-003 eps= 1.000000000000000E-003 it= 123
dmax= 1.001840758726738E-003 eps= 1.000000000000000E-003 it= 124
Press any key to continue
    
```

Figure III.5 : Exécution de programme

- Le programme en Fortran donne les résultats suivants :

1	500.000	500.000	500.000	500.000	500.000	500.000	500.000	500.000	500.000	500.000	500.000	100.000
2	500.000	499.998	499.997	499.994	499.991	499.988	463.291	450.849	428.587	382.152	266.686	100.000
3	500.000	499.997	499.993	499.988	499.982	499.975	431.163	411.501	381.337	333.334	259.350	100.000
4	500.000	499.995	499.989	499.982	499.973	499.962	405.153	382.631	351.915	310.490	258.566	100.000
5	500.000	499.993	499.985	499.976	499.964	499.948	384.857	361.925	333.187	298.142	258.224	100.000
6	500.000	499.991	499.981	499.969	499.954	499.934	369.218	346.092	320.744	290.664	258.021	100.000
7	500.000	499.989	499.977	499.962	499.944	499.920	357.161	336.038	312.111	285.745	257.888	100.000
8	500.000	499.987	499.973	499.956	499.934	499.906	347.999	327.844	305.891	282.312	257.795	100.000
9	500.000	499.985	499.969	499.949	499.924	499.892	340.462	321.595	301.270	279.812	257.728	100.000
10	500.000	499.984	499.965	499.942	499.914	499.879	334.653	316.749	297.750	277.933	257.677	100.000
11	500.000	499.982	499.961	499.936	499.905	499.865	330.010	312.935	295.017	276.486	257.638	100.000
12	500.000	499.980	499.957	499.929	499.895	499.852	326.268	309.897	292.861	275.353	257.608	100.000
13	500.000	499.978	499.953	499.923	499.886	499.840	323.231	307.453	291.140	274.453	257.583	100.000
14	500.000	499.976	499.950	499.917	499.878	499.828	320.749	305.472	289.752	273.729	257.564	100.000
15	500.000	499.975	499.946	499.912	499.869	499.816	318.714	303.856	288.625	273.143	257.548	100.000
16	500.000	499.973	499.943	499.907	499.862	499.805	317.039	302.532	287.705	272.666	257.535	100.000
17	500.000	499.972	499.940	499.902	499.854	499.795	315.658	301.445	286.951	272.276	257.525	100.000
18	500.000	499.970	499.937	499.897	499.848	499.786	314.519	300.551	286.333	271.956	257.516	100.000
19	500.000	499.969	499.934	499.893	499.841	499.777	313.584	299.818	285.828	271.695	257.509	100.000
20	500.000	499.968	499.932	499.889	499.835	499.769	312.819	299.221	285.416	271.483	257.504	100.000
21	500.000	499.967	499.929	499.885	499.830	499.761	312.199	298.738	285.084	271.312	257.499	100.000
22	500.000	499.966	499.927	499.882	499.825	499.755	311.707	298.355	284.820	271.176	257.495	100.000
23	500.000	499.965	499.926	499.879	499.821	499.749	311.327	298.060	284.618	271.072	257.492	100.000
24	500.000	499.964	499.924	499.876	499.817	499.744	311.049	297.843	284.470	270.995	257.490	100.000
25	500.000	499.964	499.923	499.874	499.814	499.739	310.864	297.701	284.372	270.945	257.489	100.000
26	500.000	499.963	499.921	499.872	499.811	499.736	310.771	297.629	284.323	270.920	257.488	100.000
27	500.000	499.963	499.921	499.871	499.809	499.733	310.766	297.626	284.322	270.920	257.488	100.000
28	500.000	499.962	499.920	499.869	499.808	499.731	310.852	297.694	284.369	270.944	257.489	100.000
29	500.000	499.962	499.919	499.869	499.807	499.730	311.035	297.837	284.468	270.995	257.490	100.000
30	500.000	499.962	499.919	499.868	499.806	499.729	311.321	298.061	284.622	271.075	257.492	100.000
31	500.000	499.962	499.919	499.868	499.807	499.730	311.723	298.375	284.839	271.187	257.495	100.000
32	500.000	499.962	499.919	499.869	499.807	499.731	312.255	298.792	285.127	271.336	257.499	100.000
33	500.000	499.962	499.920	499.870	499.809	499.733	312.938	299.328	285.497	271.527	257.504	100.000
34	500.000	499.963	499.921	499.871	499.811	499.736	313.798	300.003	285.963	271.768	257.511	100.000
35	500.000	499.963	499.922	499.873	499.814	499.741	314.867	300.843	286.545	272.070	257.519	100.000
36	500.000	499.964	499.924	499.876	499.818	499.746	316.187	301.884	287.267	272.444	257.529	100.000
37	500.000	499.965	499.926	499.879	499.823	499.753	317.810	303.168	288.160	272.907	257.541	100.000
38	500.000	499.966	499.928	499.883	499.828	499.761	319.803	304.752	289.265	273.482	257.556	100.000
39	500.000	499.967	499.931	499.887	499.835	499.770	322.252	306.708	290.637	274.196	257.575	100.000
40	500.000	499.969	499.934	499.893	499.843	499.781	325.270	309.136	292.347	275.091	257.599	100.000
41	500.000	499.970	499.937	499.898	499.851	499.793	329.004	312.167	294.498	276.221	257.629	100.000
42	500.000	499.972	499.941	499.905	499.861	499.807	333.653	315.984	297.232	277.667	257.668	100.000
43	500.000	499.974	499.946	499.912	499.872	499.822	339.481	320.842	300.757	279.548	257.717	100.000
44	500.000	499.977	499.951	499.921	499.884	499.839	346.851	327.111	305.388	282.051	257.784	100.000
45	500.000	499.979	499.956	499.930	499.897	499.858	356.258	335.332	311.617	285.484	257.875	100.000
46	500.000	499.982	499.962	499.939	499.912	499.878	368.376	346.314	320.253	290.392	258.005	100.000
47	500.000	499.985	499.969	499.950	499.927	499.899	384.090	361.277	332.678	297.830	258.202	100.000
48	500.000	499.989	499.976	499.961	499.944	499.922	404.482	382.011	351.346	310.048	258.524	100.000
49	500.000	499.992	499.984	499.974	499.961	499.947	430.629	410.928	380.645	332.494	259.116	100.000
50	500.000	499.996	499.992	499.986	499.980	499.973	462.970	450.426	427.809	380.168	260.371	100.000
51	500.000	500.000	500.000	500.000	500.000	500.000	500.000	500.000	500.000	500.000	500.000	100.000

III.2.8. Représentation des résultats

A l'aide du programme Excel on convertit les résultats vers les graphes suivants :

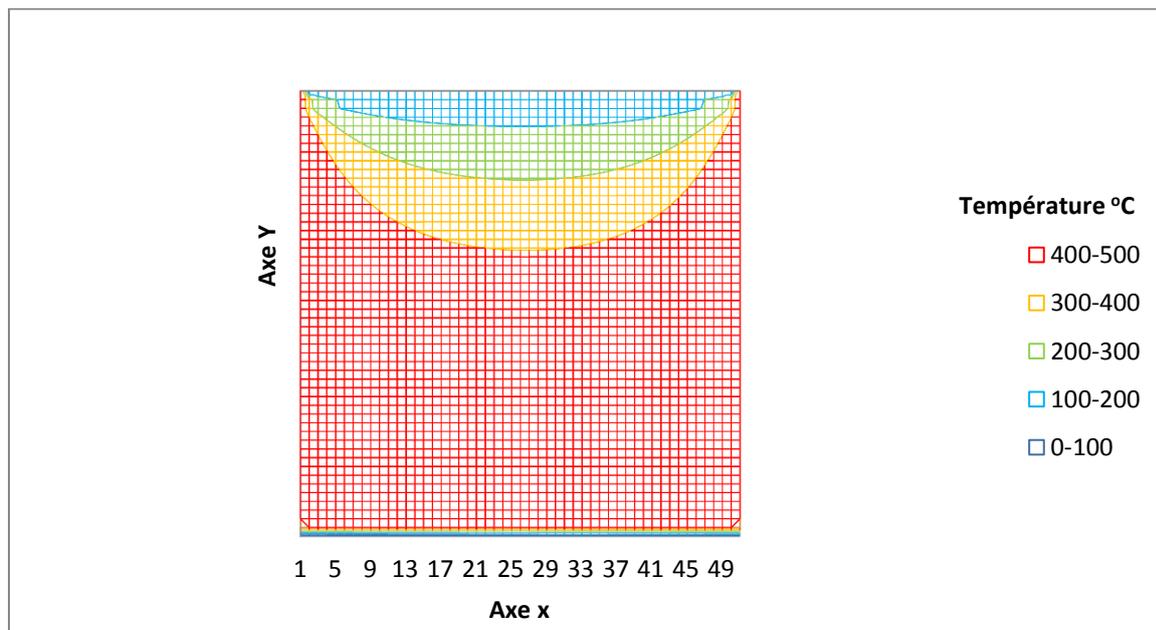


Figure III.6 : Représentation de la température sur la plaque

III.3. Cas du régime non stationnaire 2 D

On prend le même cas précédent, le problème relève d'un traitement bidimensionnel et l'équation de la chaleur se réduit à :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \left(\frac{\rho c_p}{\lambda} \right) \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{III.19})$$

Résolution de l'équation par différences finies et la méthode explicite comme suite :

III.3.1. Domaine

Le domaine de la plaque est supposé carré où $a = b$. La plaque est montée suivant un axe du temps comme le présente la figure suivante III.8.

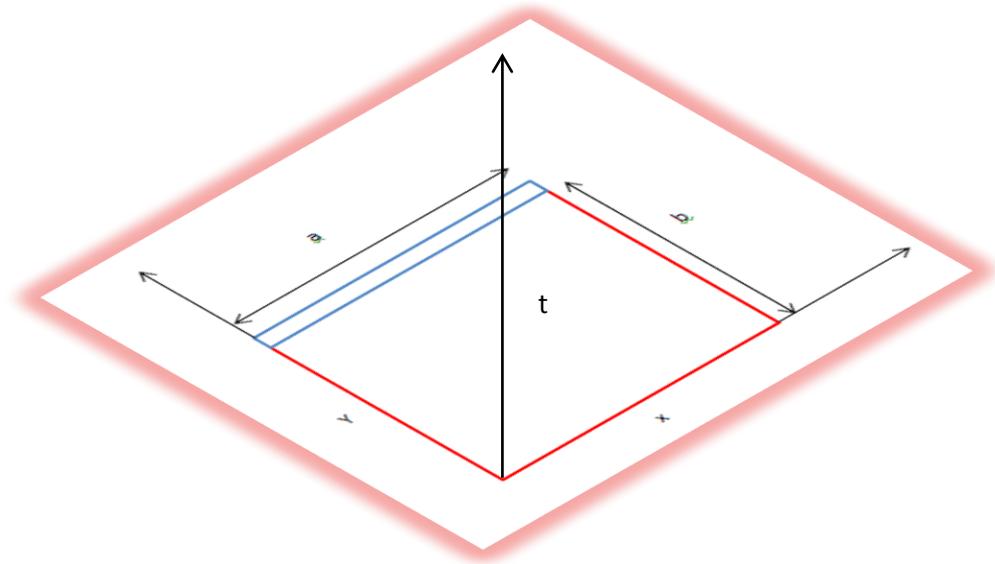


Figure III.7 : Représentation du domaine en espace temporel

❖ Les conditions initiales :

$$T_{x,y}^0 = T_{xx} + T_{yy}$$

❖ Les conditions aux limites :

Condition à la limite de type Boundary :

$$T_{0,y}^k = 500^\circ\text{C}$$

$$T_{0,x}^k = 500^\circ\text{C}$$

$$T_{a,y}^k = 500^\circ\text{C}$$

Condition à la limite de type CAUCHY :

Dans les nœuds de $T_{x,b}^k$, on a la condition suivante :

$$-\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y>b}^k = h(T^k - T_{ext})$$

$T(t, x, y) \equiv T(l \Delta t, i \Delta x, j \Delta y)$ sera représentée par $T_{i,j}^k$

III.3.2. Maillage

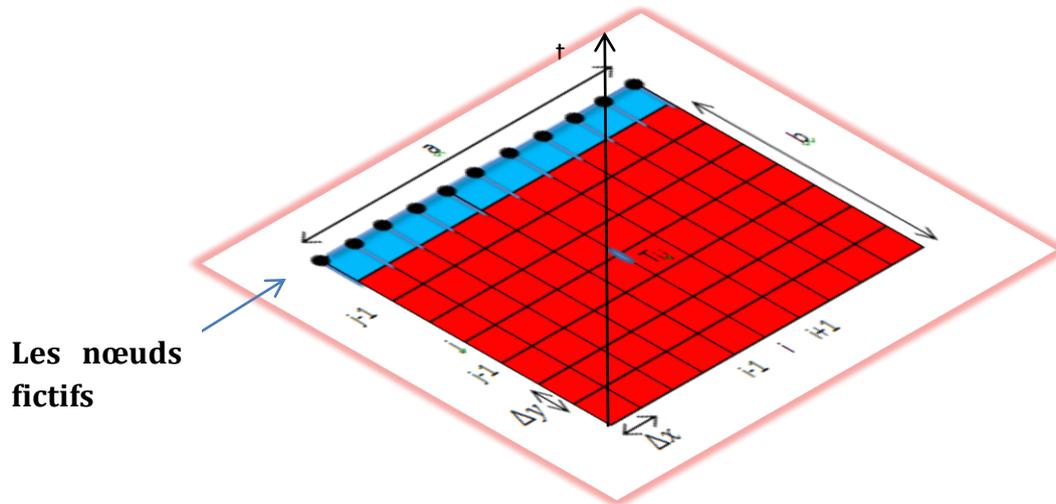


Figure III.8: représentation du maillage en 3D

On pose :

$$\begin{cases} x_i = i\Delta x = i.p \rightarrow 1 \leq i \leq l \\ y_j = j\Delta y = j.p \rightarrow 1 \leq j \leq n \\ t_l = l\Delta t \rightarrow 1 \leq l \leq k \end{cases}$$

$$m = \frac{a}{\Delta x} + 1 = \frac{50}{1} + 1 = 51$$

$$n = \frac{b}{\Delta y} + 1 = \frac{50}{1} + 1 = 51$$

Le choix de (Δt) : $\Delta s = \Delta x \times \Delta y$;

$$\Delta t \leq \frac{\Delta s}{2a}$$

$$\frac{\Delta s}{2a} = 1.25 \text{ s} ; \text{ Donc peut mettre } \Delta t = 1 \text{ s}$$

$$k = \frac{\text{time}}{\Delta t} + 1 = \frac{50}{1} + 1 = 51$$

III.3.3. Schéma explicite

Le schéma est appelé explicite parce que nous utilisons la valeur recherchée $T_{i,j}^{k+1}$ à l'état du temps actuel $k + 1$

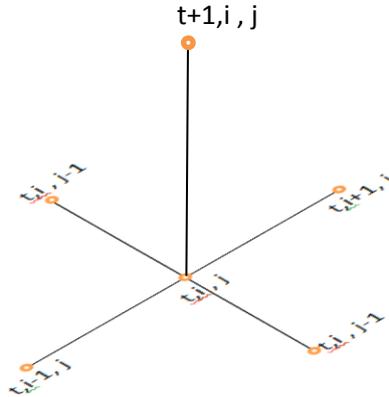


Figure III.9: Représentation des nœuds

L'équation précédente sera approximée [20] par le schéma suivant :

$$\frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta t} = a \left(\frac{T_{i-1,j}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i+1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j-1}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i,j+1}^n}{\Delta y^2} \right) \quad (\text{III.20})$$

On pose que A est critère de stabilité ; $A = a \frac{\Delta t}{\Delta x \times \Delta y}$

- Pour les nœuds intermédiaires :

$$T_{i,j}^{k+1} = T_{i,j}^k + A(T_{i+1,j}^k + T_{i-1,j}^k - 4T_{i,j}^k + T_{i,j+1}^k + T_{i,j-1}^k) \quad (\text{III.21})$$

- Pour les nœuds de frontière :

$$T_{i,j+1}^k = T_{i,j-1}^k - \frac{2ph}{\lambda} (T_{i,j}^k - T_{ext}) \quad (\text{III.22})$$

On ajoute (III.22) dans (III.21) en trouve :

$$T_{i,j}^{k+1} = T_{i,j}^k + A(T_{i-1,j}^k + T_{i+1,j}^k - \left(4 + \frac{2ph}{\lambda}\right) T_{i,j}^k + 2T_{i,j-1}^k - \frac{2ph}{\lambda} T_{ext}) \quad (\text{III.23})$$

III.3.4. Programme en FORTRAN (Cas non stationnaire)

```

c *****
c **
c ***      Programme de calcul de la température d'un problème bidimensionnel      ***
c ***      stationnaire et instationnaire                                          ***
c ***
c ***      Txx+Tyy=a*Ttt
c ***      (a=ro*cp/Lamda)
c **
c *****
c **
c ***      Réalisé par ACHOURI Billel 03/06/2012
c ***
c ***      Dirigé par : Pr MZAD Hocine
c ***
c ***      Master Energétique et Environnement
c ***
c ***      Département de Génie Mécanique
c ***
c ***      Université BADJI MOKHTAR DE ANNABA / ALGERIE
c ***
c *****
c **
c *****      Programme Principal      *****
c **
c *****
Implicit Real (8) (a-h,o-z)

Common/maillage/deltat,deltax,deltay,k,m,n
Common/donnee/eps,w,Text,r
Common/teper/T(101,101,101)

Real*4 Lx,Ly
Open (10,file='1T(I,x,y).dat',status='old')
Open (20,file='2T(A,x,y).dat',status='old')
Open (30,file='3T(0,x,y).dat',status='old')
Open (40,file='4T(t,x,y).dat',status='old')

Data Lx,Ly,time/50.,50.,50./
Data Text,Tinit,a/100.,500.,3.9E-6/
write(*,*) 'Lx=',Lx,'Ly=',Ly,'time=',time
write(*,*) 'Text=',Text,'Tinit=',Tinit,'a=',a
pause

deltat=1.
deltax=1.
deltay=1.

r=a*deltat/(deltax*1.E-2)**2
write(*,*)'criter de stabilite',r
pause

k=int(time/deltat)+1
m=int(Lx/deltax)+1
n=int(Ly/deltay)+1

c *****      Initialisation      *****
do l=0,k
  do j=1,n
    do i=1,m
      if (l.eq.0) then
        T(0,i,j)=Tinit
      end if
    end do
  end do
end do

```

```
        end do
    end do

    do i=1,m
    end do

10  format (i3.52(1x.f10.3))

c *****
c ***** Conditions aux limites *****
c *****

c **** 1) Conditions aux limites d'ébullition
c *****
    do l=0,k
        do i=1,m
            if (l.eq.0) then
                T(0,i,n)=Text
            end if

            if((l.ge.1).and.(l.le.k))then
                T(l,i,n)=Text
            end if

        end do
    end do

c **** 2) Conditions aux limites de Dirichlet
c *****

c ***** 1. Coté gauche *****
    do l=0,k
        do j=2,n-1
            if (l.eq.0) then
                T(0,l,j)=500.
            end if

            if((l.ge.1).and.(l.le.k)) then
                T(l,l,j)=500.
            end if

        end do
    end do

c ***** 2. Coté bas *****
    do l=0,k
        do i=1,m
            if (l.eq.0) then
                T(0,i,1)=500.
            end if
```

```
        if((l.ge.1).and.(l.le.k))then
          T(l,i,1)=500.
        end if
      end do
    end do
c ***** 3. Coté droit *****
do l=0,k
  do j=2,n-1
    if (l.eq.0) then
      T(0,m,j)=500.
    end if

    if((l.ge.1).and.(l.le.k))then
      T(l,m,j)=500.
    end if

  end do
end do
do i=1,m
  write (20,11) i,(T(0,i,j),j=1,n)
end do
11 format (i3,52(1x,f10.3))

c ***** Appel du sous-programme *****
c *****
call calcul_stationnaire_et_no_stationnaire
c *****

c ***** Résultats *****
c *****
do i=1,m
  write (30,12) i,(T(0,i,j),j=1,n)
end do
12 format (i3,52(1x,f10.3))
do l=1,k
  do i=1,m
    write (40,13) i,(T(l,i,j),j=1,n)
  end do
end do
13 format (i3,52(1x,f10.3))
close (unit=1)
close (unit=2)
close (unit=3)
```

```

close (unit=4)

stop

end

C *****
C *****
C *****

C *****
C *****
C *****
C *** Sous programme de calcul de la température par la méthode de Gauss-seidel améliorée ***
C *** avec la méthode de sur-relaxation (sor) ***
C *** ***
C *****

Subroutine calcul_stationnaire_et_no_stationnaire
Implicit real (8) (a-h,o-z)
Common/maillage/deltat,deltax,deltay,k,m,n
Common/r
Common/teper/T(101,101,101)
Real*4 La
Data w,eps,h,La/1.3,1.E-3,900.,16./
sor=1-w
dmax=100.

C ***** Itération *****

it=1
do while (dmax.gt.eps.and.it.lt.1000)
dmax=0.
do l=0,k
do j=2,n-1
do i=2,m-1.
if (l.eq.0) then
if((j.ge.2).and.(j.le.(n-2)))then
som=T(0,i,j)*sor+w*0.25*(T(0,i-1,j)+T(0,i+1,j)
* +T(0,i,j-1)+T(0,i,j+1))
endif
C condition aux limites de cauchy

if(j.eq.n-1)then
som=T(0,i,j)*sor+
* w*(1/(4*(2*(deltax*1.E-2)*h/La)))*(T(0,i-1,j)+T(0,i+1,j)
* +2*T(0,i,j-1)+(2*(deltax*1.E-2)*h/La)*T(0,i,j+1))
endif
dt=abs(som-T(0,i,j))/som

if(dt.gt.dmax) dmax=dt
T(0,i,j)=som
endif

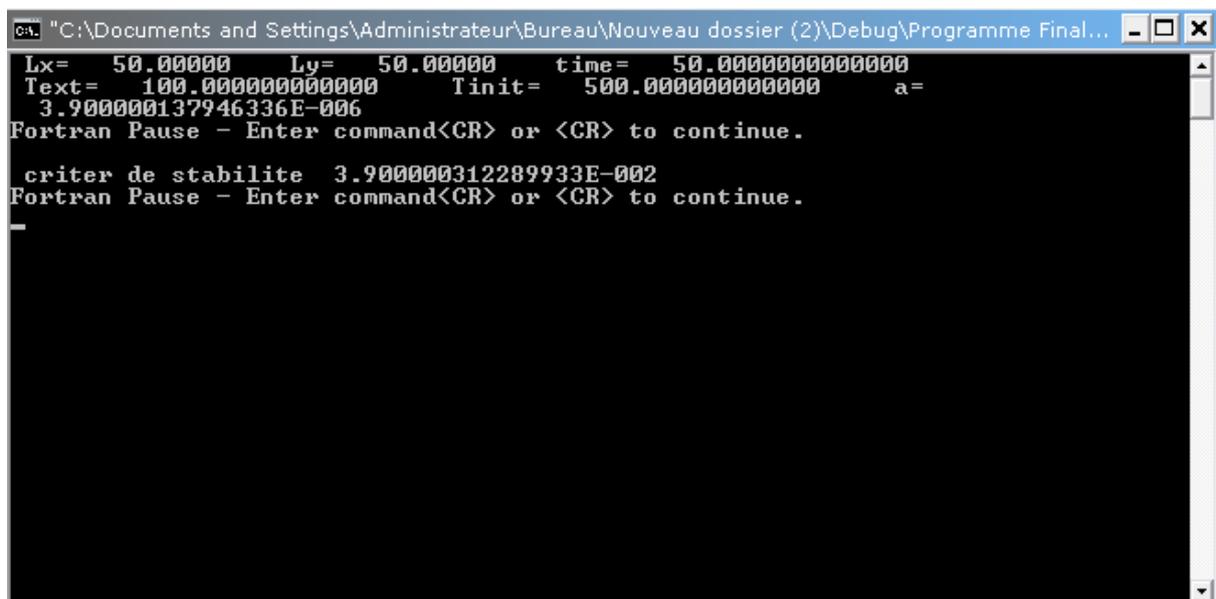
```

```
        if((l.ge.1).and.(l.le.k)) then
          T(1,i,j)=T(0,i,j)
          T(1+1,i,j)=T(1,i,j)+r*(T(1,i+1,j)+T(1,i-1,j)-4*T(1,i,j)
            +T(1,i,j+1)+T(1,i,j-1))
        endif
        if(j.eq.n-1)then
          T(1+1,i,j)=T(1,i,j)+r*(T(1,i-1,j)+T(1,i+1,j)
            -(4+(2*(deltax)*h/La))*T(1,i,j)+2*T(1,i,j-1)+
            (2*(deltax)*h/La)*T(1,i,j+1))
        endif
        T(1,i,j)=T(1+1,i,j)
      end do
    end do

  end do
  it=it+1
  write(*,*) 'it=',it
end do
return
end subroutine

C *****
C *****
```

Exécution



III.3.5. Résultats

Les résultats obtenus numériquement sont représentés directement sous la forme des graphes suivants :

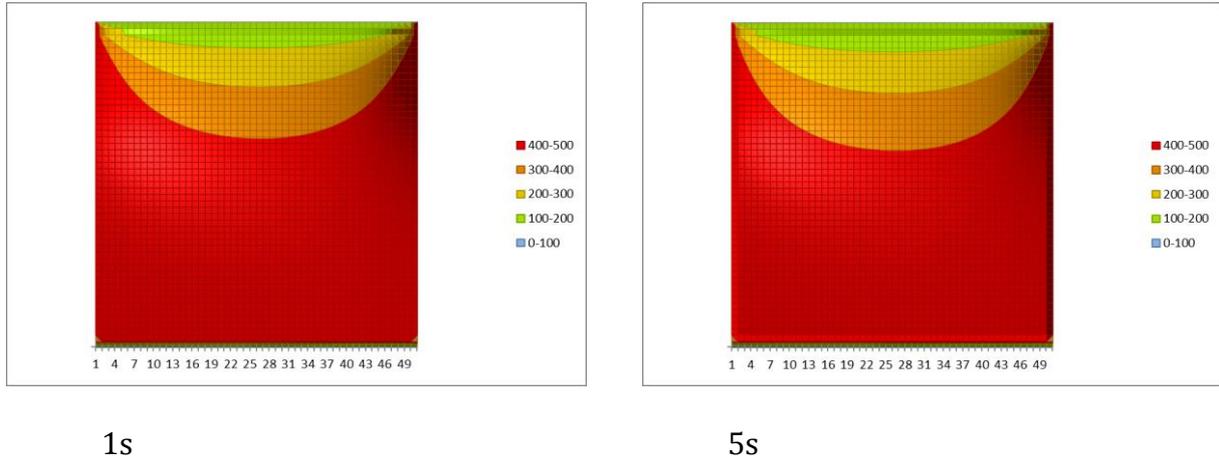


Figure III.10 : Représentation des températures sur la plaque

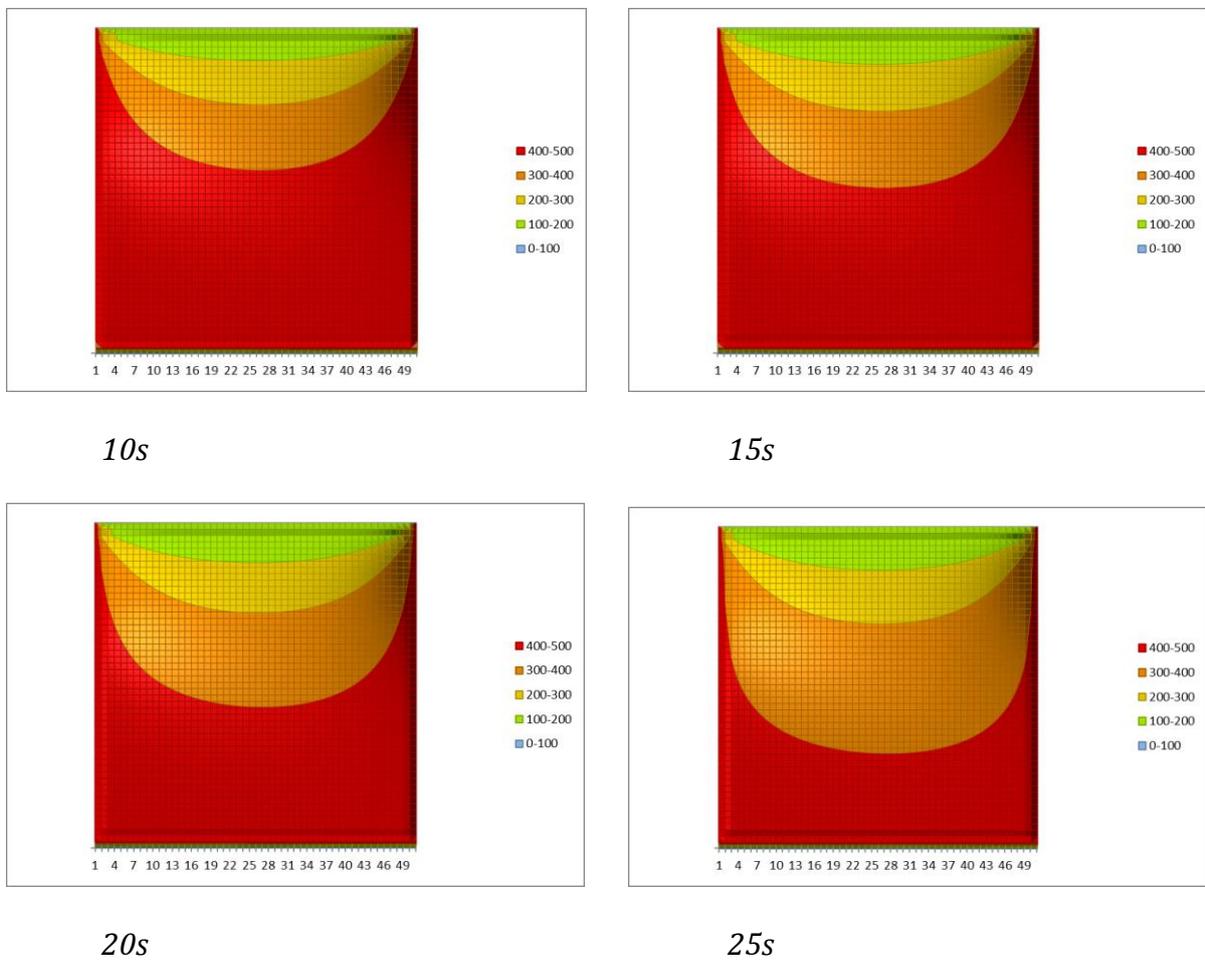
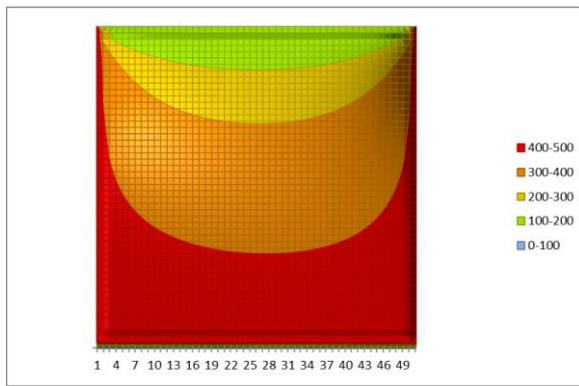
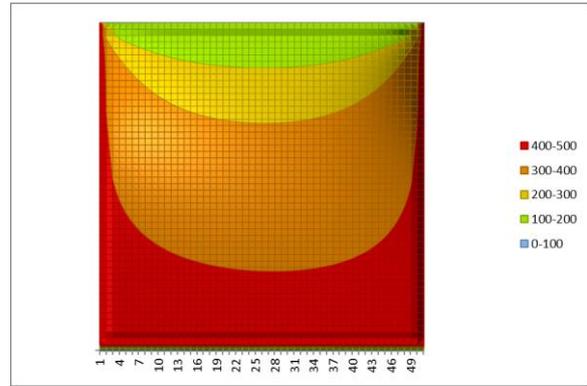


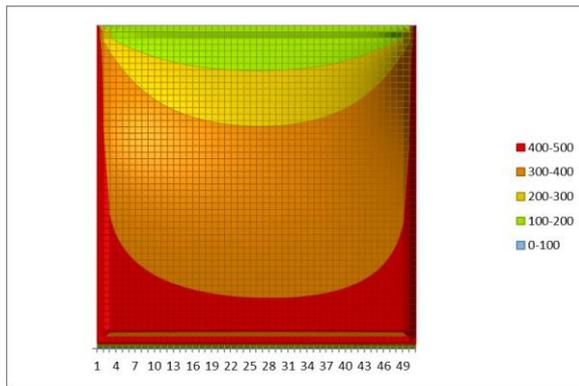
Figure III.11.a : Evolution de la température à intervalle de 5 s



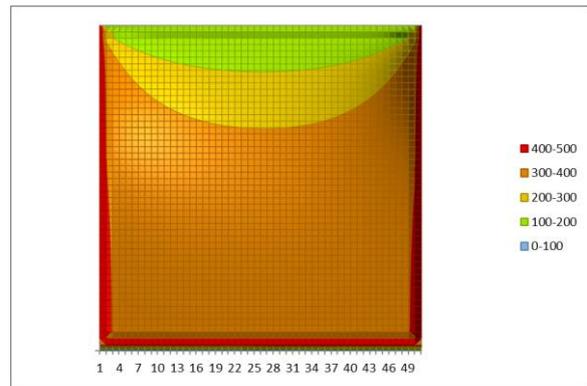
25s



26s



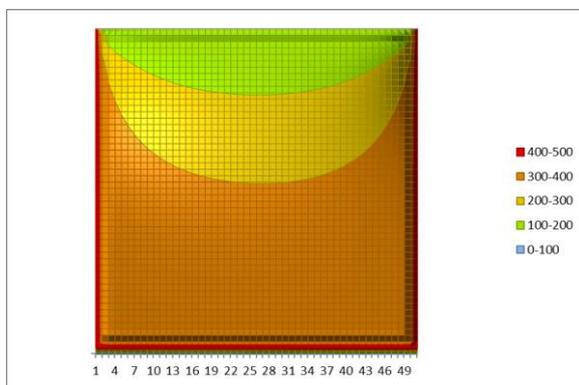
27s



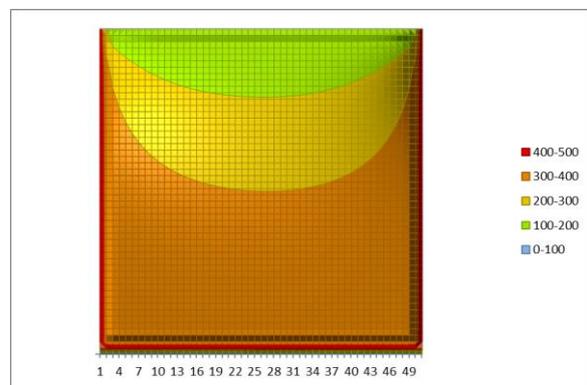
28s

Figure III.11.b : Evolution de la température à intervalle de 1 s

Figure III.11 : Représentation des températures sur la plaque



49s



51s

Figure III.12 : Représentation des températures sur la plaque.

En regroupant par catégorie de changement des températures pour visionner la différence du changement effectif de la variation de la température on obtient :

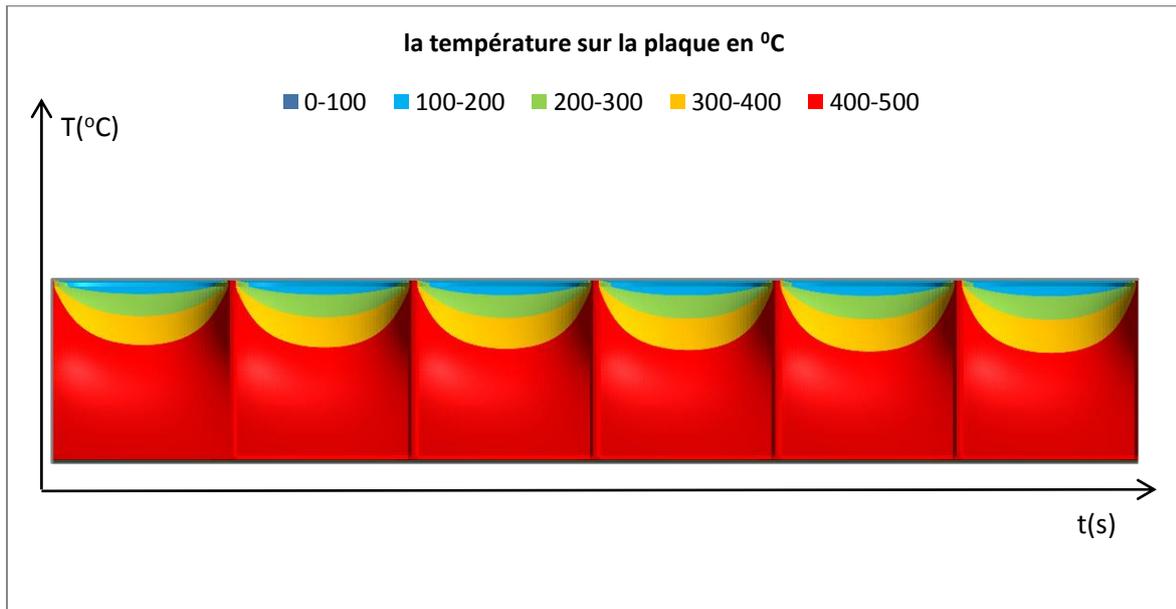


Figure III.13 : Représentation des températures sur la plaque, $1 \leq t \leq 5$.

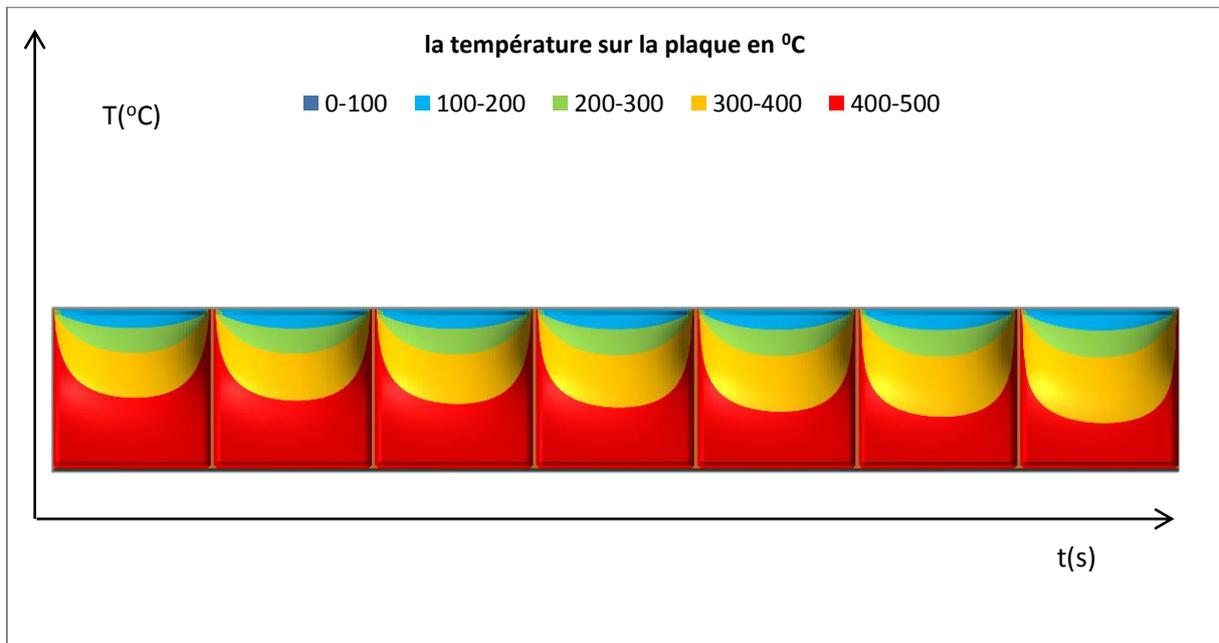


Figure III.14: Représentation des températures sur la plaque, $19 \leq t \leq 25$.

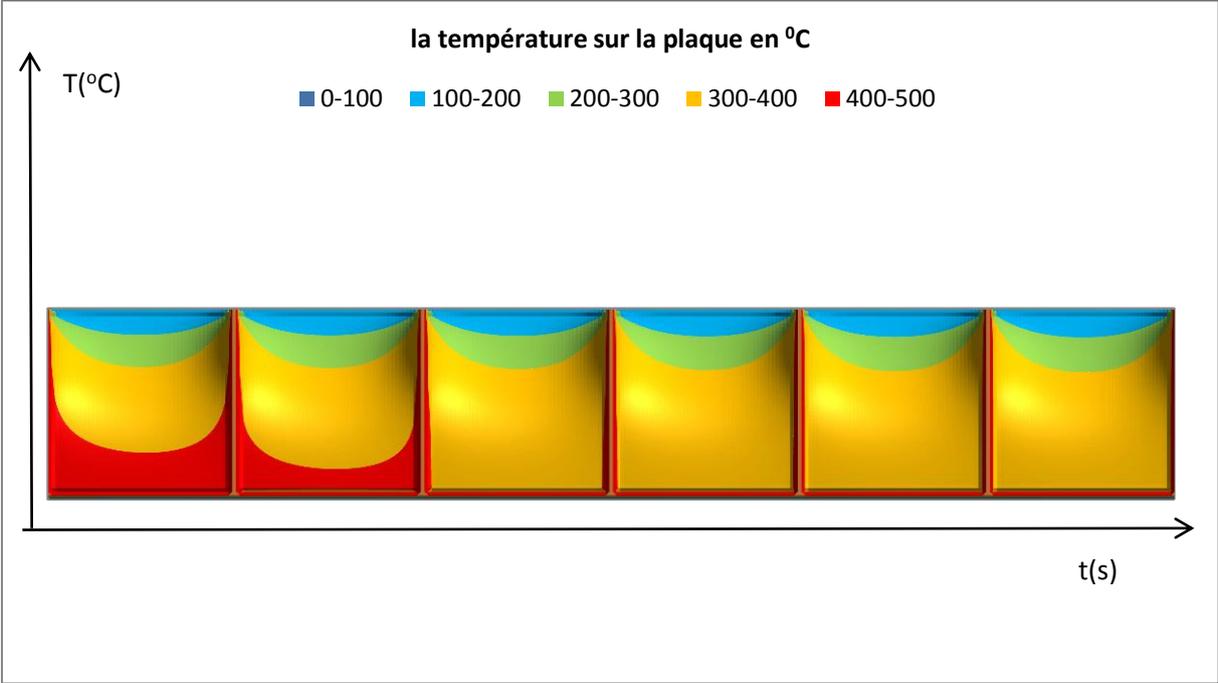


Figure III.15: Représentation des températures sur la plaque, $26 \leq t \leq 31$.

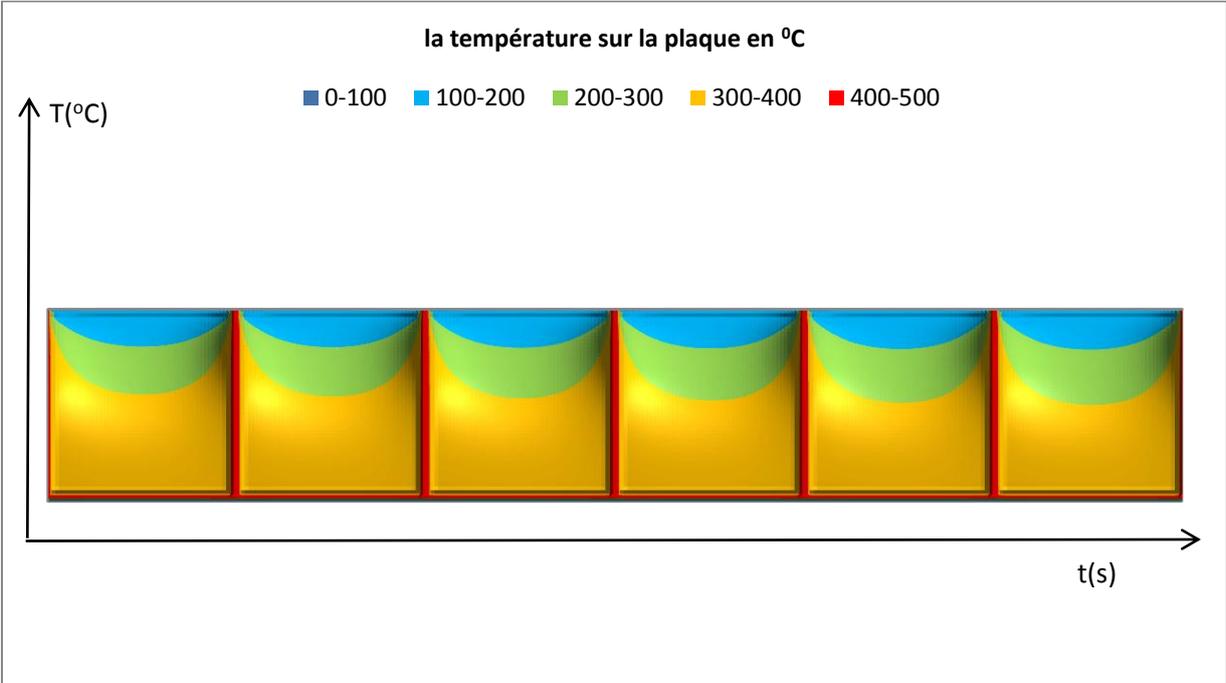


Figure III.16: Représentation des températures sur la plaque, $46 \leq t \leq 51$.

L'aspect tridimensionnel de distribution de la température est représenté comme suit :

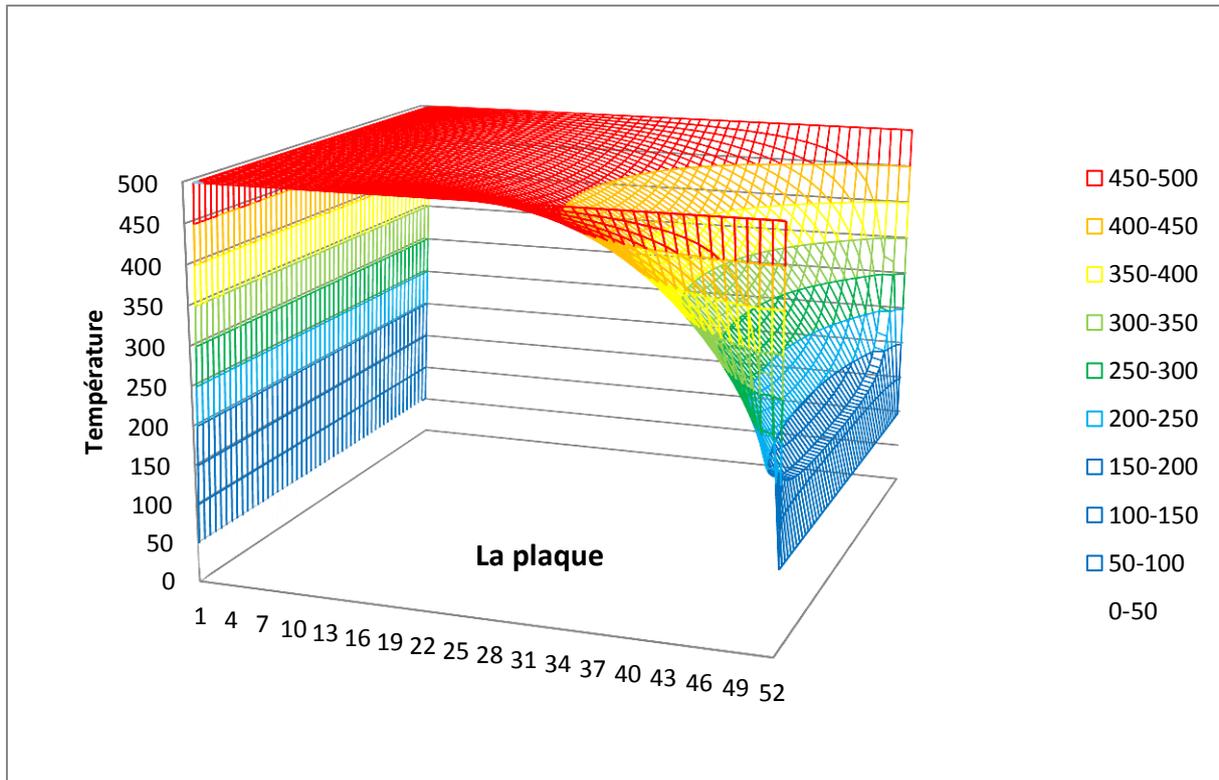


Figure III.17: Représentation temporelle des températures à $t=1$ s

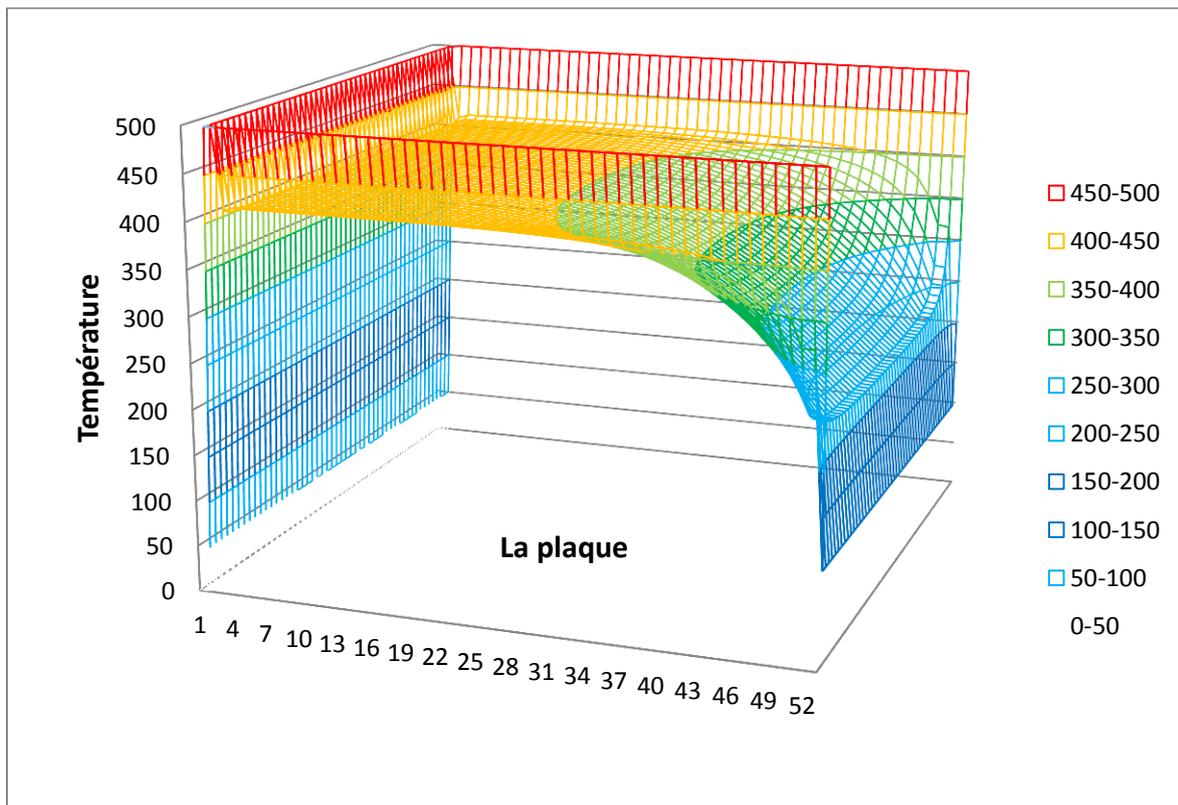


Figure III.18 : Représentation temporelle des températures à $t=24$ s

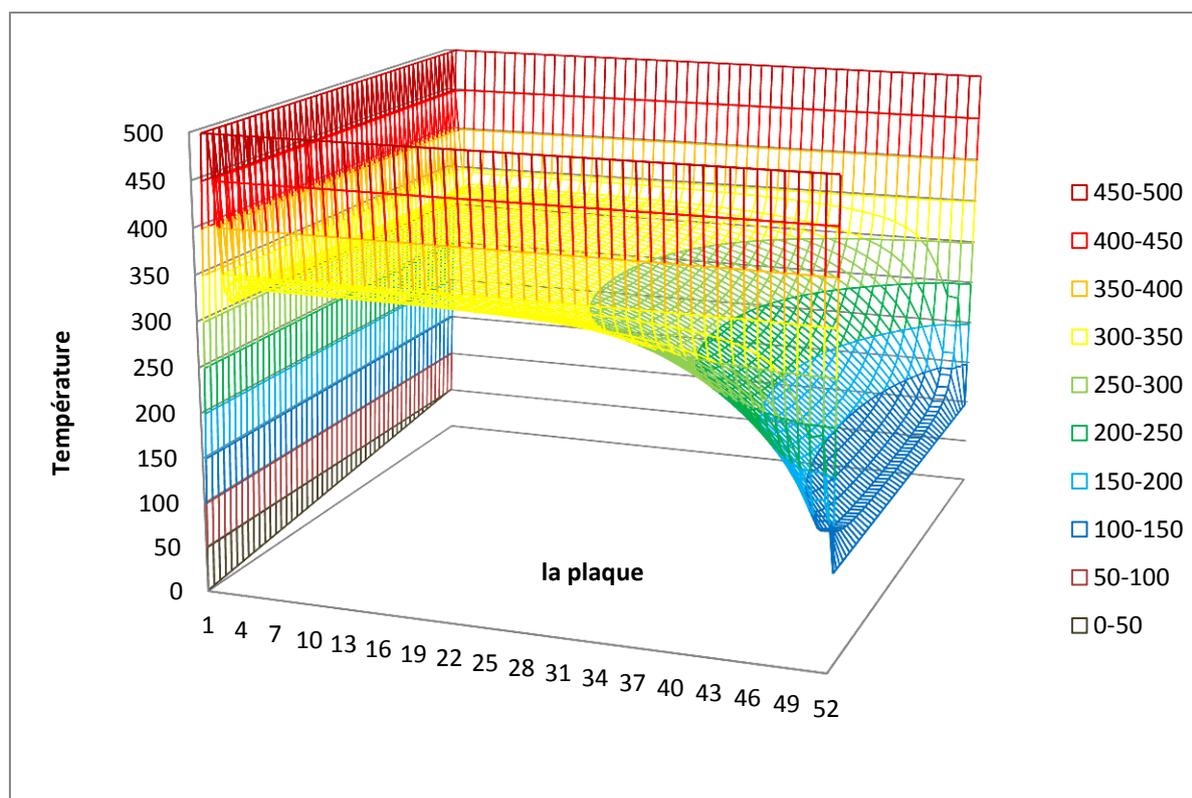


Figure III.19 : Représentation temporelle des températures à $t=50\text{ s}$

III.4. Interprétations

La figure III.6 représente la variation de la température dans la plaque indépendamment du temps. Cette variation exprime le taux du transfert de chaleur par conduction dans un état stationnaire de l'intérieur vers le milieu extérieur du côté de refroidissement par pulvérisation d'eau. On constate que cette variation prend une forme convexe vers le bas avec un spectre de températures qui varie comme suit :

- de 100 à 200 °C entre 50 et 48 cm,
- de 200 à 300 °C entre 48 et 42 cm,
- de 300 à 400 °C entre 42 et 34 cm et
- pour le reste de 34 cm au bord inférieur de la plaque, la température varie de 400 à 500°C.

Les figures III.10, III.11, III.12 présentent la variation de la température dans la plaque en fonction du temps. Cette variation exprime le taux de transfert de chaleur par conduction dans un état instationnaire, également de l'intérieur vers le milieu extérieur du côté de refroidissement par pulvérisation d'eau. Là on relève que pour chaque valeur du temps de 0 à $t > 0$, nous avons une évolution continue du transfert de chaleur. À $t = 1$ seconde, la première variation de la figure III.10 ne semblerait pas être très différente de l'état stationnaire précédemment cité. Ce n'est qu'au bout de 14 secondes que la variation se fait ressentir légèrement. A partir de ce moment-là, on voit que pour $t = 20$ secondes les températures varient de 100 à 200 °C entre 52 et 46 cm, de 200 à 300 °C

entre 46 et 38 cm, de 300 à 400 °C entre 38 et 23 cm et pour le reste de 23 cm au bord inférieur de la plaque, la température varie de 400 à 500 °C.

On remarque sur la figure **III.11** que la progression en diminution de la température est lente de 5 à 25 secondes et qu'on ne peut même pas la différentier pour 5 secondes mais à partir de 25 s cette variation (refroidissement) s'accélère pour chaque seconde.

Dans la figure **III.12**, on voit que la plage de 500 à 400 °C n'existe plus et que la plaque est totalement refroidie à des températures inférieures à 400 °C et qu'en ce moment-là elle continue à se refroidir pour arriver au bout de 51 secondes à avoir pratiquement la moitié entre 400 et 300 °C, un quart de 300 à 200 °C et un quart entre 200 et 100°C. Notons bien que les températures inférieures à 100 °C n'existent pas à cause des conditions aux limites de la partie supérieure de la plaque.

La continuation de la variation du refroidissement est bien sûre évidente, mais à cause du choix de l'intervalle de temps par la programmation (qu'on peut d'ailleurs modifier sans difficultés), le refroidissement s'arrête ici.

Les figures **III.13**, **III.14**, **III.15** et **III.16** indiquent l'évolution de la température dans la plaque à des intervalles de temps sélectionnés, permettant d'apprécier cette évolution dans le temps pour chaque plage de température du spectre définis.

Ce programme offre donc la possibilité de contrôler la variation du refroidissement de la plaque et de choisir le temps nécessaire et la température choisie pour avoir le traitement thermique désiré.

Le mécanisme de refroidissement de la plaque s'effectue par la chaleur cédée par celle-ci à l'eau de refroidissement qui est à 23 °C, mais à cause du changement de phase qui nécessite une température d'ébullition de 100 °C l'interface reste à cette température et ce phénomène continue à consommer l'énergie thermique sous forme de chaleur dissipée et on arrive au bout d'un certain temps à des températures nettement inférieures à celle du problème à l'état initial.

Conclusion générale

Dans ce mémoire nous avons traité un problème de transfert de chaleur par conduction à travers une plaque hautement chauffée pour deux cas de régime de transfert, stationnaire et non-stationnaire en considérant le problème bidimensionnel. La plaque portée à la température initiale de 500°C est refroidie par un jet d'eau laminaire par sa face supérieure à la température de 23°C. Les trois autres faces de la plaque sont maintenues à la température de 500°C (conditions aux limites de Dirichlet). La face supérieure subit un transfert de chaleur avec changement de phase à l'interface de contact plaque-eau, cette dernière qui subit une ébullition en continu durant le processus de refroidissement. Ce phénomène est donc décrit par un équilibre du flux de chaleur entre la conduction à l'intérieur de la plaque et la convection à son extérieur, problème défini par la condition aux limites de Cauchy.

La méthode de résolution adoptée est basée sur les différences finies utilisant la méthode numérique explicite de Gauss-Seidel et la méthode de convergence de relaxation. Cette résolution a été traduite par une programmation en langage fortran 90.

On remarque que la distribution de température au sein de la plaque est quasi-symétrique par rapport à l'axe y orienté vers le bas au milieu de cette la plaque.

On peut s'attendre qu'à partir de notre simulation, de bons résultats peuvent être obtenus, démontrant ainsi que le choix des paramètres appropriés permet d'arriver à ces résultats qui décrivent l'évolution du processus d'une manière précise, offrant la possibilité de comprendre facilement un phénomène aussi complexe. Notons également que le rayonnement a été négligé car la conduction et la convection prédominent.

Ce mode de traitement thermique est très utilisé dans l'industrie du laminage à chaud de l'acier car il permet d'obtenir des structures uniformes et résistantes du produit aux qualités recherchées.

Une étude telle que la nôtre est d'une utilité capitale, car elle permettrait de gagner en temps et en coût pour arriver à fournir d'importantes explications du processus et d'en optimiser les résultats.

Finalement, ce travail m'a permis d'aborder un problème complexe de transfert thermique, de le comprendre et de le résoudre par un outil très puissant et performant qui est la simulation numérique adjointe à la programmation informatique. En plus, cela m'a permis de mettre à l'épreuve mes connaissances théoriques acquises durant ma formation.

Références bibliographiques

- [1] J.V. Beck, B. Blackwell and C.R. St Clair, Inverse Heat conduction, III posed Problems, Wiley Inter science Publication 1985.
- [2] Josianne Roy, Les transferts de chaleurs, Master en Sciences.
- [3] Kim, Y.Y., K.S., Jeong, G.H., Jeong, S., An experimental study on the quantitative interpretation of local convective heat transfer for a plate fin and tube heat exchanger using the lumped capacitance method, International Journal of heat and Mass Transfer, (49)230-239, 2006.
- [4] Adil Ridha, Transfert de Chaleur et de Masse, Université de Caen, 2009-2010.
- [5] Cours Transfert de chaleur; Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), 2011
- [6] Yves Jannot, Transferts thermiques, Ecole des Mines Nancy, 2011.
- [7] Wikipedia, Transfert thermique.
- [8] J. E Durastanti, B. Martin, C. Kneip et A. Jeanmaire, Transfert de chaleur par conduction et rayonnement dans les matériaux semi-transparents, *Journal of Thermal Analysis, rot. 44, 1995.*
- [9] Greg F. Naterer, Heat transfer calculation, University of Ontario, Institute of Technology Oshawa, Ontario, Canada.
- [10] Olivier Perrot, Cours de rayonnement, Université Joseph Fourier, 2011
- [11] Benlekkam Mohamed Lamine, Simulation numérique des fluides, 2^{eme} année école doctorale, 2011.
- [12] Abbès Azzi, Méthodes numériques appliquées aux calculs des écoulements et du transfert de chaleur, Juin 2011.
- [13] David R. Croft, David G. Lilley, Heat transfer calculations using finite difference equations, 1977.
- [14] Pierre Puisseux, Résolution d'EDP par différences finies, Janvier 2010.
- [15] Eric Goncalv, Méthodes, analyse et calculs numériques, 18 Janvier 2011.
- [16] P. Lascaux, R. Théodor, Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur, Tome 1, Masson 1986.
- [17] B. Lucquin, Equations aux dérivées partielles et leurs approximations, Ellipse 2004.
- [18] P. Viot, Méthodes d'analyse numériques, Cours de DEA de Jussieu, 2003.
- [19] <http://en.calameo.com/read/001341754f136f7446e20>
- [20] Verena Horak, Peter Gruber, Parallel Numerical Solution of 2-D Heat Equation, Department of Scientific Computing, University of Salzburg.
- [21] Pr Hocine Mzad, cours Méthode numérique, Université de Badji Mokhtar -Annaba, 2010.