

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

UNIVERSITÉ BADJI MOKHTAR - ANNABA
BADJI MOKHTAR – ANNABA UNIVERSITY



جامعة باجي مختار – عنابة

Faculté : Sciences de l'ingénierat
Département : Hydraulique
Domaine : Sciences et technologies
Filière : Hydraulique
Spécialité : Ouvrages Hydrauliques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du Diplôme de Master

Thème:

**ETUDE DE L'ÉCOULEMENT UNIFORME DANS UN CANAL A
PAROIS ELLIPTIQUES ET A FOND HORIZONTAL PAR LA
METHODE MMR**

Présenté par : *Hamaidi Imene*
Belleili Bochra

Encadrant : *Lakehal Moussa* MCA Université Badji Mokhtar - Annaba

Jury de Soutenance :

BOUTAGHANE Hamouda	MCA	Université de Annaba	Président
LAKEHAL Moussa	MCA	Université de Annaba	Encadrant
BENOUARA Nawel	MCB	Université de Annaba	Examinatrice

Année Universitaire : 2020/2021

REMERCIEMENTS

نحمد الله عز و جل الذي وفقنا إلى انجاز هذا العمل المتواضع و ألهمنا الصحة
و العافية و العزيمة
فالحمد لله كثيرا

Nous tenons à remercier vivement et à exprimer notre reconnaissance à notre

*promoteur Mr **Lakehal Moussa***

pour avoir accepté d'encadrer ce travail et aussi pour son

orientation, disponibilité et ses conseils précieux, dont il fait référence

chaque fois que nous la postulons.

Nos remerciements s'adressent également aux membres du jury pour honorer

notre soutenance et pour l'effort fourni afin de juger ce travail.

Un grand remerciement pour tous nos enseignants, pour leurs contributions

dans notre cursus universitaire, du département d'Hydraulique, Université

*de **Badji Mokhtar Annaba.***

Nous remercions toute notre promotion de Master et A toutes celles et tous ceux

qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce modeste travail.

Merci.

DEDICACES

Je Dédie ce travail :

A ceux qui me sont chers

A ceux qui ont toujours cru en moi

A ceux qui m'ont toujours encouragé

A ma très chère mère : aucune dédicace ne saurait être assez éloquente pour exprimer ce que tu mérites pour tous les sacrifices que tu n'as cessés de me donner depuis ma naissance, durant mon enfance et m'aimer à l'âge adulte. Je te dédie ce travail en témoignage de mon profond amour. Puisse ALLAH, le tout puissant, te préserver et t'accorder santé, longue vie et bonheur.

A mon très cher père : ce modeste travail est le fruit de tes sacrifices déployés pour notre éducation. Vous avez fourni beaucoup d'efforts aussi bien physiques que moraux à notre égard.

A mes chers frères : Nasro et Hakim.

A mes adorables sœurs : SALIMA et ASMA.

A mes enseignants du département d'hydraulique.

A mes collègues de la promotion 2021.

Imen

DEDICACES

Je Dédie ce travail :

A ceux qui me sont chers

A ceux qui ont toujours cru en moi

A ceux qui m'ont toujours encouragé

A ma très chère mère : aucune dédicace ne saurait être assez éloquente pour exprimer ce que tu mérites pour tous les sacrifices que tu n'as cessés de me donner depuis ma naissance, durant mon enfance et m'aimer à l'âge adulte. Je te dédie ce travail en témoignage de mon profond amour. Puisse ALLAH, le tout puissant, te préserver et t'accorder santé, longue vie et bonheur.

A mon très cher père : ce modeste travail est le fruit de tes sacrifices déployés pour notre éducation. Vous avez fourni beaucoup d'efforts aussi bien physiques que moraux à notre égard.

A mes chers frères : Chams eddine et Mohamed.

A mon adorables sœur : Salsabile.

A mon marie : Sehili Abd Elhak .

A mes enseignants du département d'hydraulique.

A mes collègues de la promotion 2021.

ملخص

تهدف هذه الدراسة للتحليل النظري للسيلان المنتظم في قناة مفتوحة ذات جانبيين إهليجيبي الشكل وقعر أفقي. هذا الشكل الجديد نسبيا أقتراح من طرف *Easa et Vatankhah* سنة 2014 الذين أثبتنا أن هذا المقطع أفضل بشكل عام من المقطع ذا جانبيين من نوع معادلة-أسية والمقطع شبه منحرف و ذلك من الناحية الاقتصادية. إن الدراسة التي أجريناها في أول الأمر أفضت إلى اقتراح خطوات عملية لحساب مقاسات القناة المدروسة وهي عرض القعر, العرض الأفقي للمنطقة الإهليجية و كذا ارتفاع القناة. وتم استخلاص مختلف العلاقات التي تساعد على تحديد مقاسات القناة بعد تطبيق طريقة MMR. بعد ذلك تابعنا الدراسة لاقتراح مقارنة نظرية التي أدت إلى تحديد العمق الطبيعي للسيلان باستعمال طريقة MMR أيضا.

الكلمات المفتاحية : تحديد أبعاد القنوات, السيلان المنتظم, طريقة MMR, العمق الطبيعي, قناة مفتوحة ذات جانبيين إهليجيبي الشكل وقعر أفقي.

Abstract

The objective of this study was to perform a theoretical analysis of uniform flow in an open channel with elliptic sides and a horizontal bottom. This relatively new form was proposed by *Easa and Vatankhah* in 2014, which showed that it is generally cost-effective compared to the wall section of the law-power and trapezoid shaped. The study that we carried out led, first of all, to a practical approach aimed at making the dimensioning of the studied channel, which is to determine its bottom width, the horizontal width of its elliptical part and its height. Indeed, the establishment of the different relations allowing sizing the channel was made possible by application of the RMM method. Second, the study continued to propose a theoretical approach that led to the determination of normal flow depth based on the RMM method as well.

Keywords: Normal depth, Open channel with elliptic sides and horizontal bottom, RMM method, Sizing of channels, Uniform flow.

Résumé

L'objectif de la présente étude était de faire une analyse théorique de l'écoulement uniforme dans un canal ouvert à parois elliptiques et à fond horizontal. Cette forme, qui est relativement récente, a été proposée par *Easa et Vatankhah* en 2014 qui ont montré qu'elle est d'une manière générale avantageuse, de point de vue coût, par rapport à la section à paroi de type loi-puissance et trapézoïdale. L'étude que nous avons effectuée aboutit, en premier lieu, à une démarche pratique visant à faire le dimensionnement du canal étudié qui revient à déterminer sa largeur de fond, la largeur horizontale de sa partie elliptique ainsi que son hauteur. En effet, l'établissement des différentes relations permettant de dimensionner le canal a été rendu possible par application de la méthode MMR. En deuxième lieu, l'étude s'est poursuivie afin de proposer une approche théorique qui a mené à la détermination de la profondeur normale de l'écoulement en se basant sur la méthode MMR également.

Mots clés : Canal ouvert à parois elliptiques et à fond horizontal, Dimensionnement des canaux, Ecoulement uniforme, Méthode MMR, Profondeur normale.

SOMMAIRE

SOMMAIRE

Liste des figures	
Tableau	
Introduction générale	I

Chapitre I

Présentation de l'écoulement uniforme

I. Introduction	01
II. Généralités sur les canaux	01
II.1. Types de canaux	01
1. Les canaux naturels	01
2. Les canaux artificiels	01
II.2. Géométrie des canaux	02
II.3. Ecoulement dans les canaux	03
II.3.1. Classification des écoulements	03
a. Variabilité dans le temps	03
b. Variabilité dans l'espace	04
II.4. Régime d'écoulement	04
III. Ecoulement uniforme	05
III.1. Concept de l'uniformité	05
IV. Quelques formules de l'écoulement uniforme	08
IV.1. Formule de <i>Chézy</i>	08
IV.2. Formule de <i>Manning-Strickler</i>	09
IV.3. Formule de <i>Darcy -Weisbach</i> et évaluation du coefficient de frottement ...	10

V. Conclusion	12
---------------------	----

Chapitre II

Dimensionnement d'un canal à parois elliptiques et à fond horizontal

I. Introduction	14
II. Caractéristiques géométriques du canal étudié	14
II.1. Aire de la section mouillée	15
II.2. Le périmètre mouillé	16
III. Expression du débit	18
IV. Caractéristiques du modèle rugueux de référence	19
V. Facteur de correction des dimensions linéaires	22
VI. Etapes de dimensionnement du canal	22
VII. Exemple d'application	23
VIII. Conclusion	26

Chapitre III

Calcul de la profondeur normale d'un canal à parois elliptiques et à fond horizontal

I. Introduction	28
II. Caractéristiques géométriques du canal considéré	28
II.1. Aire de la section mouillée	28
II.2. Le périmètre mouillé	29
III. Equations de base	31
IV. Caractéristiques du modèle rugueux de référence	32
V. Etapes de calcul de la profondeur normale	37
VI. Exemple d'application	38

VII. Conclusion	43
CONCLUSION GENERALE	44
PRINCIPALES NOTATIONS	46
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	48

LISTE DES FIGURES

LISTE DES FIGURES

Chapitre I

Figure 1.1 :	Types de canaux (<i>Graf et Altinakar, 2000</i>)	02
Figure 1.2 :	Géométrie d'un canal à surface libre (<i>Fillali, 2012</i>).....	02
Figure 1.3 :	Schéma des écoulements permanent et non permanent (<i>Graf et Altinakar, 2000</i>).....	04
Figure 1.4 :	Etablissement de l'écoulement uniforme dans un canal de grande longueur	06
Figure 1.5 :	Diagramme de <i>Moody</i> (1944).....	11

Chapitre II

Figure 2.1 :	Schéma de définition du canal elliptique à fond horizontal (<i>Easa et Vatankhah, 2014</i>).....	15
Figure 2.2 :	Schéma de définition du modèle rugueux de référence d'un canal à parois elliptiques et à fond horizontal.....	19

Chapitre III

Figure 3.1 :	Représentation graphique de la fonction $\Lambda = f(Z)$	36
Figure 3.2 :	Ecarts relatifs $\Delta\bar{\eta}/\bar{\eta}$ (%)	37

TABLEAU

TABLEAU

Chapitre I

Tableau 1.1 : Coefficients de <i>Strickler K</i> et de <i>Manning n</i>	09
-------------------------------------------------------------------------------	----

INTRODUCTION GENERALE

INTRODUCTION GENERALE

Le dimensionnement des canaux et surtout le calcul de la profondeur normale joue un rôle très important dans la pratique de l'ingénieur hydraulicien (*Lakehal et Achour, 2017*). Le calcul de la profondeur normale s'effectue dans l'hypothèse d'un écoulement uniforme. L'écoulement uniforme se définit comme un écoulement dont toutes ses caractéristiques sont constantes dans le temps et dans l'espace. Ces caractéristiques sont la profondeur normale de l'écoulement y_n , l'aire de la section mouillée A , le périmètre mouillé P , la rugosité absolue ε , la viscosité cinématique du liquide et la pente longitudinale i ou gradient de la perte de charge linéaire J selon que l'écoulement est à surface libre ou en charge respectivement. La vitesse moyenne de l'écoulement V doit être constante également et sa répartition est uniforme dans toutes les sections du canal (*Achour et al., 2002*). L'écoulement uniforme est considéré comme étant permanent lorsque le débit volume Q qu'il véhicule reste constant dans le temps.

Dans la pratique, l'écoulement uniforme est très rare. Il se produit, d'un point de vue théorique, lorsque le canal a une longueur infinie ou très grande. Cependant, le calcul de l'écoulement dans les canaux et rivières s'effectue sous l'hypothèse de l'uniformité (*Chow, 1973*). La classification des écoulements graduellement varie se fait en se basant sur l'écoulement uniforme (*Graf et Altinakar, 2000*).

De nombreux types de sections transversales de canaux ouverts ont été proposés dans la littérature. L'objectif principal de la conception a été de minimiser les coûts de construction ou de maximiser l'efficacité hydraulique (*Chow 1959 citée par Easa et Vatankhah, 2013*). *Easa et Vatankhah (2013)* ont proposé la forme du canal ouvert à parois elliptiques et à fond horizontal et ont montré que cette forme est plus économique par rapport à la section trapézoïdale et par rapport à la section à parois de type loi-puissance.

C'est dans ce contexte qu'on propose la présente étude. Autrement dit, l'objectif de ce mémoire est de proposer une démarche de dimensionnement d'un canal à parois elliptique et à fond horizontal d'une part et est une autre démarche permettant le calcul de la profondeur normale dans le même type du canal d'autre part. La méthode qui sera utilisée est la méthode du modèle

rugueux de référence (*Achour, 2007*) qui a connue ces dernières années beaucoup de d'évolutions et de succès.

Afin d'atteindre notre objectif, nous avons suggéré de subdivisé notre mémoire en trois chapitres distincts. Le premier chapitre sera consacré essentiellement à la présentation de l'écoulement uniforme, le mécanisme de son développement ainsi que les différentes formules qui le régissent. Quant au deuxième chapitre, il sera réservé à l'exposition de la démarche à suivre pour déterminer les différentes dimensions linéaires du canal considéré. Par ailleurs, le troisième et dernier chapitre de ce mémoire sera consacré à l'étude de la profondeur normale de l'écoulement dans le canal choisit.

Premier Chapitre

Présentation de l'écoulement uniforme

Chapitre I

Présentation de l'écoulement uniforme

I. Introduction

Ce sera consacré à description de l'écoulement uniforme dans les canaux découverts. Les types de canaux ainsi que les éléments caractérisant leur géométrie seront, d'abord, présentés. Par la suite, l'étude abordera la classification des écoulements dans les canaux, en mettant l'accent sur l'effet du temps et de l'espace qui sont considérés comme les facteurs clés pour la détermination de la nature de ces écoulements. Les régimes d'écoulement seront également abordés pour tenir compte des différents types de forces agissant sur un volume de contrôle donné. En outre, l'écoulement uniforme sera particulièrement présenté en exposant le concept de l'uniformité ainsi que les relations universelles qui le régissent.

II. Généralités sur les canaux

II.1. Types de canaux

On appelle canal un système de transport dans lequel l'eau s'écoule et dont la surface libre est soumise à la pression atmosphérique. On distingue deux catégories de canaux (*Graf et Altinakar, 2000*) : (Voir la figure 1.1)

1. Les canaux naturels : Ce sont les cours d'eau qui existent naturellement sur (ou sous) terre ; tels que les torrents, rivières, fleuves et estuaires.

Les propriétés géométriques et hydrauliques des canaux naturels sont généralement assez irrégulières. L'application de la théorie hydraulique ne donne que des résultats approximatifs obtenus à partir d'hypothèses qui s'imposent.

2. Les canaux artificiels : sont des cours d'eau réalisés par l'homme sur (ou sous) terre tels que : les canaux découverts (canaux de navigation, d'adduction et d'évacuation, d'irrigation et de drainage) ou les canaux couverts (tunnels hydrauliques, aqueducs, drains, égouts).

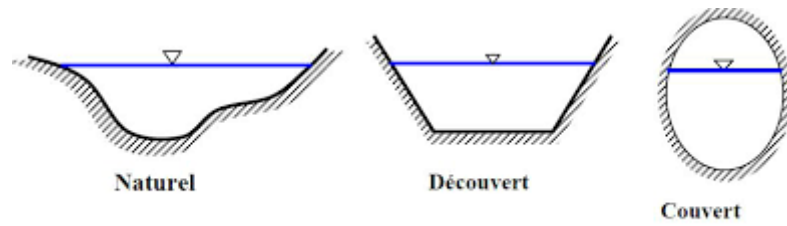


Figure 1.1 : Types de canaux (Graf et Altinakar, 2000)

II.2. Géométrie des canaux

Les grandeurs géométriques les plus utilisées permettant de caractériser l'écoulement sont (Bennis, 2007) :

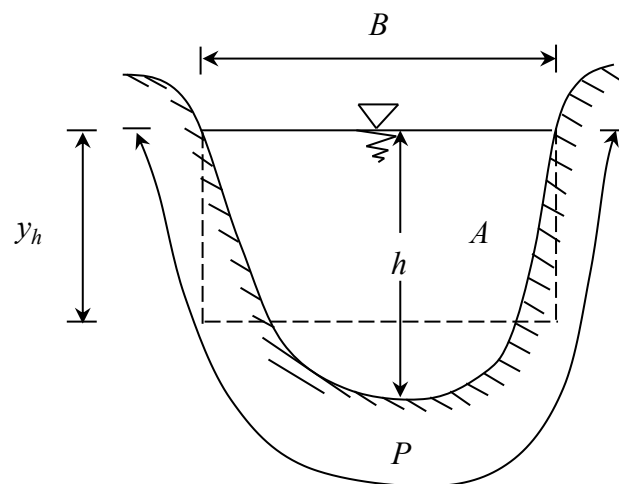


Figure 1.2 : Géométrie d'un canal à surface libre (Fillali, 2012).

- Section mouillée d'un canal A : est la portion de la section du canal limitée par les parois du canal et la surface libre.
- Périmètre mouillé d'un canal P : le périmètre de la section mouillée inclut les parois solides mais ne comprend pas la surface libre.
- Rayon hydraulique R_h : est le quotient de l'aire de la section mouillée A et du périmètre mouillé P :

$$R_h = \frac{A}{P} \quad (1.1)$$
- Profondeur ou tirant d'eau : on appelle profondeur d'eau la hauteur d'eau au-dessus du point le plus bas de la section perpendiculaire à l'écoulement. On la dénote souvent par h ou y .
- Largeur au plan d'eau B ou T : est la largeur de la section mouillée à la surface libre.

- Largeur au radier : est la largeur de la section mouillée au niveau du fond du canal, représentée par b .
- Pente d'un canal : on définit la pente d'un canal i comme étant la tangente de l'angle d'inclinaison du lit par rapport à l'horizontale.
- Canal prismatique : un canal prismatique est un canal dont la pente et la géométrie de la section restent constantes dans la direction longitudinale du canal.
Lorsqu'une de ces conditions n'est pas respectée, le canal est dit non prismatique.

II.3. Ecoulement dans les canaux

Les écoulements dans les canaux naturels et artificiels sont des écoulements à surface libre (*Graf et Altinakar, 2000*). Ces écoulements présentent par définition la particularité de comporter une surface libre en contact avec l'air, généralement soumise à la pression atmosphérique (*Carlier, 1980*).

II.3.1. Classification des écoulements

Une classification des écoulements peut se faire selon la variation de la profondeur, y ou la profondeur hydraulique $y_h = A/B$, par rapport au temps et par rapport à l'espace (*Graf et Altinakar, 2000*).

a. Variabilité dans le temps

- Le mouvement est permanent (ou stationnaire) si la vitesse moyenne V de l'écoulement et la profondeur y restent invariables dans le temps en grandeur et en direction. Par conséquent, le débit est constant.

La vitesse moyenne V de l'écoulement est liée au débit Q par la relation :

$$Q = VA \quad (1.2)$$

- Le mouvement est non permanent dans le cas contraire. Au sens strict, l'écoulement dans les canaux est rarement permanent. Néanmoins les variations temporelles sont, dans certains cas, suffisamment lentes pour que l'écoulement puisse être considéré comme une succession de régime permanent. On peut alors définir ainsi le régime quasi-permanent.

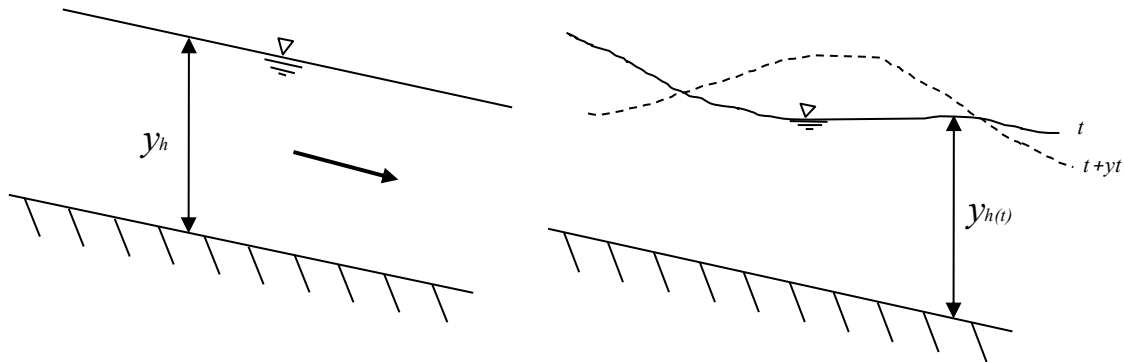


Figure 1.3 : Schéma des écoulements permanent et non permanent (Graf et Altinakar, 2000)

b. Variabilité dans l'espace

- Le mouvement est uniforme si les paramètres caractérisant l'écoulement restent invariables dans les diverses sections du canal. La ligne de la pente du fond est donc parallèle à la ligne de la surface libre.

- Le mouvement est non-uniforme ou varié si les paramètres caractérisant l'écoulement changent d'une section à l'autre. La pente de la surface libre diffère de celle du fond.

Un écoulement non-uniforme peut être accéléré ou décéléré suivant que la vitesse croît ou décroît dans le sens du mouvement.

- Lorsque le mouvement est graduellement varié, la profondeur, ainsi que les autres paramètres, ne changent que très lentement d'une section à l'autre.
- Lorsque le mouvement est rapidement varié, la profondeur, ainsi que les autres paramètres changent brusquement.

II.4. Régime d'écoulement

L'écoulement d'un fluide réel dans un canal à surface libre engendre les forces suivantes:

- Forces d'inertie;
- Forces de gravité;
- Forces de frottement (Viscosité et rugosité).

Pour l'étude hydraulique des canaux, on définit habituellement les nombres adimensionnels suivants :

- Le nombre de *Reynolds*, c'est le rapport des forces d'inertie aux forces de viscosité, et s'écrit :

$$R = \frac{VD_h}{\nu} \quad (1.3)$$

Où : V est la vitesse moyenne de l'écoulement, D_h est le diamètre hydraulique, et ν est la viscosité cinématique du liquide en écoulement.

Le rôle du nombre de *Reynolds* R est de permettre le classement des écoulements comme suit (*Graf et Altinakar, 2000*):

Écoulement laminaire	Écoulement transition	Écoulement turbulent
$R < 2000$	$2000 < R < 8000$	$R > 8000$

➤ Le nombre de *Froude*, c'est le rapport entre les forces d'inertie et celles de gravité où :

$$F_r = \frac{V}{\sqrt{g y_h}} \quad (1.4)$$

Où V est la vitesse moyenne de l'écoulement, g est l'accélération de la pesanteur et y_h est la hauteur hydraulique de l'écoulement.

Le rôle du nombre de *Froude* est de permettre le classement des écoulements comme suit (*Graf et Altinakar, 2000*) :

Écoulement fluvial	Écoulement torrentiel	Écoulement critique
$F_r < 1$	$F_r > 1$	$F_r = 1$

Dans la pratique, on rencontre ces trois types d'écoulement.

III. Écoulement uniforme

III.1. Concept de l'uniformité

Un écoulement est considéré comme étant uniforme lorsque ses caractéristiques sont invariables dans le temps et dans l'espace. Ces caractéristiques sont la profondeur h_n ou y_n de l'écoulement appelée aussi profondeur normale, l'aire de la section mouillée A , la vitesse V de l'écoulement et le débit volume Q . La ligne de charge totale est à la fois parallèle à la ligne piézométrique et à la pente géométrique du canal.

D'un point de vue pratique, la constance de la vitesse V est généralement associée à la constance de la vitesse moyenne de l'écoulement ; mais de façon plus rigoureuse, cela signifie que l'écoulement est caractérisé par une vitesse constante en tout point de son domaine. En d'autres termes, la distribution des vitesses dans chacune des sections transversales de l'écoulement est uniforme, correspondant à une couche limite pleinement développée.

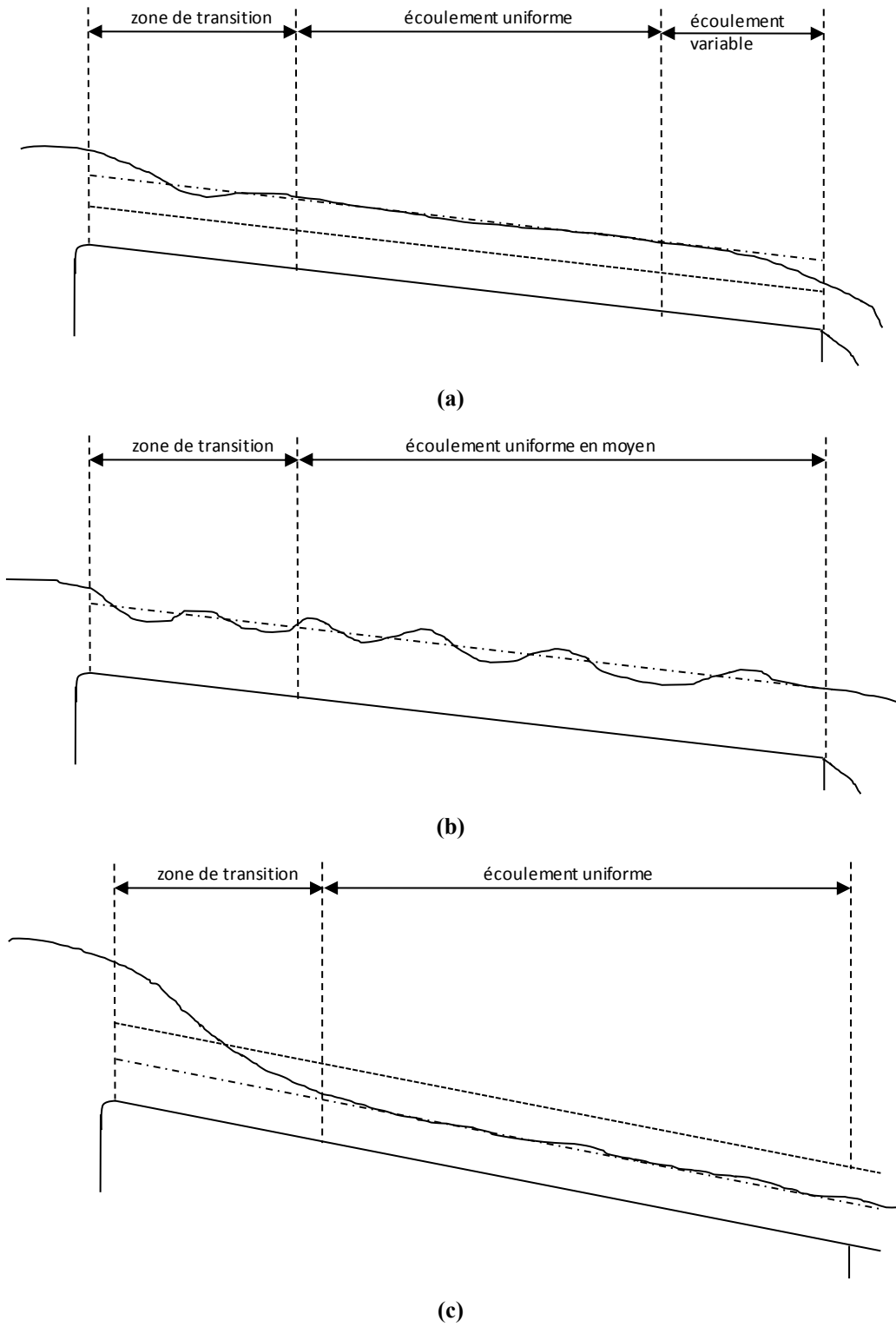


Figure 1.4 : Établissement de l'écoulement uniforme dans un canal de grande longueur.
 (- - -) : Profondeur critique. (- · -) : Profondeur normale de l'écoulement uniforme. (—) : Surface libre

Bien que la condition d'un écoulement uniforme, dans le sens stricte du terme, ne soit pratiquement jamais satisfaite, elle est cependant fréquemment admise lors du calcul des caractéristiques d'un écoulement en canaux et rivières (*Chow*, 1973). Cette approche, bien que simplifiée, donne des résultats assez satisfaisants dans de bon nombre de cas pratiques.

L'écoulement uniforme peut être soit en régime laminaire soit en régime turbulent qui se produit sous de grandes vitesses. A vitesse élevée, l'écoulement uniforme est instable et il est le siège d'un fort entraînement d'air.

Dans les canaux ouverts, l'écoulement uniforme se développe lorsque les forces de résistance s'opposant à l'écoulement sont équilibrées par les forces de gravité. Les forces de résistance sont proportionnelles au carré de la vitesse moyenne V .

Lorsqu'un écoulement entrant dans un canal s'effectue de façon lente, la vitesse et par conséquent la résistance à l'écoulement sont faibles. Les forces de gravité sont alors prédominantes et l'écoulement subit alors une accélération depuis l'amont. La vitesse ainsi que la résistance augmentent au fur et à mesure que l'on se déplace vers l'aval, jusqu'à ce que les forces de gravité soient équilibrées. A cet instant, l'écoulement uniforme apparaît. La zone sur laquelle s'étend l'écoulement accéléré, et au-delà de laquelle l'écoulement uniforme apparaît, est dite zone de transition. Si la longueur du canal est inférieure à la longueur de la zone transitoire, l'écoulement uniforme ne peut être atteint.

Plus à l'aval de l'écoulement uniforme, les forces de gravité deviennent de plus en plus prédominantes en raison de l'accélération que subit l'écoulement. L'écoulement uniforme disparaît alors en laissant place à un écoulement varié. La figure 1.1 montre l'état d'un écoulement à l'entrée et à l'intérieur d'un canal rectangulaire de grande longueur et de différentes pentes géométriques i . La pente i est comparée à la pente critique i_c .

Lorsque la pente i est suave (figure 1.4.a), la zone de transition se présente sous l'aspect d'ondulations. L'écoulement uniforme s'observe au milieu du canal mais varié aux extrémités de celui-ci. D'un point de vue théorique, l'écoulement varié tend vers l'écoulement uniforme de manière graduelle et asymptotique. On considère généralement dans la pratique que la profondeur de l'écoulement reste constante si la variation qu'elle subit n'excède pas 1% à 1,5 % de valeur moyenne de la profondeur normale.

Lorsque la pente i correspond à la pente critique i_c (figure 1.4.b), la surface libre de l'écoulement critique est instable. Des ondulations peuvent se produire au milieu du canal, mais la profondeur oscille autour d'une valeur moyenne et l'écoulement est alors considéré comme étant uniforme.

Lorsque la pente i est supercritique ou prononcée (figure 1.4.c), la surface libre dans la zone transitoire chute de manière graduelle d'un niveau subcritique ou suave à un niveau supercritique ou prononcé. Au-delà de la zone de transition, l'écoulement devient uniforme.

La longueur sur laquelle s'étend la zone transitoire dépend essentiellement du débit volume Q entrant dans le canal ainsi que des caractéristiques de celui-ci telles que la rugosité absolue, la pente et la géométrie d'entrée. D'un point de vue hydrodynamique, la longueur de la zone de transition ne doit pas être inférieure à la longueur pour laquelle, sous des conditions données de l'écoulement, la couche limite est pleinement développée.

Le calcul de la profondeur d'un écoulement uniforme, appelée profondeur normale de l'écoulement est très important. Le classement des profils géométriques par exemple est tributaire de la valeur de la profondeur normale. Comme le montre la figure (1.4.c), la profondeur normale est inférieure à la profondeur critique et c'est cette inégalité qui permet de conclure sur le caractère supercritique ou prononcée de la pente géométrique du canal.

Le calcul de la profondeur normale dans les canaux se base sur les relations dites " relations de l'écoulement normal ". Celles-ci expriment, de manière approximative, la vitesse moyenne V de l'écoulement sous l'hypothèse d'un régime turbulent. Les formules pratiques de l'écoulement uniforme s'expriment généralement sous la forme $V = CR_h^\beta J^\gamma$ où R_h est le rayon hydraulique et J est la pente de la ligne de charge qui correspond également à la pente i . Le paramètre C traduit la résistance de l'écoulement et dépend de V , de R_h , de la rugosité absolue ε caractérisant les parois internes du canal, de la viscosité cinématique du liquide ν et de beaucoup d'autres facteurs.

IV. Quelques formules de l'écoulement uniforme

IV.1. Formule de Chézy

La formule de *Chézy* est probablement la première formule destinée au calcul de l'écoulement uniforme. La vitesse moyenne V s'exprime par :

$$V = C\sqrt{R_h J}$$

(1.5)

Rappelons que R_h est le rayon hydraulique, J est la pente de la ligne de charge totale ou gradient de perte de charge linéaire (J étant également la pente i du canal lorsque l'écoulement est à surface libre) et C est le facteur caractérisant la résistance de l'écoulement. Le facteur C est habituellement appelé coefficient de *Chézy*.

IV.2. Formule de Manning-Strickler

La vitesse moyenne V de l'écoulement uniforme peut être également évaluée par la formule dite de Manning (1891). La vitesse V est liée au coefficient C de résistance de l'écoulement, au rayon hydraulique R_h et à la pente $i = J$ du canal. A l'origine, la formule de Manning-Strickler se présentait sous une forme compliquée, puis elle a été simplifiée pour s'écrire, avec $C = K$:

$$V = KR_h^{2/3} \sqrt{J} \quad (1.6)$$

La relation (1.6) a été ensuite modifiée par plusieurs auteurs pour s'écrire, en unité métrique :

$$V = \frac{1}{n} R_h^{2/3} \sqrt{J} \quad (1.7)$$

(n Selon Manning et $1/n = K$ selon Strickler).

Le tableau 1.1 montre quelques valeurs du coefficient de Strickler et de Manning.

Tableau 1.1 : Coefficients de Strickler K et de Manning n

Caractéristiques	K $\text{m}^{1/3} \cdot \text{s}^{-1}$	$n = 1/K$ $\text{m}^{-1/3} \cdot \text{s}$
Parois très lisses :		
Revêtements en mortier de ciment et sable, très lisses ; planches rabotées ; tôle métallique sans soudures saillantes	100 à 90	0,01 à 0,0111
Mortier lissé	85	0,0119
Parois lisses :		
Planches avec des joints mal soignés : enduit ordinaire ; grès.....	80	0,0125
Béton lisse, canaux en béton avec des joints nombreux	75	0,0134
Maçonnerie ordinaire ; terre exceptionnellement régulière ...	70	0,0142
Parois rugueuses :		
Terre irrégulière ; béton rugueux ou vieux ; maçonnerie vieille ou mal soignée	60	0,0167
Parois très rugueuses :		
Terre très irrégulière avec des herbes : rivières régulières en lit rocheux	50	0,0200
Terre en mauvais état ; rivière en lit de cailloux	40	0,025
Terre complètement à l'abandon : torrents transportant de gros blocs	20 à 15	0,05 à 0,0667

En raison de sa forme simplifiée et aux résultats satisfaisants auxquels elle aboutit, la formule de *Manning-Strickler* est celle qui est largement utilisée pour les écoulements uniformes dans les canaux ouverts.

En comparant la formule de *Manning-Strickler*, exprimée en unité métrique, à celle de *Chézy*, on peut écrire $C = (1/n)R_h^{1/6}$. Ainsi, la formule de *Manning-Strickler* est souvent considérée comme une variante de la formule de *Chézy*.

IV.3. Formule de *Darcy-Weisbach* et évaluation du coefficient de frottement

La formule de *Darcy-Weisbach* exprime la proportionnalité entre le gradient de la perte de charge linéaire J , la vitesse moyenne V de l'écoulement et le diamètre hydraulique $D_h = 4A/P = 4R_h$. Le facteur de proportionnalité étant le coefficient de frottement f . Le gradient J est inversement proportionnel à D_h et proportionnel au carré de la vitesse V :

$$J = \frac{f}{D_h} \frac{V^2}{2g} \quad (1.8)$$

La formule (1.8) est aussi bien valable pour les canaux ouverts que pour les conduites fermées. Le coefficient de frottement f peut être évalué par diverses relations, selon la nature du régime d'écoulement.

La formule de *Colebrook-White* permet d'évaluer le coefficient de frottement f lorsque l'écoulement est en régimes de transition, turbulent rugueux et lisse :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon/D_h}{3,7} + \frac{2,51}{R\sqrt{f}} \right) , \quad R > 2300 \quad (1.9)$$

Dans le cas où le régime d'écoulement est de transition, le coefficient de frottement dépend à la fois de la rugosité relative ε/D_h et du nombre de *Reynolds* R .

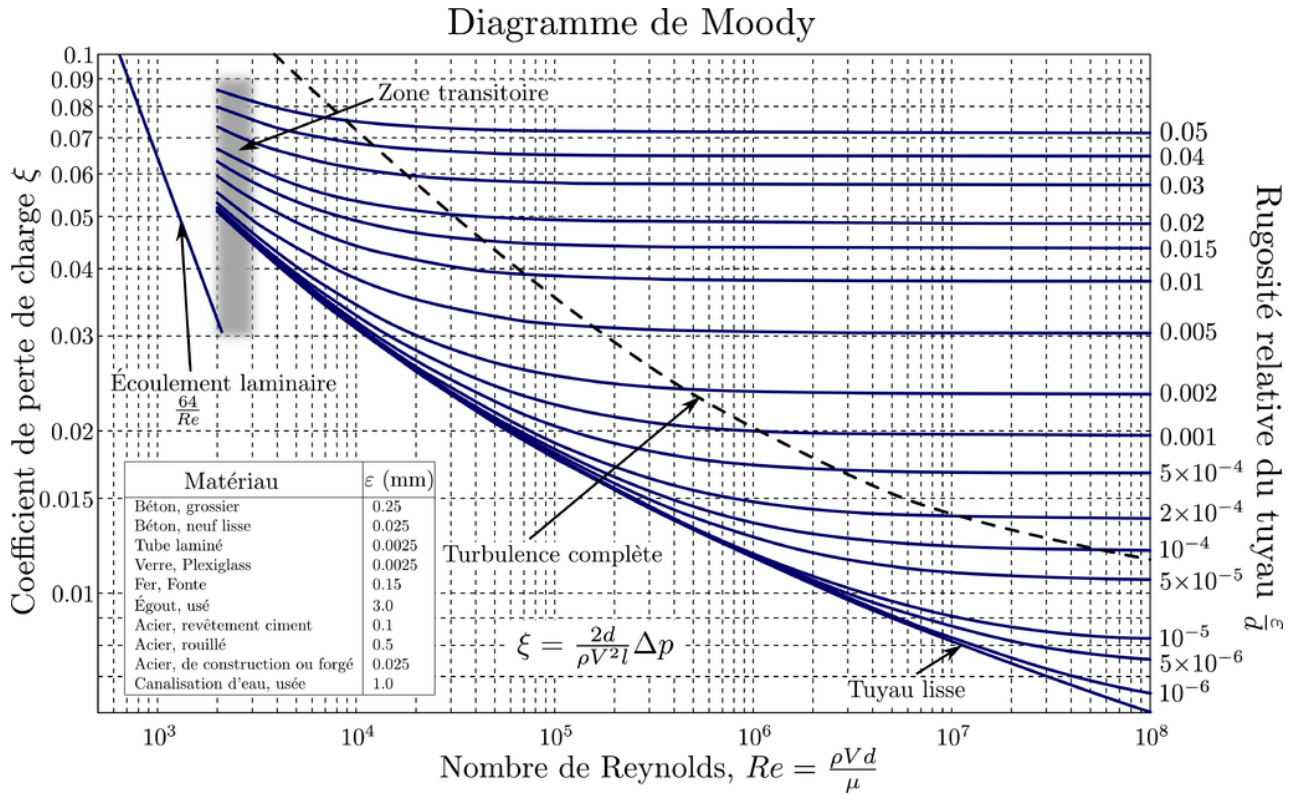


Figure 1.5 : Diagramme de Moody (1944)

La représentation graphique de la relation (1.9) dans un système d'axes de coordonnées à divisions logarithmiques montre que, pour la même valeur de ε/D_h , le coefficient de frottement f diminue lorsque R augmente (Figure 1.5). Pour des valeurs données de ε/D_h et de R , l'évaluation du coefficient de frottement f , par application de la relation (1.9), nécessite l'utilisation d'un procédé itératif. Cependant, une excellente relation approchée de la relation (1.9) a été proposée par *Achour* (1997) :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon/D_h}{3,7} + \frac{4,5}{R} \log \frac{R}{6,97} \right) \quad (1.10)$$

A partir d'une valeur $R = R_{lim}$ dépendant de la valeur de ε/D_h , le coefficient de frottement f demeure pratiquement inchangé avec l'augmentation de R . Cette particularité caractérise la nature de l'écoulement dans la zone de pleine turbulence ou domaine rugueux. Dans ce domaine, le coefficient de frottement f peut être évalué par la relation explicite de *Nikuradse* :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon/D_h}{3,7} \right) \quad (1.11)$$

La relation (1.11) peut être obtenue à partir des relations (1.9) ou (1.10), en écrivant que $R \rightarrow \infty$. Dans le domaine pratiquement lisse correspondant à $\varepsilon/D_h \rightarrow 0$, la relation (1.9) mène à écrire :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{2,51}{R\sqrt{f}} \right) \quad (1.12)$$

Et l'évaluation de f nécessite également l'utilisation un procédé itératif. Dans le même domaine d'écoulement, ce procédé itératif peut être évité par l'application de la relation (1.10) :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{4,5}{R} \log \frac{R}{6,97} \right) \quad (1.13)$$

Dans la large gamme $2,35 \cdot 10^3 \leq R \leq 10^9$, l'application de la relation (1.13) occasionne un écart relatif inférieur à 2 % par rapport à (1.12).

La formule de *Swamee* et *Jain* (1976) permet également d'évaluer de manière explicite le coefficient de frottement f dans le domaine pratiquement lisse :

$$f = \left[2 \log \left(\frac{5,74}{R^{0,9}} \right) \right]^{-2} \quad (1.14)$$

Mais, dans la même gamme de valeurs ci-dessus indiquée de R , l'application de (1.14) occasionne un écart relatif atteignant 2,8 % par rapport à la relation (1.12). Dans une gamme plus restreinte de R telle que $5 \cdot 10^3 < R < 10^8$, cet écart se réduit mais atteint tout de même 1,5 %.

En comparant les relations (1.5) et (1.8), on peut montrer que le coefficient C de *Chézy* est étroitement lié au coefficient de frottement f :

$$C = \sqrt{\frac{8g}{f}} \quad (1.15)$$

V. Conclusion

Le premier chapitre de notre mémoire s'est intéressé à la présentation de l'écoulement uniforme dans les canaux découverts. Après avoir entamé les types et les éléments géométriques des canaux d'une part et la classification des écoulements et les régimes d'écoulement d'autre part, nous avons décrit l'écoulement uniforme en présentant les différentes conditions de son établissement dans un canal découvert de grande longueur selon l'importance de la pente longitudinale. En revanche, nous avons présenté les formules universelles de *Chézy* et de *Manning-Strickler* destinées au calcul de la vitesse moyenne de l'écoulement en fonction du coefficient de résistance de l'écoulement, du rayon hydraulique et de la pente de la ligne d'énergie. Notons que cette dernière correspond à la pente géométrique du canal lorsque l'écoulement est à surface libre. La relation de base de *Darcy-Weisbach* a été également présentée. Cette dernière relation est destinée au calcul de l'écoulement uniforme en charge et à surface libre. Elle exprime le gradient de la perte de charge linéaire en fonction de la vitesse

moyenne de l'écoulement et du diamètre hydraulique. Le facteur de proportionnalité de la formule de *Darcy-Weisbach* est le coefficient de frottement qui peut être calculé par application de la relation de *Colebrook-White* en utilisant un procédé itératif. Cependant, nous avons exposé les formules approchées de *Achour* (1997) et de *Swamee et Jain* (1976) afin de simplifier le calcul du coefficient de frottement. Enfin, la corrélation des relations de *Chézy* et de *Darcy-Weisbach* a permis de lier le coefficient de résistance de l'écoulement de *Chézy* au coefficient de frottement.

Deuxième Chapitre

**Dimensionnement d'un canal à parois
elliptiques et à fond horizontal**

Chapitre II

Dimensionnement d'un canal à parois elliptiques et à fond horizontal

I. Introduction

Ce chapitre a pour objet le dimensionnement d'un canal ouvert à parois elliptiques et à fond horizontal dans l'hypothèse d'un écoulement uniforme. L'étude sera, alors, menée en se basant sur la méthode du modèle rugueux de référence dite méthode MMR. La relation de base qui sera utilisée dans le développement théorique est celle de *Chézy*. Afin d'atteindre notre objectif, nous commencerons par la présentation des caractéristiques géométriques du profil considéré. En effet, les expressions de l'aire de la section mouillée ainsi que du périmètre mouillé seront inspirées à partir de l'étude de *Easa* et *Vatankhah* (2014). Par la suite, l'expression de la largeur de fond du modèle rugueux sera tirée en se basant principalement sur la relation de *Chézy*. Après avoir exprimé la largeur de fond du modèle rugueux, on déterminera le facteur de correction des dimensions linéaires par la relation de *Achour* et *Bedjaoui* (2006). En tenant compte de ces deux dernières considérations, la largeur de fond du canal étudié sera facilement déduite. Les autres dimensions du canal telles que : La hauteur totale du canal et la largeur horizontale des parties elliptiques seront aisément déterminées à partir des paramètres de forme spécifiques à la section choisie. La profondeur normale sera également déduite. Le chapitre sera terminé par la présentation d'un exemple d'application afin de montrer la démarche à suivre pour le dimensionnement du canal ainsi que pour vérifier la validité de la méthode qui sera proposée.

II. Caractéristiques géométriques du canal étudié

La géométrie de la section elliptique proposée est illustrée dans figure 2.1 (*Easa* et *Vatankhah*, 2014). La section considérée est une forme complexe comportant une partie intermédiaire rectangulaire de largeur b avec deux côtés de forme elliptique de largeur horizontale B (demi-axe horizontal de l'ellipse). La hauteur du canal est désignée par Y (demi-axe vertical de l'ellipse) et la profondeur normale de l'écoulement dans le canal est notée par y_n .

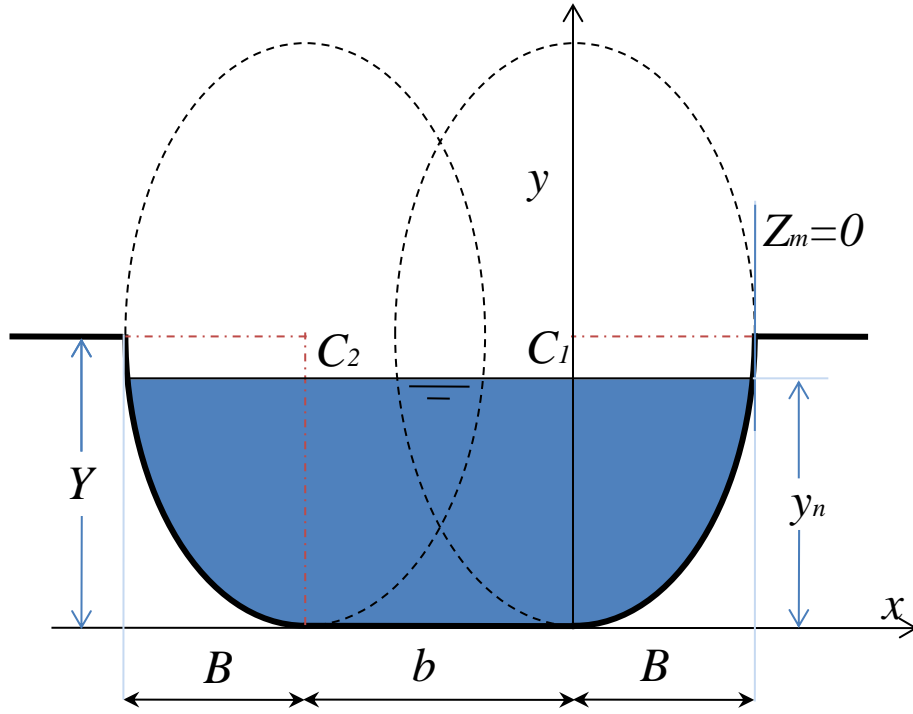


Figure 2.1 : Schéma de définition du canal elliptique à fond horizontal (Easa et Vatankhah, 2014).

II.1. Aire de la section mouillée

Afin d'obtenir l'expression de l'aire de la section mouillée A , Easa et Vatankhah (2014) ont procédé à l'intégration de la fonction de la partie elliptique du canal. En ajoutant la surface de la partie rectangulaire au double de la surface de la forme elliptique, les auteurs ont pu exprimer l'aire de la section mouillée A comme suit :

$$A = by_n + \frac{1}{2}BY\pi + \frac{B}{Y}(y_n - Y)\sqrt{y_n(2Y - y_n)} - BY \sin^{-1}\left(\frac{Y - y_n}{Y}\right) \quad (2.1)$$

Cette dernière relation s'écrit, en considérant le facteur en commun b^2 :

$$A = b^2 \left[\frac{y_n}{b} + \frac{1}{2} \frac{BY}{b^2} \pi + \frac{B}{Y} \left(\frac{y_n}{b} - \frac{Y}{b} \right) \sqrt{\frac{y_n}{b} \left(\frac{2Y}{b} - \frac{y_n}{b} \right)} - \frac{BY}{b^2} \sin^{-1} \left(1 - \frac{y_n}{Y} \right) \right] \quad (2.2)$$

Ou bien :

$$A = b^2 \left[\frac{y_n}{b} + \frac{1}{2} \frac{BY}{b^2} \frac{y_n^2}{y_n^2} \pi + \frac{B}{Y} \frac{y_n}{y_n} \left(\frac{y_n}{b} - \frac{Y}{b} \frac{y_n}{y_n} \right) \sqrt{\frac{y_n}{b} \left(\frac{2Y}{b} \frac{y_n}{y_n} - \frac{y_n}{b} \right)} - \frac{BY}{b^2} \frac{y_n^2}{y_n^2} \sin^{-1} \left(1 - \frac{y_n}{Y} \right) \right] \quad (2.3)$$

Dans l'objectif de mener à bien notre étude, on a suggéré d'établir les paramètres de forme suivants :

$$\eta = \frac{y_n}{b} ; \xi = \frac{y_n}{Y} ; \zeta = \frac{y_n}{B}$$

Ces trois paramètres de forme ou rapports d'aspect peuvent être considérés comme profondeurs relatives pour le profil géométrique choisit. Il est important de signaler que pour résoudre le problème de dimensionnement de ce type de canaux, ces paramètres doivent être imposés.

En tenant compte de ces trois paramètres de forme, la relation (2.3) peut s'écrire :

$$A = b^2 \left[\eta + \frac{1}{2} \frac{\eta^2}{\xi \zeta} \pi + \frac{\xi}{\zeta} \left(\eta - \frac{\eta}{\xi} \right) \sqrt{\eta \left(2 \frac{\eta}{\xi} - \eta \right)} - \frac{\eta^2}{\xi \zeta} \sin^{-1}(1 - \xi) \right]$$

Après réarrangement et simplification, cette dernière relation s'écrit :

$$A = b^2 \eta^2 \left[\eta^{-1} + \frac{\pi}{2 \xi \zeta} + \frac{\xi - 1}{\zeta} \sqrt{2 \xi^{-1} - 1} - \frac{1}{\xi \zeta} \sin^{-1}(1 - \xi) \right] \quad (2.4)$$

On pose la fonction adimensionnelle σ comme suit :

$$\sigma = \eta^2 \left[\eta^{-1} + \frac{\pi}{2 \xi \zeta} + \frac{\xi - 1}{\zeta} \sqrt{2 \xi^{-1} - 1} - \frac{1}{\xi \zeta} \sin^{-1}(1 - \xi) \right] \quad (2.5)$$

La relation (2.4) s'écrit alors plus simplement :

$$A = \sigma b^2 \quad (2.6)$$

La relation (2.6) montre ainsi que l'aire de la section mouillée A d'un canal à parois elliptique et à fond horizontal peut s'exprimer en fonction de la dimension linéaire b élevée à la puissance 2 multiplier par une fonction adimensionnelle tenant compte la forme du canal considéré.

II.2. Le périmètre mouillé

Easa et *Vatankhah* (2014) suggèrent que le périmètre mouillé P d'un canal à parois elliptiques et à fond horizontal (Figure 2.1) peut s'écrire approximativement comme suit :

$$\begin{aligned} P = & b + 0,1694 y_n \sqrt{1 + \left(\frac{B}{Y} \right)^2 \frac{\left[0,015 \left(\frac{y_n}{Y} \right) - 1,1289 \right]^2}{1 - \left[0,0236 \left(\frac{y_n}{Y} \right) - 1 \right]^2}} \\ & + 1,0389 y_n \sqrt{1 + \left(\frac{B}{Y} \right)^2 \frac{\left[0,6187 \left(\frac{y_n}{Y} \right) - 1,5398 \right]^2}{1 - \left[0,7188 \left(\frac{y_n}{Y} \right) - 1 \right]^2}} \\ & + 0,7987 y_n \sqrt{1 + \left(\frac{B}{Y} \right)^2 \frac{\left[0,725 \left(\frac{y_n}{Y} \right) - 0,8792 \right]^2}{1 - \left[0,6528 \left(\frac{y_n}{Y} \right) - 1 \right]^2}} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Ou bien :

$$P = b \left\{ \begin{aligned} &+ 0,1694 \frac{y_n}{b} \sqrt{1 + \left(\frac{B}{Y}\right)^2 \left(\frac{y_n}{y_n}\right)^2 \frac{\left[0,015\left(\frac{y_n}{Y}\right) - 1,1289\right]^2}{1 - \left[0,0236\left(\frac{y_n}{Y}\right) - 1\right]^2}} \\ &+ 1,0389 \frac{y_n}{b} \sqrt{1 + \left(\frac{B}{Y}\right)^2 \left(\frac{y_n}{y_n}\right)^2 \frac{\left[0,6187\left(\frac{y_n}{Y}\right) - 1,5398\right]^2}{1 - \left[0,7188\left(\frac{y_n}{Y}\right) - 1\right]^2}} \\ &+ 0,7987 \frac{y_n}{b} \sqrt{1 + \left(\frac{B}{Y}\right)^2 \left(\frac{y_n}{y_n}\right)^2 \frac{\left[0,725\left(\frac{y_n}{Y}\right) - 0,8792\right]^2}{1 - \left[0,6528\left(\frac{y_n}{Y}\right) - 1\right]^2}} \end{aligned} \right. \quad (2.8)$$

On considère ici les mêmes paramètres de forme utilisés dans le paragraphe précédent

$\left(\eta = \frac{y_n}{b} ; \xi = \frac{y_n}{Y} ; \zeta = \frac{y_n}{B}\right)$. En tenant compte de ces paramètres de forme, la relation (2.8)

devient :

$$P = b \left\{ \begin{aligned} &+ 0,1694 \eta \sqrt{1 + \left(\frac{\xi}{\zeta}\right)^2 \frac{\left[0,015\xi - 1,1289\right]^2}{1 - \left[0,0236\xi - 1\right]^2}} \\ &+ 1,0389 \eta \sqrt{1 + \left(\frac{\xi}{\zeta}\right)^2 \frac{\left[0,6187\xi - 1,5398\right]^2}{1 - \left[0,7188\xi - 1\right]^2}} \\ &+ 0,7987 \eta \sqrt{1 + \left(\frac{\xi}{\zeta}\right)^2 \frac{\left[0,725\xi - 0,8792\right]^2}{1 - \left[0,6528\xi - 1\right]^2}} \end{aligned} \right. \quad (2.9)$$

On pose la fonction adimensionnelle φ , soit :

$$\varphi = \left[\begin{array}{l} 1 + 0,1694\eta \sqrt{1 + \left(\frac{\xi}{\zeta}\right)^2 \frac{[0,015\xi - 1,1289]^2}{1 - [0,0236\xi - 1]^2}} \\ + 1,0389\eta \sqrt{1 + \left(\frac{\xi}{\zeta}\right)^2 \frac{[0,6187\xi - 1,5398]^2}{1 - [0,7188\xi - 1]^2}} \\ + 0,7987\eta \sqrt{1 + \left(\frac{\xi}{\zeta}\right)^2 \frac{[0,725\xi - 0,8792]^2}{1 - [0,6528\xi - 1]^2}} \end{array} \right] \quad (2.10)$$

Tenant compte de cette dernière considération, le périmètre mouillé exprimé par la relation (2.9) s'écrit plus simplement :

$$P = \varphi b \quad (2.11)$$

Dans la relation (2.11) la fonction φ est adimensionnelle et dépend exclusivement de la forme considérée.

III. Expression du débit :

Le débit volume peut être exprimé à partir de la relation (1.5) de *Chézy* qui est citée dans le chapitre précédent et dont on rappelle son expression ici.

$$V = C \sqrt{R_h} J \quad (1.5)$$

L'équation de continuité suggère que le débit volume Q est égal à la vitesse moyenne de l'écoulement V multiplié par l'aire de la section mouillée A , soit :

$$Q = VA \quad (2.12)$$

En tenant compte de la relation (1.5) de *Chézy*, la relation (2.12) devient :

$$Q = C \sqrt{R_h} i A \quad (2.13)$$

Ou bien :

$$Q = C R_h^{1/2} i^{1/2} A \quad (2.14)$$

L'expression du rayon hydraulique a été présentée au cours du chapitre précédent par la relation (1.1) :

$$R_h = \frac{A}{P} \quad (1.1)$$

Le débit volume s'écrit en vertu de cette dernière relation :

$$Q = C \frac{A^{1/2}}{P^{1/2}} i^{1/2} A$$

Ou bien :

$$Q = C \frac{A^{3/2}}{P^{1/2}} i^{1/2} \quad (2.15)$$

IV. Caractéristiques du modèle rugueux de référence

Le modèle rugueux considéré ici est en fait un canal également à parois elliptiques et à fond horizontal (Figure 2.2).

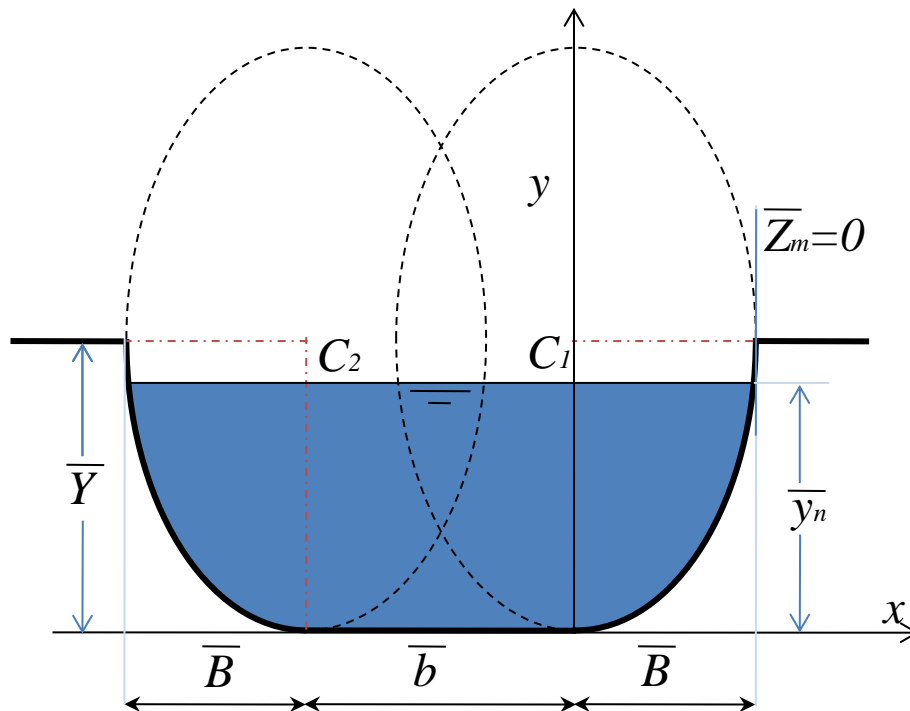


Figure 2.2 : Schéma de définition du modèle rugueux de référence d'un canal à parois elliptiques et à fond horizontal.

Notons que toutes les caractéristiques géométriques et hydrauliques du modèle rugueux se distinguent par le symbole " $\bar{\quad}$ ".

Selon la figure 2.2, \bar{b} désigne la largeur du fond horizontal du canal et \bar{B} et \bar{Y} sont les demi-axes des ellipses. \bar{B} peut, aussi, être considéré comme la largeur horizontale de la partie elliptique du modèle et \bar{Y} comme la hauteur du modèle. En outre, \bar{y}_n représente la profondeur normale de l'écoulement dans le modèle rugueux qui écoule un débit volume \bar{Q} , d'un liquide de viscosité cinématique $\bar{\nu}$ et sous une pente longitudinale \bar{i} . Le modèle rugueux est caractérisé par une rugosité absolue $\bar{\varepsilon}$.

Le nombre de *Reynolds* caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux est \bar{R} et le coefficient de frottement est \bar{f} .

Par ailleurs, le débit volume \bar{Q} peut être régi par la relation (2.15) appliquée au modèle rugueux de référence, soit :

$$\bar{Q} = \bar{C} \frac{\bar{A}^{-3/2}}{\bar{P}^{1/2}} \bar{i} \quad (2.16)$$

Les inconnus du problème sont principalement les dimensions du canal qui sont la largeur de fond du canal b , la largeur de la partie elliptique B et la hauteur du canal Y (Figure 2.1). Pour cela on doit considérer que le débit ainsi que la pente longitudinale sont les mêmes dans le canal et dans le modèle rugueux, soit :

$$\bar{Q} = Q \text{ et } \bar{i} = i \quad (2.17)$$

La relation (2.16) s'écrit alors :

$$Q = \bar{C} \frac{\bar{A}^{-3/2}}{\bar{P}^{1/2}} i^{1/2} \quad (2.18)$$

Par contre, la profondeur de l'écoulement dans le canal et dans le modèle ainsi que les dimensions du canal et du modèle ne sont pas les mêmes, soit alors :

$$\left. \begin{array}{l} \bar{y}_n \neq y_n \\ \bar{b} \neq b \\ \bar{Y} \neq Y \\ \bar{B} \neq B \end{array} \right\} \quad (2.19)$$

En revanche, le coefficient de résistance de l'écoulement de *Chézy* dans le modèle rugueux s'écrit selon la relation (1.15) :

$$\bar{C} = \sqrt{\frac{8g}{\bar{f}}} \quad (2.19)$$

Selon *Achour* (2007), le coefficient de frottement \bar{f} de l'écoulement dans le modèle rugueux de référence est constant et vaut 1/16, soit :

$$\bar{f} = \frac{1}{16} \quad (2.20)$$

En remplaçant la relation (2.20) dans la relation (2.19), on obtient :

$$\bar{C} = 8\sqrt{2g} \quad (2.21)$$

En insérant (2.21) dans la relation (2.18), on obtient :

$$Q = 8\sqrt{2g} \frac{\bar{A}^{-3/2}}{\bar{P}^{1/2}} i^{1/2}$$

(2.22)

L'aire de la section mouillée \bar{A} du modèle rugueux de référence peut s'écrire, en vertu de la relation (2.6) :

$$\bar{A} = \bar{\sigma} \bar{b}^2 \quad (2.23)$$

Comme le modèle rugueux de référence (Figure 2.2) a la même que celle du canal réel à dimensionner (Figure 2.1), les paramètres de forme $\bar{\eta}$, $\bar{\xi}$ et $\bar{\zeta}$ du modèle rugueux de référence ont, alors, les mêmes valeurs que ceux η , ξ et ζ du canal à dimensionner, et la fonction σ dépend de ces paramètres de forme, on peut, par conséquent écrire :

$$\bar{\sigma} = \sigma = f(\eta, \xi, \zeta) \quad (2.24)$$

L'aire de la section mouillée du modèle rugueux s'écrit, en vertu de la relation (2.23) :

$$\bar{A} = \bar{\sigma} \bar{b}^2 \quad (2.25)$$

En outre, le périmètre mouillé du modèle rugueux s'écrit, en vertu de la relation (2.11) :

$$\bar{P} = \bar{\varphi} \bar{b} \quad (2.26)$$

Puisque les deux canaux des figures 2.1 et 2.2 ont la même forme et les mêmes paramètres de forme, alors $\bar{\varphi} = \varphi$, et le périmètre mouillé du modèle rugueux s'écrit, selon la relation (2.26) :

$$\bar{P} = \varphi \bar{b} \quad (2.27)$$

En tenant compte des relations (2.25) et (2.27), la relation (2.22) s'écrit alors :

$$Q = 8\sqrt{2g} \frac{(\bar{\sigma} \bar{b}^2)^{3/2}}{(\varphi \bar{b})^{1/2}} i^{1/2} \quad (2.28)$$

Après réarrangement et simplification, la largeur du fond du modèle rugueux de référence s'écrit, en tenant compte de la relation (2.28) :

$$\bar{b} = \left[\frac{Q}{8\sqrt{2gi}} \right]^{2/5} \frac{\varphi^{1/5}}{\bar{\sigma}^{3/5}} \quad (2.29)$$

Le diamètre hydraulique du modèle rugueux \bar{D}_h s'exprime par la relation :

$$\bar{D}_h = 4 \frac{\bar{A}}{\bar{P}} \quad (2.30)$$

Le nombre de *Reynolds* \bar{R} caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux est :

$$\bar{R} = \frac{\bar{V} \bar{D}_h}{\nu} \quad (2.31)$$

En tenant compte de l'équation de continuité : $\bar{Q} = \bar{V}\bar{A}$ et de la relation (2.30), la relation (2.31) devient :

$$\bar{R} = \frac{4\bar{Q}}{P\bar{v}} \quad (2.32)$$

Il est important de signaler que le liquide dans le canal étudié et dans le modèle est le même, cela permet de d'assumer l'égalité suivante : $\bar{v} = v$. En tenant compte de cette dernière considération et de l'égalité $\bar{Q} = Q$ figurant dans la relation (2.17), la relation (2.32) peut s'écrire :

$$\bar{R} = \frac{4Q}{Pv} \quad (2.33)$$

V. Facteur de correction des dimensions linéaires

La méthode du modèle rugueux énonce que toute dimension linéaire a d'une conduite ou d'un canal et la dimension linéaire homologue \bar{a} du modèle rugueux sont liées par la relation suivante, applicable à l'ensemble du domaine turbulent (Achour et Bedjaoui, 2006) :

$$a = \psi \bar{a} \quad (2.34)$$

Où ψ est un facteur adimensionnel de correction des dimensions linéaires, inférieur à l'unité. Ce facteur est régi par l'équation explicite suivante (Achour et Bedjaoui, 2006 ; 2012) :

$$\psi = 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon/\bar{D}_h}{4,75} + \frac{8,5}{\bar{R}} \right) \right]^{-2/5} \quad (2.35)$$

Dans la relation (2.35), \bar{D}_h et \bar{R} représentent respectivement le diamètre hydraulique du modèle rugueux et le nombre de Reynolds caractérisant l'écoulement dans ce modèle. Ces paramètres sont donnés par les relations (2.30) et (2.33) respectivement.

VI. Etapes de dimensionnement du canal

Le dimensionnement du canal étudié revient à calculer les dimensions linéaires du canal à fond horizontal et à parois elliptique. Ces dimensions linéaires sont pour rappel la profondeur normale de l'écoulement y_n , la largeur de fond horizontal du canal b , la largeur horizontale de la partie elliptique B et la hauteur du canal Y . Afin de résoudre le problème, les paramètres suivants doivent être connus : Q , i , η , ξ , ζ , ε et v .

Ainsi, pour dimensionner le canal, les étapes de calcul suivantes sont recommandées :

- i. Calculer les fonctions $\sigma = f(\eta, \xi, \zeta)$ et $\varphi = f(\eta, \xi, \zeta)$ respectivement par les relations (2.5) et (2.10).

- ii. Déterminer la largeur de fond horizontal du canal \bar{b} par la relation (2.29).
- iii. Déduire le périmètre mouillé du modèle rugueux \bar{P} et l'aire de la section mouillée \bar{A} du modèle rugueux respectivement par les relations (2.27) et (2.25).
- iv. Calculer le nombre de *Reynolds* caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux \bar{R} selon la relation (2.33).
- v. Calculer le diamètre hydraulique du modèle rugueux \bar{D}_h selon la relation (2.30).
- vi. Avec les valeurs calculées de \bar{R} et \bar{D}_h , déduire la valeur du facteur de correction des dimensions linéaires ψ selon la relation (2.35).
- vii. Connaissant les valeurs de \bar{b} et ψ , déduire la valeur de la largeur de fond du canal étudié b conformément à la relation (2.34).
- viii. Connaissant la valeur de la largeur b et du paramètre de forme η , déduire la valeur de la profondeur normale y_n , soit : $y_n = b\eta$.
- ix. A partir de la valeur de la profondeur normale y_n et des paramètres de forme ξ et ζ , déduire la valeur de Y et de B , comme suit : $Y = y_n/\xi$ et $B = y_n/\zeta$.

VII. Exemple d'application

Considérons un canal à fond horizontal et à parois elliptiques (Figure 2.1). Dimensionner le canal, sachant que :

$$Q = 16,653 \text{ m}^3/\text{s}, i = 10^{-3}, \eta = 0,5, \xi = 0,8, \zeta = 0,6, \varepsilon = 10^{-4} \text{ m}, \nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}.$$

Solution :

- i. Selon les relations (2.5) et (2.10) les fonctions σ et φ sont respectivement :

$$\sigma = \eta^2 \left[\eta^{-1} + \frac{\pi}{2\xi\zeta} + \frac{\xi-1}{\zeta} \sqrt{2\xi^{-1}-1} - \frac{1}{\xi\zeta} \sin^{-1}(1-\xi) \right]$$

$$\sigma = 0,5^2 \left[0,5^{-1} + \frac{\pi}{2 \times 0,8 \times 0,6} + \frac{0,8-1}{0,6} \sqrt{2 \times 0,8^{-1} - 1} - \frac{1}{0,8 \times 0,6} \sin^{-1}(1-0,8) \right]$$

$$\sigma = 1,111187097$$

Et :

$$\varphi = \left[\begin{aligned} & 1 + 0,1694\eta \sqrt{1 + \left(\frac{\xi}{\zeta}\right)^2 \frac{[0,015\xi - 1,1289]^2}{1 - [0,0236\xi - 1]^2}} + 1,0389\eta \sqrt{1 + \left(\frac{\xi}{\zeta}\right)^2 \frac{[0,6187\xi - 1,5398]^2}{1 - [0,7188\xi - 1]^2}} \\ & + 0,7987\eta \sqrt{1 + \left(\frac{\xi}{\zeta}\right)^2 \frac{[0,725\xi - 0,8792]^2}{1 - [0,6528\xi - 1]^2}} \end{aligned} \right]$$

$$\varphi = \left[\begin{array}{l} 1 + 0,1694 \times 0,5 \sqrt{1 + \left(\frac{0,8}{0,6}\right)^2 \frac{[0,015 \times 0,8 - 1,1289]^2}{1 - [0,0236 \times 0,8 - 1]^2}} + 1,0389 \times 0,5 \sqrt{1 + \left(\frac{0,8}{0,6}\right)^2 \frac{[0,6187 \times 0,8 - 1,5398]^2}{1 - [0,7188 \times 0,8 - 1]^2}} \\ + 0,7987 \times 0,5 \sqrt{1 + \left(\frac{0,8}{0,6}\right)^2 \frac{[0,725 \times 0,8 - 0,8792]^2}{1 - [0,6528 \times 0,8 - 1]^2}} \end{array} \right]$$

$$\varphi = 3,04964722$$

- ii. La largeur de fond horizontal du modèle rugueux \bar{b} peut être déterminée par application de la relation (2.29).

$$\bar{b} = \left[\frac{Q}{8\sqrt{2gi}} \right]^{2/5} \frac{\varphi^{1/5}}{\sigma^{3/5}}$$

$$\bar{b} = \left[\frac{16,653}{8\sqrt{2 \times 9,81 \times 0,001}} \right]^{2/5} \frac{3,04964722^{1/5}}{1,111187097^{3/5}} = 3,4530177 \text{ m}$$

- iii. Le périmètre mouillé du modèle rugueux \bar{P} et l'aire de la section mouillée du modèle rugueux \bar{A} peuvent être calculés respectivement à partir des relations (2.27) et (2.25), soit :

$$\bar{P} = \varphi \bar{b}$$

$$\bar{P} = 3,04964722 \times 3,4530177 = 10,5304858 \text{ m}$$

Et :

$$\bar{A} = \sigma \bar{b}^2$$

$$\bar{A} = 1,111187097 \times 3,4530177^2 = 13,2490518 \text{ m}^2$$

- iv. En vertu de la relation (2.33), le nombre de Reynolds \bar{R} est tel que :

$$\bar{R} = \frac{4Q}{P\nu}$$

$$\bar{R} = \frac{4 \times 16,653}{10,5304858 \times 10^{-6}} = 6325634,07$$

- v. Le diamètre hydraulique \bar{D}_h du modèle rugueux est donné par la relation (2.30), soit :

$$\bar{D}_h = 4 \frac{\bar{A}}{\bar{P}}$$

$$\bar{D}_h = 4 \times \frac{13,2490518}{10,5304858} = 5,03264599 \text{ m}$$

vi. Selon la relation (2.35), le facteur de correction des dimensions linéaires ψ est :

$$\psi = 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon/\bar{D}_h}{4,75} + \frac{8,5}{R} \right) \right]^{-2/5}$$

$$\psi = 1,35 \left[-\log \left(\frac{10^{-4}/5,03264599}{4,75} + \frac{8,5}{6325634,07} \right) \right]^{-2/5} = 0,69505886$$

vii. La valeur recherchée de la largeur de fond horizontal du canal b est donnée en vertu de la relation fondamentale (2.34):

$$b = \psi \bar{b}$$

$$b = 0,69505886 \times 3,4530177 = 2,40005054 \text{ m} \approx 2,4 \text{ m}$$

viii. La valeur de la profondeur normale y_n est directement déduite comme suit :

$$y_n = \eta b$$

$$y_n = 0,5 \times 2,40005054 = 1,20002527 \text{ m} \approx 1,2 \text{ m}$$

ix. A partir de la valeur de la profondeur normale y_n on déduit la valeur de la hauteur du canal Y et de la largeur horizontale de la partie elliptique B comme suit :

$$Y = y_n / \xi$$

$$Y = 1,20002527 / 0,8 = 1,50003159 \text{ m} \approx 1,5 \text{ m}$$

Et :

$$B = y_n / \zeta$$

$$B = 1,20002527 / 0,6 = 2,00004212 \text{ m} \approx 2 \text{ m}$$

x. Cette étape vise à vérifier les calculs effectués en déterminant la pente longitudinale i par application de la relation de *Darcy - Weisbach* citée dans le chapitre précédent :

$$J = \frac{f}{D_h} \frac{V^2}{2g} \quad (1.8)$$

En tenant compte de l'équation de continuité $Q = VA$, la relation (1.8) devient :

$$i = \frac{f}{D_h} \frac{Q^2}{2gA^2} \quad (2.36)$$

La pente qui sera déterminée par la relation (2.36) doit être égale à celle donnée à l'énoncé de l'exemple d'application.

Ainsi, selon la méthode du modèle rugueux, le coefficient de frottement f et le facteur de correction des dimensions linéaires ψ sont liés par la relation suivante (Achour, 2007) :

$$f = \frac{\psi^5}{16} = \frac{0,69505886^5}{16} = 0,01013883$$

Alors, selon la relation (2.11), le périmètre mouillé P est :

$$P = \varphi b$$

$$P = 3,04964722 \times 2,40005054 = 7,31930747 \text{ m}$$

En outre, selon la relation (2.6), l'aire de la section mouillée A est :

$$A = \sigma b^2$$

$$A = 1,111187097 \times 2,40005054^2 = 6,40070727 \text{ m}^2$$

Le diamètre hydraulique sera par conséquent :

$$D_h = 4 \frac{A}{P}$$

$$D_h = 4 \times \frac{6,40070727}{7,31930747} = 3,49798518 \text{ m}$$

En vertu de la relation (2.36), la pente longitudinale i est :

$$i = \frac{f}{D_h} \frac{Q^2}{2gA^2}$$

$$i = \frac{0,01013883}{3,49798518} \frac{16,653^2}{2 \times 9,81 \times 6,40070727^2} = 0.001$$

Comme nous pouvons le constater, la pente i ainsi calculée correspond bien à celle donnée à l'énoncé du problème, ce qui permet de conclure à la validité des calculs effectués.

VIII. Conclusion

Ce chapitre a eu pour objectif le dimensionnement d'un canal ouvert à fond horizontal et à parois latérales de forme elliptique. Le dimensionnement de ce type de canaux requiert la détermination de la largeur de fond horizontal du canal, la largeur horizontale de la partie elliptique et la hauteur du canal. La profondeur normale est également un paramètre à déterminer lors de dimensionnement du canal. Afin d'aboutir à notre objectif, nous avons choisi d'utiliser la méthode du modèle rugueux de référence qui permet d'obtenir des relations explicites permettant le calcul directe des différents paramètres hydrauliques recherchés. En effet, à partir de l'étude de Easa et Vatankhah (2014), nous avons exprimé l'aire de la section mouillée ainsi que le périmètre mouillé en fonction de la largeur horizontale de fond du canal et d'une fonction tenant compte exclusivement de la forme du canal. Par la suite, nous avons déterminé les

caractéristiques du modèle rugueux de référence y compris la largeur de fond horizontal du modèle rugueux. Ce dernier paramètre a été exprimé à partir de la relation de *Chézy* appliquée à la méthode MMR. En outre, le facteur de correction des dimensions linéaires proposé par *Achour* et *Bedjaoui* (2006) a été présenté. Ce facteur de correction a été utilisé pour déduire la largeur de fond horizontal du canal étudié. Par ailleurs, la profondeur normale de l'écoulement a été exprimée en fonction du paramètre de forme η et de la largeur de fond horizontal du canal. Par la suite, la largeur horizontale de la partie elliptique et la hauteur du canal peuvent être déterminées à partir de la profondeur normale de l'écoulement et des paramètres de forme ζ et ξ respectivement. Enfin, un exemple d'application a été proposé afin de montrer l'efficacité et la validité de la démarche de dimensionnement exposée.

Troisième Chapitre

**Calcul de la profondeur normale dans un
canal à parois elliptiques et à fond
horizontal**

Chapitre III

Calcul de la profondeur normale dans un canal à parois elliptiques et à fond horizontal

I. Introduction

L'objectif principal de ce chapitre est de proposer une approche théorique au calcul explicite de la profondeur normale de l'écoulement dans un canal à fond horizontal et à parois elliptiques. Les caractéristiques géométriques de ce canal seront montrées et adaptées au cas d'étude. Les équations de base sur lesquelles s'articule notre étude seront exposées. En outre, les caractéristiques du modèle rugueux de référence seront développées d'une manière claire et détaillée. Par la suite, les étapes de calcul de la profondeur normale de l'écoulement seront exposées et classées pour rendre facile l'utilisation de l'approche théorique qui sera proposée. Enfin, un exemple d'application pratique sera présenté pour montrer la démarche de calcul et l'efficacité de la méthode qui sera développée.

II. Caractéristiques géométriques du canal considéré

Le canal considéré est un canal ouvert à parois latérales elliptiques et à fond horizontal, il est schématisé dans la figure 2.1 dans le chapitre précédent.

II.1. Aire de la section mouillée

L'aire de la section mouillée A du canal a été exprimée par *Easa* et *Vatankhah* (2014) comme il a été indiqué au cours du chapitre précédent. Son expression est rappelée ci-dessous :

$$A = by_n + \frac{1}{2}BY\pi + \frac{B}{Y}(y_n - Y)\sqrt{y_n(2Y - y_n)} - BY \sin^{-1}\left(\frac{Y - y_n}{Y}\right) \quad (2.1)$$

Cette dernière relation sera exploitée ici d'une manière différente à celle effectuée dans le chapitre précédent. En effet, elle peut s'écrire sous la forme suivante :

$$A = b^2 \left[\frac{y_n}{b} + \frac{1}{2} \frac{BY}{b^2} \pi + \frac{B}{Y} \frac{b}{b} \left(\frac{y_n}{b} - \frac{Y}{b} \right) \sqrt{\frac{y_n}{b} \left(\frac{2Y}{b} - \frac{y_n}{b} \right)} - \frac{BY}{b^2} \sin^{-1} \left(1 - \frac{y_n}{Y} \frac{b}{b} \right) \right] \quad (3.1)$$

La nature de l'étude dans ce chapitre nécessite d'introduire la profondeur relative suivante :

$$\eta = y_n/b \quad (3.2)$$

Et les largeurs relatives suivantes :

$$\lambda = b/B \quad (3.3)$$

Et :

$$\tau = b/Y \quad (3.4)$$

Ces trois derniers paramètres peuvent être considérés comme paramètres de forme relatifs à la géométrie du profil liquide considéré.

L'objectif de la présente étude est la détermination de la profondeur normale de l'écoulement. Cela revient à déterminer d'abord la valeur du paramètre de forme η exprimé par la relation 3.2. Il est important d'indiquer que, dans ce cas, les dimensions du canal sont connues. Ces dimensions sont la largeur de fond horizontal b , la largeur de la partie elliptique B et la hauteur du canal Y . Par conséquent, les paramètres de forme λ et τ sont calculables en utilisant les relations (3.3) et (3.4) respectivement.

En remplaçant les relations (3.2), (3.3) et (3.4) dans la relation (3.1) on obtient :

$$A = b^2 \left[\eta + \frac{\pi}{2\lambda\tau} + \frac{\tau}{\lambda} \left(\eta - \frac{1}{\tau} \right) \sqrt{\eta \left(\frac{2}{\tau} - \eta \right)} - \frac{1}{\lambda\tau} \sin^{-1}(1 - \eta\tau) \right] \quad (3.5)$$

Après réarrangement et simplification, cette dernière relation s'écrit :

$$A = \frac{b^2}{\lambda} \left[\eta\lambda + \frac{\pi}{2\tau} + (\eta\tau - 1) \sqrt{\eta \left(\frac{2}{\tau} - \eta \right)} - \frac{1}{\tau} \sin^{-1}(1 - \eta\tau) \right] \quad (3.6)$$

On pose la fonction adimensionnelle δ comme suit :

$$\delta = \frac{1}{\lambda} \left[\eta\lambda + \frac{\pi}{2\tau} + (\eta\tau - 1) \sqrt{\eta \left(\frac{2}{\tau} - \eta \right)} - \frac{1}{\tau} \sin^{-1}(1 - \eta\tau) \right] \quad (3.7)$$

En remplaçant la relation (3.7) dans la relation (3.6), on obtient :

$$A = \delta b^2 \quad (3.8)$$

Dans la relation (3.8) la fonction δ est adimensionnelle et dépend exclusivement de la forme considérée.

II.2. Périmètre mouillé

Le périmètre mouillé a , également, été par *Easa* et *Vatankhah* (2014) comme il a été indiqué au cours du chapitre précédent. Son expression est rappelée ci-dessous :

$$\begin{aligned}
P = & b + 0,1694 y_n \sqrt{1 + \left(\frac{B}{Y}\right)^2 \frac{\left[0,015\left(\frac{y_n}{Y}\right) - 1,1289\right]^2}{1 - \left[0,0236\left(\frac{y_n}{Y}\right) - 1\right]^2}} \\
& + 1,0389 y_n \sqrt{1 + \left(\frac{B}{Y}\right)^2 \frac{\left[0,6187\left(\frac{y_n}{Y}\right) - 1,5398\right]^2}{1 - \left[0,7188\left(\frac{y_n}{Y}\right) - 1\right]^2}} \\
& + 0,7987 y_n \sqrt{1 + \left(\frac{B}{Y}\right)^2 \frac{\left[0,725\left(\frac{y_n}{Y}\right) - 0,8792\right]^2}{1 - \left[0,6528\left(\frac{y_n}{Y}\right) - 1\right]^2}}
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Cette dernière relation peut s'écrire comme suit :

$$P = b \left\{ \begin{aligned} & 1 + 0,1694 \frac{y_n}{b} \sqrt{1 + \left(\frac{B}{Y}\right)^2 \left(\frac{b}{b}\right)^2 \frac{\left[0,015\left(\frac{y_n}{Y} \frac{b}{b}\right) - 1,1289\right]^2}{1 - \left[0,0236\left(\frac{y_n}{Y} \frac{b}{b}\right) - 1\right]^2}} \\ & + 1,0389 \frac{y_n}{b} \sqrt{1 + \left(\frac{B}{Y}\right)^2 \left(\frac{b}{b}\right)^2 \frac{\left[0,6187\left(\frac{y_n}{Y} \frac{b}{b}\right) - 1,5398\right]^2}{1 - \left[0,7188\left(\frac{y_n}{Y} \frac{b}{b}\right) - 1\right]^2}} \\ & + 0,7987 \frac{y_n}{b} \sqrt{1 + \left(\frac{B}{Y}\right)^2 \left(\frac{b}{b}\right)^2 \frac{\left[0,725\left(\frac{y_n}{Y} \frac{b}{b}\right) - 0,8792\right]^2}{1 - \left[0,6528\left(\frac{y_n}{Y} \frac{b}{b}\right) - 1\right]^2}} \end{aligned} \right\} \tag{3.9}$$

Ou bien plus simplement en tenant compte des relations (3.2), (3.3) et (3.4) :

$$P = b \left\{ \begin{array}{l} 1 + 0,1694\eta \sqrt{1 + \left(\frac{\tau}{\lambda}\right)^2 \frac{[0,015\eta\tau - 1,1289]^2}{1 - [0,0236\eta\tau - 1]^2}} \\ + 1,0389\eta \sqrt{1 + \left(\frac{\tau}{\lambda}\right)^2 \frac{[0,6187\eta\tau - 1,5398]^2}{1 - [0,7188\eta\tau - 1]^2}} \\ + 0,7987\eta \sqrt{1 + \left(\frac{\tau}{\lambda}\right)^2 \frac{[0,725\eta\tau - 0,8792]^2}{1 - [0,6528\eta\tau - 1]^2}} \end{array} \right. \quad (3.10)$$

On pose la fonction adimensionnelle ρ , soit :

$$\begin{aligned} \rho = & 1 + 0,1694\eta \sqrt{1 + \left(\frac{\tau}{\lambda}\right)^2 \frac{[0,015\eta\tau - 1,1289]^2}{1 - [0,0236\eta\tau - 1]^2}} \\ & + 1,0389\eta \sqrt{1 + \left(\frac{\tau}{\lambda}\right)^2 \frac{[0,6187\eta\tau - 1,5398]^2}{1 - [0,7188\eta\tau - 1]^2}} \\ & + 0,7987\eta \sqrt{1 + \left(\frac{\tau}{\lambda}\right)^2 \frac{[0,725\eta\tau - 0,8792]^2}{1 - [0,6528\eta\tau - 1]^2}} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Tenant compte de cette dernière considération, le périmètre mouillé exprimé par la relation (3.10) s'écrit plus simplement :

$$P = \rho b \quad (3.12)$$

Dans la relation (3.12) la fonction r est adimensionnelle et dépend exclusivement de la forme considérée

III. Equations de base :

La présente étude est basée sur les équations universelles de *Darcy-Weisbach* (1845, 1854), la relation de *Colebrook-White* (1939) et la relation du nombre de *Reynolds*. Le gradient de la perte de charge linéaire J est exprimé par la relation (1.8) de *Darcy-Weisbach* qui est indiquée dans le chapitre I et dont on rappelle son expression ici, soit :

$$J = \frac{f}{D_h} \frac{V^2}{2g} \quad (1.8)$$

Pour les écoulements à surface libre, le gradient de la perte de charge linéaire J doit être remplacé par la pente i du canal, soit en vertu de la relation (1.8) :

$$i = \frac{f}{D_h} \frac{V^2}{2g} \quad (3.13)$$

L'équation de continuité suggère que le débit volume Q est égal à la vitesse moyenne de l'écoulement V multiplié par l'aire de la section mouillée A , soit :

$$Q = VA$$

Ou bien :

$$V = \frac{Q}{A} \quad (3.14)$$

On remplace la relation (3.14) dans la relation (3.13) on obtient :

$$i = \frac{f}{D_h} \frac{Q^2}{2gA^2} \quad (3.15)$$

Où Q est le débit volume, g est l'accélération de la pesanteur, A est l'aire de la section mouillée, i est la pente longitudinale du canal et D_h est le diamètre hydraulique qui s'exprime par la relation :

$$D_h = 4 \frac{A}{P} \quad (3.16)$$

Dans la relation (3.15), f est le coefficient de frottement qui s'exprime, de manière implicite, par la formule de *Colebrook-White* qui est citée dans le chapitre I et dont on rappelle son expression ici, soit :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon / D_h}{3,7} + \frac{2,51}{R \sqrt{f}} \right) \quad (1.9)$$

Où ε est la rugosité absolue et R est le nombre de *Reynolds* qui s'exprime par analogie avec la relation (2.32) mentionnée dans le chapitre précédent, soit :

$$R = \frac{4Q}{P\nu} \quad (3.17)$$

Où ν est la viscosité cinématique et P est le périmètre mouillé.

IV. Caractéristiques du modèle rugueux de référence

Comme nous l'avons indiqué au cours du chapitre précédent, le modèle rugueux considéré est en fait un canal à parois elliptiques et à fond horizontal (voir figure 2.2 dans le chapitre II de ce mémoire). Rappelons que toutes les caractéristiques géométriques et hydrauliques du modèle rugueux se distinguent par le symbole " $\bar{\quad}$ ".

Le modèle rugueux est particulièrement caractérisé par une rugosité relative $\bar{\varepsilon} / \bar{D}_h = 0,037$ arbitrairement choisie, où \bar{D}_h est le diamètre hydraulique et $\bar{\varepsilon}$ est la rugosité absolue. La rugosité relative est tellement élevée que l'écoulement peut être considéré dans le domaine

turbulent rugueux. Ainsi, le coefficient de frottement est $\bar{f} = 1/16$ (Achour, 2007) et le nombre de Reynolds est \bar{R} . Les autres caractéristiques à considérer du modèle rugueux sont la largeur du fond horizontal du modèle \bar{b} , la largeur horizontale de la partie elliptique du modèle \bar{B} et la hauteur du modèle \bar{Y} . Tandis que, \bar{y}_n représente la profondeur normale de l'écoulement dans le modèle rugueux qui véhicule un débit volume \bar{Q} sous une pente longitudinale \bar{i} . L'inconnu du problème ici est la profondeur normale, on doit alors imposer la condition suivante : $\bar{y}_n \neq y_n$ et même : $\bar{y}_n > y_n$.

Le débit volume ainsi que la pente longitudinale sont les mêmes dans le canal étudié et dans le modèle rugueux, c'est-à-dire : $\bar{Q} = Q$ et $\bar{i} = i$.

En appliquant la relation (3.15) au modèle rugueux, nous pouvons écrire :

$$\bar{i} = \frac{\bar{f}}{D_h} \frac{\bar{Q}^2}{2g\bar{A}^2} \quad (3.18)$$

Le diamètre hydraulique du modèle rugueux \bar{D}_h peut s'écrire, en vertu de la relation (3.16) :

$$\bar{D}_h = 4 \frac{\bar{A}}{\bar{P}} \quad (3.19)$$

En tenant compte que $\bar{f} = 1/16$ et en se basant sur la relation (3.19), la relation (3.18) devient :

$$\bar{i} = \frac{1}{128g} \frac{\bar{P}}{\bar{A}^3} \bar{Q}^2$$

En considérant les conditions $\bar{Q} = Q$ et $\bar{i} = i$, cette dernière relation s'écrit :

$$i = \frac{1}{128g} \frac{\bar{P}}{\bar{A}^3} Q^2 \quad (3.20)$$

L'aire de la section mouillée \bar{A} du modèle rugueux de référence peut s'écrire, en vertu de la relation (3.8) :

$$\bar{A} = \bar{\delta} \bar{b}^2 \quad (3.21)$$

Le périmètre mouillé du modèle rugueux s'écrit en considérant la relation (3.12), soit :

$$\bar{P} = \bar{\rho} \bar{b} \quad (3.22)$$

Il est à noter que les fonctions $\bar{\delta}$ et $\bar{\rho}$ figurées dans la relation (3.21) et (3.22) respectivement dépendent des paramètres de forme du modèle rugueux ($\bar{\eta}$, $\bar{\lambda}$ et $\bar{\tau}$). Par analogie avec les relations (3.7) et (3.11), on peut écrire respectivement :

$$\bar{\delta} = \frac{1}{\lambda} \left[\bar{\eta} \bar{\lambda} + \frac{\pi}{2\tau} + (\bar{\eta}\tau - 1) \sqrt{\bar{\eta} \left(\frac{2}{\tau} - \bar{\eta} \right)} - \frac{1}{\tau} \sin^{-1}(1 - \bar{\eta}\tau) \right] \quad (3.22)$$

Et :

$$\begin{aligned} \bar{\rho} = & 1 + 0,1694 \bar{\eta} \sqrt{1 + \left(\frac{\tau}{\lambda} \right)^2 \frac{[0,015 \bar{\eta}\tau - 1,1289]^2}{1 - [0,0236 \bar{\eta}\tau - 1]^2}} \\ & + 1,0389 \bar{\eta} \sqrt{1 + \left(\frac{\tau}{\lambda} \right)^2 \frac{[0,6187 \bar{\eta}\tau - 1,5398]^2}{1 - [0,7188 \bar{\eta}\tau - 1]^2}} \\ & + 0,7987 \bar{\eta} \sqrt{1 + \left(\frac{\tau}{\lambda} \right)^2 \frac{[0,725 \bar{\eta}\tau - 0,8792]^2}{1 - [0,6528 \bar{\eta}\tau - 1]^2}} \end{aligned} \quad (3.23)$$

On considère en premier lieu que les largeurs de fond du modèle et du canal sont les mêmes, soit : $\bar{b} = b$. En plus, il est important de rappeler que les dimensions du canal sont connues, et les paramètres de forme $\lambda = b/B$ et $\tau = b/Y$ le sont également. Par conséquent, les paramètres de forme du modèle rugueux et du canal sont les mêmes, soit : $\bar{\lambda} = \bar{b}/\bar{B} = \lambda = b/B$ et $\bar{\tau} = \bar{b}/\bar{Y} = \tau = b/Y$. Par ailleurs, le paramètre de forme du modèle rugueux $\bar{\eta} = \bar{y}_n/\bar{b}$ est différent à celui du canal $\eta = y_n/b$ car la profondeur normale est inconnue, soit : $\bar{\eta} = \bar{y}_n/\bar{b} \neq \eta = y_n/b$. En tenant compte de ces dernières considérations, les relations (3.22) et (3.23) peuvent s'écrire respectivement :

$$\bar{\delta} = \frac{1}{\lambda} \left[\bar{\eta} \bar{\lambda} + \frac{\pi}{2\tau} + (\bar{\eta}\tau - 1) \sqrt{\bar{\eta} \left(\frac{2}{\tau} - \bar{\eta} \right)} - \frac{1}{\tau} \sin^{-1}(1 - \bar{\eta}\tau) \right]$$

(3.24)

Et :

$$\begin{aligned} \bar{\rho} = & 1 + 0,1694 \bar{\eta} \sqrt{1 + \left(\frac{\tau}{\lambda} \right)^2 \frac{[0,015 \bar{\eta}\tau - 1,1289]^2}{1 - [0,0236 \bar{\eta}\tau - 1]^2}} \\ & + 1,0389 \bar{\eta} \sqrt{1 + \left(\frac{\tau}{\lambda} \right)^2 \frac{[0,6187 \bar{\eta}\tau - 1,5398]^2}{1 - [0,7188 \bar{\eta}\tau - 1]^2}} \\ & + 0,7987 \bar{\eta} \sqrt{1 + \left(\frac{\tau}{\lambda} \right)^2 \frac{[0,725 \bar{\eta}\tau - 0,8792]^2}{1 - [0,6528 \bar{\eta}\tau - 1]^2}} \end{aligned} \quad (3.25)$$

En comparant les relations (3.7) et (3.24), on peut remarquer que : $\bar{\delta} \neq \delta$. Par contre, en comparant la relation (3.11) avec celle (3.25), on peut conclure que : $\bar{\rho} \neq \rho$.

En se basant sur l'égalité $\bar{b} = b$ d'une part et sur l'inégalité $\bar{\delta} \neq \delta$ d'autre part, l'aire de la section mouillée du modèle rugueux s'écrit, en vertu de la relation (3.21) :

$$\bar{A} = \bar{\delta} b^2 \quad (3.26)$$

En plus, en tenant compte du fait que $\bar{b} = b$ et $\bar{\rho} \neq \rho$, alors le périmètre mouillé du modèle rugueux s'écrit, selon la relation (3.22) :

$$\bar{P} = \bar{\rho} b \quad (3.27)$$

En tenant compte des relations (3.26) et (3.27), la relation (3.20) s'écrit alors :

$$i = \frac{1}{128} \frac{Q^2}{g} \frac{\bar{\rho} b}{(\bar{\delta} b^2)^3}$$

Après réarrangement et simplification cette dernière relation devient :

$$i = \frac{1}{128} \frac{Q^2}{g} \frac{\bar{\rho}}{\bar{\delta}^3 b^5}$$

Ou bien :

$$\frac{Q^2}{g i b^5} \frac{\bar{\rho}}{128 \bar{\delta}^3} = 1 \quad (3.28)$$

Introduisons la notion de la conductivité relative traduit par la relation suivante :

$$Q^* = \frac{Q}{\sqrt{g i b^5}} \quad (3.29)$$

En tenant compte la relation (3.29), la relation (3.28) s'écrit :

$$\frac{\bar{\rho}}{128 \bar{\delta}^3} Q^{*2} = 1 \quad (3.30)$$

Tous les paramètres de la relation (3.30) sont connus, ce qui permet de déterminer la valeur de la conductivité relative Q^* directement. Cela mène à dire que les inconnus de la relation (3.30) sont les fonctions $\bar{\delta}$ et $\bar{\rho}$ et par conséquent $\bar{\eta}$ ou \bar{y}_n . La relation (3.30) alors à déterminer la profondeur normale dans le modèle rugueux \bar{y}_n qui mène à son tour de déterminer la profondeur normale y_n recherchée. Cependant, comme on peut le constater clairement, l'équation (3.30) est implicite vis-à-vis du paramètre de forme (ou profondeur normale non dimensionnelle) $\bar{\eta}$. Le calcul fait, alors, intervenir une procédure itérative ou approximative. Une façon d'éviter cela est de proposer une relation approchée mais explicite qui peut remplacer la relation (3.30) avec une

précision suffisante. Afin de simplifier la tâche, nous avons imposé les valeurs des paramètres de forme comme suit : $\lambda = b/B = 1$ et $\tau = b/Y = 0,5$. On procède d'abord par les changements de variables suivants :

$$\Lambda = \log(\bar{\eta}/3\pi) \quad (3.31)$$

Et :

$$Z = \log Q^* \quad (3.32)$$

Notre étude est effectuée en considérant les nouvelles variables Λ et Z . Il s'est avéré que la relation polynomiale suivante (Figure 3.1) peut remplacer, avec une excellente approximation, la relation implicite (3.30), soit :

$$\Lambda = 0,0449Z^6 - 0,2089Z^5 + 0,3284Z^4 - 0,1649Z^3 - 0,0244Z^2 + 0,6398Z - 1,7699 \quad (3.33)$$

Cette dernière relation occasionne un écart relatif maximal inférieur à 0,93 % sur le calcul du paramètre de forme $\bar{\eta}$ (Figure 3.2).

Notons que la relation approchée (3.33) est valable pour : $\lambda = 1$ et $\tau = 0,5$ et pour l'intervalle de la conductivité relative suivant : $0,468372407 \leq Q^* \leq 113,2745431$.

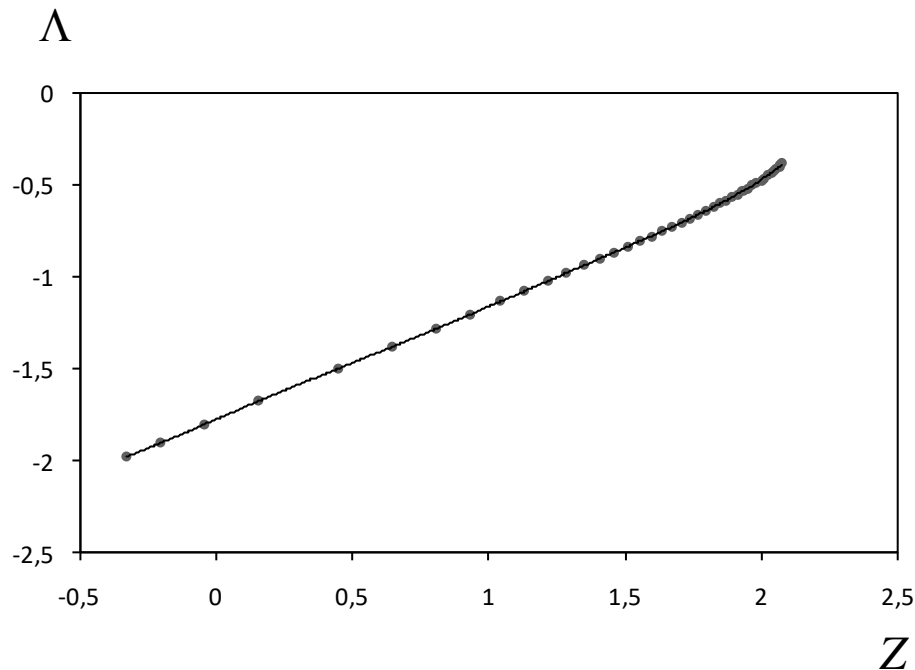


Figure 3.1 : Représentation graphique de la fonction $\Lambda = f(Z)$: (...) Points tracés en se basant sur la relation (3.30). (—) Courbe tracée selon la relation (3.33).

A partir de la relation (3.31), on peut tirer la valeur du paramètre de forme $\bar{\eta}$ du modèle rugueux de référence, soit :

$$\bar{\eta} = 3\pi 10^{\Lambda} \quad (3.34)$$

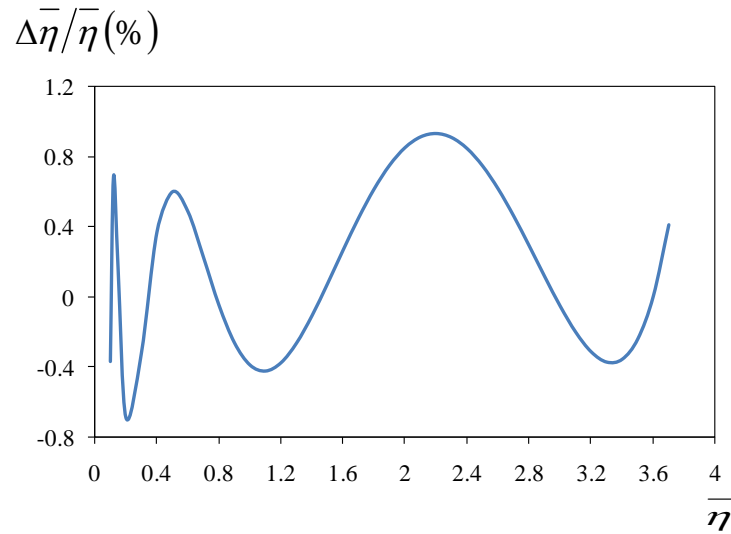


Figure 3.2 : Ecarts relatifs $\Delta\bar{\eta}/\bar{\eta}$ (%) occasionnés par la relation (3.33)

V. Etapes de calcul de la profondeur normale

Afin de calculer la profondeur normale y_n dans un canal à parois elliptiques et à fond horizontal, il faut que les paramètres suivants : le débit Q , la pente longitudinale i , la largeur de fond b , la largeur de la partie elliptique B , la hauteur du canal Y , la rugosité absolue ε et la viscosité cinématique ν soient connus. A noter d'une part que ces données sont mesurables en pratique et d'autre part le coefficient de résistance à l'écoulement tel que le coefficient de *Chézy* ou le coefficient de rugosité de *Manning* n'est pas imposé. La profondeur normale y_n peut, alors, être calculée selon les étapes suivantes :

1. Calculer les valeurs des paramètres de forme λ et τ respectivement selon les relations (3.3) et (3.4). Lorsqu'on utilise la relation approchée (3.33), on doit choisir les valeurs de b , B et Y de telle sorte que $\lambda = 1$ et $\tau = 0,5$.
2. Calculer la conductivité relative Q^* par la relation (3.29) et vérifier que la conductivité relative Q^* est appartient à l'intervalle : $0,468372407 \leq Q^* \leq 113,2745431$.
3. Calculer la valeur de Z selon la relation (3.32).
4. Calculer la valeur de Λ par la relation approchée (3.33).
5. Avec la valeur calculée de Λ , calculer la valeur de $\bar{\eta}$ par la relation (3.34).
6. Calculer les fonctions $\bar{\delta}$ et $\bar{\rho}$ respectivement par les relations (3.24) et (3.25).
7. Dédire le périmètre mouillé \bar{P} et l'aire de la section mouillée \bar{A} du modèle rugueux selon les relations (3.27) et (3.26) respectivement.

8. Calculer le diamètre hydraulique \overline{D}_h selon la relation (3.19).
9. Calculer le nombre de Reynolds \overline{R} de l'écoulement dans le par la relation (2.33) du chapitre précédent, soit :

$$\overline{R} = \frac{4Q}{P\nu} \quad (2.33)$$

10. Avec les valeurs calculées de \overline{R} et \overline{D}_h déduire la valeur du facteur de correction ψ des dimensions linéaires par la relation (2.35) du chapitre précédent, soit :

$$\psi = 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon/\overline{D}_h}{4,75} + \frac{8,5}{\overline{R}} \right) \right]^{-2/5} \quad (2.35)$$

11. Assigner au modèle rugueux la nouvelle dimension linéaire $\overline{b} = b/\psi$ (Achour, 2014) et déduire la valeur de la conductivité relative Q^* selon la relation (3.29) en remplaçant b par \overline{b} . La nouvelle valeur de \overline{b} conduit aux conditions réelles : $\overline{b} \neq b$ et $\overline{\eta} = \eta$.
12. Déduire la valeur du paramètre Z selon la relation (3.32).
13. Déduire la valeur du paramètre Λ selon la relation approchée (3.33).
14. Déduire la valeur du paramètre $\eta = \overline{\eta}$ selon la relation (3.34).
15. Finalement calculer la valeur de la profondeur normale à partir de la relation (3.2), soit :
- $$y_n = b\eta.$$

VI. Exemple d'application

Considérons un canal à fond horizontal et à parois elliptiques (Figure 2.1 du chapitre précédent). Calculer la profondeur normale y_n de l'écoulement, sachant que : $b = 2,5$ m, $Q = 6,5$ m³/s, $i = 10^{-3}$, $\varepsilon = 10^{-4}$ m, $\nu = 10^{-6}$ m²/s, $B = 2,5$ m, $Y = 5$ m.

Solution

1. Calculons les valeurs des paramètres de formes λ et τ respectivement selon les relations (3.3) et (3.4) :

$$\lambda = b/B = 2,5/2,5 = 1$$

$$\tau = b/Y = 2,5/5 = 0,5$$

2. Calculons la conductivité relative Q^* selon la relation (3.29) :

$$Q^* = \frac{Q}{\sqrt{gib^5}} = \frac{6,5}{\sqrt{9,81 \times 10^{-3} \times 2,5^5}} = 6,640928911$$

La valeur obtenue de la conductivité relative Q^* est dans l'intervalle :
 $0,468372407 \leq Q^* \leq 113,2745431$.

3. Calculons Z par la relation (3.32) :

$$Z = \log Q^* = \log 6,640928911 = 0,822228831$$

4. Calculons Λ par la relation (3.33) :

$$\Lambda = 0,0449Z^6 - 0,2089Z^5 + 0,3284Z^4 - 0,1649Z^3 - 0,0244Z^2 + 0,6398Z - 1,7699$$

$$\Lambda = 0,0449 \times 0,822228831^6 - 0,2089 \times 0,822228831^5 + 0,3284 \times 0,822228831^4 - 0,1649 \times 0,822228831^3 - 0,0244 \times 0,822228831^2 + 0,6398 \times 0,822228831 - 1,7699$$

$$\Lambda = -1,266531993$$

5. D'après la valeur calculée de Λ déduisons la valeur de $\bar{\eta}$ selon la relation (3.34) :

$$\bar{\eta} = 3\pi 10^\Lambda = 3\pi 10^{(-1,266531993)} = 0,51019845$$

6. Calculons les fonctions $\bar{\delta}$ et $\bar{\rho}$ respectivement selon les relations (3.24) et (3.25) :

$$\bar{\delta} = \frac{1}{\lambda} \left[\bar{\eta} \lambda + \frac{\pi}{2\tau} + (\bar{\eta}\tau - 1) \sqrt{\bar{\eta} \left(\frac{2}{\tau} - \bar{\eta} \right)} - \frac{1}{\tau} \sin^{-1}(1 - \bar{\eta}\tau) \right]$$

$$\bar{\delta} = \frac{1}{1} \left[\begin{array}{l} 0,51019845 \times 1 + \frac{\pi}{2 \times 0,5} \\ + (0,51019845 \times 0,5 - 1) \sqrt{0,51019845 \left(\frac{2}{0,5} - 0,51019845 \right)} \\ - \frac{1}{0,5} \sin^{-1}(1 - 0,51019845 \times 0,5) \end{array} \right]$$

$$\bar{\delta} = 0,977060149$$

Et :

$$\bar{\rho} = 1 + 0,1694\bar{\eta} \sqrt{1 + \left(\frac{\tau}{\lambda} \right)^2 \frac{[0,015\bar{\eta}\tau - 1,1289]^2}{1 - [0,0236\bar{\eta}\tau - 1]^2}}$$

$$+ 1,0389\bar{\eta} \sqrt{1 + \left(\frac{\tau}{\lambda} \right)^2 \frac{[0,6187\bar{\eta}\tau - 1,5398]^2}{1 - [0,7188\bar{\eta}\tau - 1]^2}}$$

$$+ 0,7987\bar{\eta} \sqrt{1 + \left(\frac{\tau}{\lambda} \right)^2 \frac{[0,725\bar{\eta}\tau - 0,8792]^2}{1 - [0,6528\bar{\eta}\tau - 1]^2}}$$

$$\begin{aligned}\bar{\rho} &= 1 + 0,1694 \times 0,51019845 \sqrt{1 + \left(\frac{0,5}{1}\right)^2 \frac{[0,015 \times 0,51019845 \times 0,5 - 1,1289]^2}{1 - [0,0236 \times 0,51019845 \times 0,5 - 1]^2}} \\ &+ 1,0389 \times 0,51019845 \sqrt{1 + \left(\frac{0,5}{1}\right)^2 \frac{[0,6187 \times 0,51019845 \times 0,5 - 1,5398]^2}{1 - [0,7188 \times 0,51019845 \times 0,5 - 1]^2}} \\ &+ 0,7987 \times 0,51019845 \sqrt{1 + \left(\frac{0,5}{1}\right)^2 \frac{[0,725 \times 0,51019845 \times 0,5 - 0,8792]^2}{1 - [0,6528 \times 0,51019845 \times 0,5 - 1]^2}} \\ \bar{\rho} &= 2.760143579\end{aligned}$$

7. Déduisons la valeur du périmètre mouillé \bar{P} et de l'aire de la section mouillée \bar{A} par application des relations (3.27) et (3.26) respectivement :

$$\bar{P} = \bar{\rho}b = 2.760143579 \times 2,5 = 6,900358949 m$$

Et :

$$\bar{A} = \bar{\delta}b^2 = 0,977060149 \times 2,5^2 = 6,106625931 m^2$$

8. Le diamètre hydraulique du modèle rugueux est donné par la relation (3.19). soit :

$$\bar{D}_h = 4 \frac{\bar{A}}{\bar{P}} = 4 \times \frac{6,106625931}{6,900358949} = 3,539888853 m$$

9. En vertu de la relation (2.33), le nombre de *Reynolds* \bar{R} est tel que :

$$\bar{R} = \frac{4Q}{P\nu} = \frac{4 \times 6,5}{6,900358949 \times 10^{-6}} = 3767919,929$$

10. Avec les valeurs calculées de \bar{R} et \bar{D}_h déduisons la valeur du facteur de correction des dimensions linéaires ψ selon la relation (2.35) :

$$\begin{aligned}\psi &= 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon/\bar{D}_h}{4,75} + \frac{8,5}{\bar{R}} \right) \right]^{-2/5} \\ \psi &= 1,35 \left[-\log \left(\frac{10^{-4}/3,539888853}{4,75} + \frac{8,5}{3767919,929} \right) \right]^{-2/5} = 0,704340328\end{aligned}$$

11. Assignons au modèle rugueux la nouvelle dimension linéaire $\bar{b} = b/\psi$:

$$\bar{b} = b/\psi = 2,5/0,704340328 = 3,549420502 m$$

et déduisons la nouvelle valeur de la conductivité relative Q^* selon la relation (3.29) en remplaçant b par \bar{b} . soit :

$$Q^* = \frac{Q}{\sqrt{gib^{-5}}} = \frac{6,5}{\sqrt{9,81 \times 10^{-3} \times 3,549420502^5}} = 2,764936866$$

La valeur obtenue de la conductivité relative Q^* est dans l'intervalle :
 $0,468372407 \leq Q^* \leq 113,2745431$.

12. Selon la relation (3.32) la valeur du paramètre Z est :

$$Z = \log Q^* = \log 2,764936866 = 0,441685219$$

13. Selon la relation (3.33) la valeur du paramètre Λ est :

$$\Lambda = 0,0449Z^6 - 0,2089Z^5 + 0,3284Z^4 - 0,1649Z^3 - 0,0244Z^2 + 0,6398Z - 1,7699$$

$$\Lambda = 0,0449 \times (0,441685219)^6 - 0,2089 \times (0,441685219)^5 + 0,3284 \times (0,441685219)^4 - 0,1649 \times (0,441685219)^3 - 0,0244 \times (0,441685219)^2 + 0,6398 \times (0,441685219) - 1,7699$$

$$\Lambda = -1,49695856$$

14. Selon la valeur de Λ on déduit la valeur η selon la relation (3.34) pour $\eta = \bar{\eta}$:

$$\eta = 3\pi 10^\Lambda = 3\pi 10^{(-1,49695856)} = 0,300132183$$

15. Enfin, la valeur de la profondeur normale y_n est directement :

$$y_n = b\eta = 2,5 \times 0,300132183 = 0,750330458m$$

16. Cette étape vise à vérifier les calculs effectués en déterminant la pente longitudinale i par application de la relation (3.15) de *Darcy-Weisbach* :

$$i = \frac{f}{D_h} \frac{Q^2}{2gA^2}$$

La pente ainsi calculée doit être approximativement égale à celle donnée à l'énoncé de l'exemple d'application. Selon la méthode du modèle rugueux, le coefficient de frottement f et le facteur de correction des dimensions linéaires ψ sont liés par la relation (*Achour, 2007*) :

$$f = \frac{\psi^5}{16} = \frac{0,704340328^5}{16} = 0,010834099$$

Ainsi, selon les relations (3.7) et (3.11), les fonctions δ et ρ sont respectivement :

$$\delta = \frac{1}{\lambda} \left[\eta\lambda + \frac{\pi}{2\tau} + (\eta\tau - 1) \sqrt{\eta \left(\frac{2}{\tau} - \eta \right)} - \frac{1}{\tau} \sin^{-1}(1 - \eta\tau) \right]$$

$$\delta = \frac{1}{1} \left[\begin{array}{l} 0,300132183 \times 1 + \frac{\pi}{2 \times 0,5} \\ + (0,300132183 \times 0,5 - 1) \sqrt{0,300132183 \times \left(\frac{2}{0,5} - 0,300132183 \right)} \\ - \frac{1}{0,5} \sin^{-1}(1 - 0,300132183 \times 0,5) \end{array} \right]$$

$$\delta = 0,514362958$$

Et :

$$\begin{aligned} \rho &= 1 + 0,1694\eta \sqrt{1 + \left(\frac{\tau}{\lambda} \right)^2 \frac{[0,015\eta\tau - 1,1289]^2}{1 - [0,0236\eta\tau - 1]^2}} \\ &+ 1,0389\eta \sqrt{1 + \left(\frac{\tau}{\lambda} \right)^2 \frac{[0,6187\eta\tau - 1,5398]^2}{1 - [0,7188\eta\tau - 1]^2}} \\ &+ 0,7987\eta \sqrt{1 + \left(\frac{\tau}{\lambda} \right)^2 \frac{[0,725\eta\tau - 0,8792]^2}{1 - [0,6528\eta\tau - 1]^2}} \\ \rho &= 1 + 0,1694 \times 0,300132183 \sqrt{1 + \left(\frac{0,5}{1} \right)^2 \frac{[0,015 \times 0,300132183 \times 0,5 - 1,1289]^2}{1 - [0,0236 \times 0,300132183 \times 0,5 - 1]^2}} \\ &+ 1,0389 \times 0,300132183 \sqrt{1 + \left(\frac{0,5}{1} \right)^2 \frac{[0,6187 \times 0,300132183 \times 0,5 - 1,5398]^2}{1 - [0,7188 \times 0,300132183 \times 0,5 - 1]^2}} \\ &+ 0,7987 \times 0,300132183 \sqrt{1 + \left(\frac{0,5}{1} \right)^2 \frac{[0,725 \times 0,300132183 \times 0,5 - 0,8792]^2}{1 - [0,6528 \times 0,300132183 \times 0,5 - 1]^2}} \end{aligned}$$

$$\rho = 2,254358572$$

Calculons le périmètre mouillé P selon la relation (3.12):

$$P = \rho b = 2,254358572 \times 2,5 = 5,635896431 \text{ m}$$

Calculons l'aire de la section mouillée A selon la relation (3.8):

$$A = \delta b^2 = 0,514362958 \times 2,5^2 = 3,214768487 \text{ m}^2$$

Déterminons le diamètre hydraulique D_h selon la relation (3.16) :

$$D_h = 4 \frac{A}{P} = 4 \times \frac{3,214768487}{5,63589643} = 2,281637731 \text{ m}$$

En vertu de la relation (3.15), la pente longitudinale i est :

$$i = \frac{f}{D_h} \frac{Q^2}{2gA^2} = \frac{0,010834099}{2,281637731} \times \frac{6,5^2}{2 \times 9,81 \times 3,214768487^2} = 0,000989406$$

Comme on peut le voir, la pente que nous avons calculée et donnée pour l'énoncé du problème sont approximativement égales (Ecart relatif égal à 1,06 %), ce qui permet de conclure à la validité des calculs effectués.

VII. Conclusion

La méthode du modèle rugueux de référence a été appliquée avec succès pour la problématique de la détermination de la profondeur normale de l'écoulement dans un canal à fond horizontal et à parois elliptiques. Les expressions de l'aire de la section mouillée ainsi que du périmètre mouillé ont été inspirées à partir de l'étude de *Easa et Vatankhah* (2014) et ont été développées de manière à simplifier leur utilisation. L'étude a été basée sur les relations universelles de *Darcy-Weisbach*, *Collebrook-White* ainsi que celle du nombre de *Reynolds*. Appliquée au modèle rugueux de référence l'équation de *Darcy-Weisbach* a abouti à la relation exprimant implicitement le paramètre de forme en fonction de la conductivité relative pour des conditions du problème bien déterminées. Le caractère implicite de la relation développée nous a conduit à proposer une relation approchée mais explicite dédiée au calcul direct du paramètre de forme et par conséquent à la profondeur normale recherchée. La relation proposée occasionne un écart relatif maximal inférieur à 0,93 % sur le calcul du paramètre de forme. Enfin, un exemple d'application a été proposé afin de montrer la démarche à suivre pour le calcul de la profondeur normale et pour conclure à la validité de l'approche théorique développée.

CONCLUSION GENERALE

CONCLUSION GENERALE

L'objectif du présent mémoire a été l'étude de l'écoulement uniforme dans un canal à parois elliptiques et à fond horizontal. L'étude a été effectuée sur deux volets dont le premier s'est intéressé à la problématique de dimensionnement du canal tandis que le deuxième volet s'est consacré au problème de la détermination de la profondeur normale de l'écoulement dans le canal choisit. Les deux études faites ont nécessité d'utiliser la méthode du modèle rugueux de référence.

Pour atteindre l'objectif visé, notre mémoire a nécessité trois chapitres. A travers le premier chapitre, nous avons présenté d'une manière générale les types et les régimes d'écoulements ainsi que les types de canaux. Nous avons présenté également l'écoulement uniforme, les conditions de son développement ainsi que les différentes relations qui le gouvernent et qui sont reconnues à l'échelle internationale.

Nous avons abordé, au cours du deuxième chapitre, l'étude de l'écoulement uniforme dans un canal à parois elliptiques et à fond horizontal. Le but été de trouver un moyen permettant le dimensionnement explicite du canal étudié en tenant compte de tous les paramètres régissant ce type d'écoulements et qui sont mesurables en pratiques. Ces paramètres sont : le débit volume Q , la pente longitudinale du canal i , les paramètres de forme η , ξ et ζ , la rugosité absolue ε et la viscosité cinématique ν du liquide en écoulement. En premier lieux, nous avons commencé par les caractéristiques géométriques du canal considéré où les expressions de l'aire de la section mouillée et du périmètre mouillé ont été inspirées à partir de l'étude de *Easa* et *Vatankhah* (2014) puis ont été réécrites de manière à s'adapter avec notre étude. En se basant sur la relation de *Chézy*, la largeur de fond du modèle rugueux de référence a été, par la suite, exprimée explicitement. Les autres caractéristiques du modèle rugueux ont été exprimées également. L'application de la relation fondamentale de la méthode MMR a permis de déterminer la largeur de fond du canal étudié en se référant au facteur de correction des dimensions linéaires. En revanche, la profondeur normale de l'écoulement a été déduite à partir du paramètre de forme η .

En outre, les paramètres de forme ξ et ζ ont permis de déduire la hauteur du canal et la largeur horizontale de la partie elliptique respectivement.

Le troisième et dernier chapitre du présent mémoire a été consacré au calcul de la profondeur normale de l'écoulement dans un canal à parois elliptiques et à fond horizontal. Dans ce cas, toutes les dimensions linéaires du canal sont connues et on cherche à déterminer la profondeur normale de l'écoulement. Les autres paramètres connus sont : le débit volume Q , la pente longitudinale du canal i , la rugosité absolue ε et la viscosité cinématique ν du liquide en écoulement. Les expressions de l'aire de la section mouillée et du périmètre mouillé qui ont été inspirées à partir de l'étude de *Easa et Vatankhah (2014)* ont été modifiées pour être compatibles avec les données du problème. En revanche, l'application de la relation de *Darcy-Weisbach* au modèle rugueux de référence a permis d'exprimer le paramètre de forme du modèle rugueux $\bar{\eta}$ en fonction de la conductivité relative Q^* . En outre, le caractère implicite de la relation obtenue nous a conduit à la remplacer par une excellente relation approchée mais explicite. L'étude montre que la relation approchée occasionne un écart relatif maximal inférieur à 0,93 % sur le calcul du paramètre de forme $\bar{\eta}$ et cela dans son domaine de validité. Toutes les autres caractéristiques du modèle rugueux ont été bien exprimées. Après avoir déterminé la largeur de fond du modèle rugueux, le paramètre de forme η du canal étudié a été déduit et par conséquent la profondeur normale de l'écoulement a été aisément déterminée.

Deux exemples d'application ont été exposés afin de rendre aisé l'application des deux démarches proposées et de conclure à leur validité.

Notons que les deux démarches proposées dans cette étude sont valables pour le régime d'écoulement dans le domaine turbulent rugueux, de transition et pratiquement lisse.

PRINCIPALES NOTATIONS

PRINCIPALES NOTATIONS

Accélération de la pesanteur	g	m/s^2
Aire de la section mouillée	A	m^2
Aire de la section mouillée du modèle rugueux	\bar{A}	m^2
Coefficient de <i>Chézy</i>	C	$\text{m}^{1/2}/\text{s}$
Coefficient de <i>Chézy</i> du modèle rugueux	\bar{C}	$\text{m}^{1/2}/\text{s}$
Coefficient de frottement	f	-
Coefficient de frottement du modèle rugueux	\bar{f}	-
Coefficient de <i>Manning</i>	n	$\text{m}^{-1/3}\text{s}$
Coefficients de <i>Strickler</i>	K	$\text{m}^{1/3}.\text{s}^{-1}$
Conductivité relative	Q^*	-
Débit volume	Q	m^3/s
Débit volume du modèle rugueux	\bar{Q}	m^3/s
Diamètre hydraulique du modèle rugueux	\bar{D}_h	m
Diamètre hydraulique	D_h	m
Facteur de correction des dimensions linéaires	ψ	-
Fonctions adimensionnelles	$\sigma, \varphi, \delta, \rho$	-
Fonctions	Λ, Z	
Hauteur du canal	Y	m
Largeur de fond du canal	b	m
Largeur horizontale de la partie elliptique du canal	B	m
Nombre de <i>Froude</i>	F_r	
Nombre de <i>Reynolds</i>	R	-
Nombre de <i>Reynolds</i> dans le modèle rugueux	\bar{R}	-
Paramètres de forme	$\xi, \zeta, \lambda, \tau, \eta$	-
Pente critique	i_c	m/m
Pente longitudinale	i	m/m

Pente longitudinale du modèle rugueux	\bar{i}	m/m
Perte de charge linéaire dans le modèle rugueux	\bar{J}	m/m
Perte de charge linéaire	J	m/m
Périmètre mouillé	P	m
Périmètre mouillé du modèle rugueux	\bar{P}	m
Profondeur normale de l'écoulement	y_n	m
Profondeur normale de l'écoulement dans le modèle rugueux	\bar{y}_n	m
Rayon hydraulique	R_h	m
Rayon hydraulique du modèle rugueux	\bar{R}_h	m
Rugosité absolue	ε	m
Rugosité absolue du modèle rugueux	$\bar{\varepsilon}$	m
Rugosité relative	ε / D_h	-
Rugosité relative du modèle rugueux	$\bar{\varepsilon} / \bar{D}_h$	-
Viscosité cinématique	ν	m ² /s
Viscosité cinématique dans le modèle rugueux	$\bar{\nu}$	m ² /s
Vitesse moyenne de l'écoulement	V	m/s

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Références Bibliographiques

ACHOUR, B., (1997). Dissipateurs d'énergie par ressaut, thèse de doctorat d'état en sciences hydrauliques, université de Tizi-Ouzou.

ACHOUR, B., (2007). Calcul des conduites et canaux par la MMR – Conduites et canaux en charge, LARHYSS Edition Capitale, Tome 1, 610 p.

ACHOUR, B., (2014). Canal rectangulaire en charge et à surface libre. Chapitre II, Editions Al-Djazair, 63 p.

ACHOUR, B., BEDJAOUI, A., (2006). Discussion of Explicit Solutions for Normal Depth Problem, J. Hydraulic Research, IAHR, 44, N.5, pp. 715-717.

ACHOUR B., BEDJAOUI A., KHATTAOUI M., DEBABECHE M., (2002). Contribution au calcul des écoulements uniformes à surface libre et en charge (Première partie), LARHYSS Journal, N°.01, pp. 7-36.

BENNIS, S., (2007). Hydraulique et hydrologie. 2e éd. Presses de l'université du Québec, Montréal, QC, Canada.

CARLIER, M., (1980). Hydraulique générale et appliquée. Paris, Eyrolles.

CHEZY, A.D., (1775). Mémoire sur la vitesse de l'eau conduite dans une rigole. MS reprinted in Annales des ponts et chaussées, 1775, Vol. 60.

CHOW, V.T., (1973). Open-Channel Hydraulics, Ed. McGraw Hill, N.Y.

COLEBROOK C.F., (1939). Turbulent Flow in Pipes, with Particular Reference to the Transition Between the Smooth and Rough Pipe laws, J. Inst. Civil Eng., Vol. 11, n°4, pp. 133-156,

DARCY, H., (1854). Sur des recherches expérimentales relatives au mouvement des eaux dans les tuyaux, Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, Vol.38, pp. 1109-1121, Paris.

EASA, S.M., and VATANKHAH, A.R., (2014). New open channel with elliptic sides and horizontal bottom. *KSCE Journal of Civil Engineering*, 18(4), pp. 1197-1204.

FILLALI, S., (2012). Etude d'un écoulement instationnaire dans un canal découvert à fond mobile et à charge variable, Mémoire de Magistère en Hydraulique, Option : Hydraulique numérique et environnement, Université Hadj Lakhdar-BATNA.

GRAF, W.H., ALTINAKAR, M.S., (2000). Hydraulique fluviale : écoulement et phénomènes de transport dans les canaux à géométrie simple, *Traité de Génie Civil*, Ed. Presses Polytechniques Romandes, Vol.16, Suisse, 613 p.

LAKEHAL, M., et ACHOUR B., (2017). Nouvelle approche au calcul de la profondeur Normale dans un canal trapézoïdal par la méthode du modèle rugueux, *Journal Larhyss*, ISSN 1112-3680, n°32, pp. 269-284.

MANNING, R., (1891). On the flow of water in open channels and pipes, *Transactions, Institution of Civil Engineers of Ireland*, Vol. 20, pp. 161-207, Dublin.

MOODY, L.F., (1944). Friction factors for pipe flow, *Transactions of the ASME*, vol. 66 (8), pp. 671-684.

NIKURADSE, J., (1933). Strömungsgesetze in rauhen Rohren. *Forschungsarbeit des Ingenieurwesens (Les lois de l'écoulement dans les conduites rugueuses. Travaux de recherche en ingénierie)*, Vol. 361, pp. 1-20.

Strickler, A., (1923) : Beiträge zur Frage der Geschwindigkeitsformel und der Rauheitszahlen für Ströme, Kanäle und geschlossene Leitungen, Mitteilung Nr.16 des Amtes für Wasserwirtschaft, Eidgenössisches Departement des Innern, Bern 1923 (Contributions à la question de la formule de vitesse et des valeurs de rugosité pour les écoulements, canaux et conduites fermées, Communication n° 16 de l'Office de la gestion des eaux, Département fédéral de l'intérieur, Berne 1923).

SWAMEE P.K., JAIN A.K., (1976). Explicit equations for pipe-flow problems, *Proc. ASCE, J. Hydraulics Division*, Vol.102, HY5, pp. 657-664.