

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

UNIVERSITE BADJI MOKHTAR - ANNABA
BADJI MOKHTAR – ANNABA UNIVERSITY



جامعة بادجي مختار – عنابة

Faculté : Science de l'ingénierie
Département : Génie mécanique
Domaine : Sciences et techniques
Filière : Génie mécanique
Spécialité : Énergétique

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du Diplôme de Master

Thème:

**Analyse Semi-analytique de l'écoulement
hydromagnétique de Blasius pour les
nano-fluides**

Présenté par : HadeF Yousra
Encadreur : SARI Mohamed Rafik

Grade Pr - Université Badji Mokhtar ANNABA

Jury de Soutenance :

DIB Amar	M.C./A	U.B.M.A.	Président
SARI Mohamed Rafik	Professeur	U.B.M.A.	Encadrant
MZAD Hocine	Professeur	U.B.M.A.	Examineur

Année Universitaire : 2020/2021

Avant-Propos

Je remercie en premier lieu Allah qui m'a donné la force et le courage d'en arriver là.

J'adresse mes vifs remerciements et toute ma gratitude à mon directeur de mémoire Mr. Sari Mohamed Rafik professeur à l'université Badji Mokhtar Annaba d'avoir proposé, dirigé et suivi ce travail. Ses compétences, son incroyable culture scientifique, sa façon de travailler et d'agiter les idées pour faire avancer ce travail m'auront énormément apporté.

Je tiens à remercier tous les membres du Jury d'avoir accepté de juger ce modeste travail.

Je remercie aussi celles et ceux qui m'ont soutenu moralement pendant la réalisation de ce travail, et qui ont eu la patience de me supporter : ma famille, mes amis et mes collègues.

Grand merci.

Je remercie également mes très chers parents, Hedef Noureddine et Fatma Zohra. Je remercie ma sœur Asma, mes tantes, mes oncles: Guerche Hassane, Rachide, Fathi, Abdel Karime , et Shawki , et mes cousins: Minou ,Ilyes , Abdel Raouf pour leurs encouragements. Ils étaient toujours à mes côtés.

Je suis très heureuse de pouvoir remercier toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin par leur appui scientifique ou leur collaboration.

المخلص

في هذه المذكرة سوف نقوم بدراسة تأثير المجال المغناطيسي على السوائل النانوية التي تتدفق بانتظام و بدون تدرج للضغط في الطبقة الحدية على صفيحة مسطحة حيث اعتبرنا ان الحقل المغناطيسي المطبق على الصفيحة يتعامد مع مسار التدفق . اعتمادا على هذه الفرضيات قمنا بتحويل المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية التي تمثل هذه الظاهرة الى معادلات تفاضلية عادية من الدرجة الثالثة باستخدام متغيرات التشابه حيث يمكن حلها رقميا و تحليليا , في هذه المذكرة استخدمنا طريقة Adomian Decompositional Method (ADM).

ومن اجل التحقق من دقة النتائج المتحصل عليها قمنا بمقارنتها مع الحلول الرقمية باستعمال طريقة "Runge-Kutta" من الدرجة الرابعة , حيث اثبتت كفاءة الطريقة التحليلية (ADM) .

و عليه فإن هذه المعادلات تسمح لنا بدراسة تأثير المجال المغناطيسي (M) و كذلك تأثير نسبة تركيز و نوع الحبيبات النانوية على سرعة السوائل في الطبقة الحدية بالإضافة الى دراسة تأثيرها على معامل الاحتكاك.

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons étudié l'effet du champ magnétique sur les nano-fluides qui s'écoulent uniformément au niveau de la couche limite laminaire qui se développe autour d'une plaque plane (écoulement dit de Blasius M.H.D. est considéré). Dans cette étude, nous considérons que le champ magnétique appliqué à la plaque est perpendiculaire au trajet d'écoulement. Les équations différentielles aux dérivées partielles qui régissent la problématique étudiée sont transformées en une équation différentielle ordinaire du troisième ordre par utilisation des fonctions de similarités appropriées. Par la suite, l'équation obtenue qui caractérise le champ dynamique de l'écoulement de Blasius est résolue analytiquement et numériquement par les méthodes de décomposition d'Adomian (ADM) et de Runge Kutta d'ordre 4 respectivement.

Cette investigation visualise d'une part l'effet du champ magnétique (M) et la fraction volumique de diverses nanoparticules (ϕ) sur l'évolution de la vitesse des nano-fluides et du coefficient de frottement. D'autre part, la comparaison entre résultats analytiques (ADM) et numériques (RK4) montre la fiabilité et l'efficacité de la technique ADM adoptée.

Table des matières

Nomenclature

Liste des figures

Liste des tableaux

Introduction générale.....1

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE..... 3

CHAPITRE I : CONCEPT DES ÉCOULEMENTS ET DE LA COUCHE LIMITE

1 INTRODUCTION 4

2 ÉCOULEMENT DES FLUIDES ET TRANSFERT DE CHALEUR 4

2.2 TRANSFERT DE CHALEUR 5

3 PRINCIPE 5

3.1 PARAMETRES SIGNIFICATIFS EN TRANSFERT CONVECTIF 6

3.2 REVUE DE CORRELATIONS 8

3.2.1 Cas de convection forcée 8

3.2.2 Convection naturelle (plaques horizontales) 9

4 CONCEPT DE LA COUCHE LIMITE 9

4.1 COUCHE LIMITE DYNAMIQUE 10

4.2 COUCHE LIMITE THERMIQUE..... 10

4.3 DEFINITIONS ET CARACTERISTIQUES DE LA COUCHE LIMITE 10

4.3.1 Epaisseur de couche limite..... 12

4.4 ÉQUATIONS DE LA COUCHE LIMITE 15

4.5 DECOLLEMENT DE LA COUCHE LIMITE 16

5 MAGNETOHDRODYNAMIQUE 18

5.1 DEFINITION 18

5.2 NOMBRE DE REYNOLDS MAGNETIQUE 18

5.3 DIFFERENTES MODELISATIONS DE LA MHD 19

5.3.1 MHD idéale 19

5.3.2 MHD résistive 20

5.3.3 D'autres modèles de MHD 20

5.4 OBSERVATIONS ET APPLICATIONS 20

5.4.1 Géophysique 20

5.4.2 Astrophysique 21

5.4.3 Ingénierie 21

5.4.4 Navires 21

6 LES NANO-FLUIDES 22

6.1 PREPARATION DES NANO-FLUIDES 22

6.2 PROPRIETES THERMOPHYSIQUES DES NANO-FLUIDES 25

6.2.1 Fraction volumique 25

6.2.2 Masse volumique 25

6.2.3 Chaleur spécifique 25

6.2.4 Viscosité dynamique 25

6.2.5 Conductivité thermique 26

CHAPITRE II : FORMULATION MATHÉMATIQUE DU PROBLEME ÉTUDIÉ

1. LE PROBLEME 27
2. FORMULATION MATHÉMATIQUE DU PROBLEME DYNAMIQUE DU NANO-FLUIDE 27

CHAPITRE III : DESCRIPTION DE LA MÉTHODE DECOMPOSITIONNELLE

7 LA MÉTHODE DECOMPOSITIONNELLE D'ADOMIAN 31
1. PRINCIPE GENERAL DE LA METHODE 31
2. RECHERCHE DES POLYNOMES D'ADOMIAN 33

CHAPITRE IV : RESULTATS ET DISCUSSIONS

1. INTRODUCTION 38
2. PROFIL DE DISTRIBUTION DES VITESSES 38
 2.1. Écoulement classique ($\phi = 0$ et $M=0$) 38
 2.2. Écoulement magnétohydrodynamique classique ($\phi = 0$ et M variable) 39
 2.3. Écoulement de nano-fluides 40
3. Comparaison des résultats pour l'écoulement de nano-fluides 46
4. ÉVOLUTION DU COEFFICIENT DE FROTTEMENT $f''(0)$ 50
CONCLUSION GENERALE 52
RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES 53

<i>Symbole</i>	<i>Description</i>	<i>unité</i>
<i>u</i>	Composante de la vitesse dans la direction <i>x</i> .	[<i>m/s</i>]
<i>v</i>	Composante de la vitesse dans la direction <i>y</i> .	[<i>m/s</i>]
<i>u_e</i>	Vitesse libre (extérieure)	[<i>m/s</i>]
<i>ρ</i>	Masse volumique.	[<i>kg/m³</i>]
<i>P</i>	Pression.	[<i>Pa</i>]
<i>T</i>	Température du fluide.	[° <i>K</i>]
<i>μ</i>	Viscosité dynamique	[<i>kg/m.s</i>]
<i>ν</i>	Viscosité cinématique.	[<i>m²/s</i>]
<i>η</i>	Variable de similitude.	(-)
<i>δ</i>	Épaisseur de la couche limite dynamique.	[<i>m</i>]
<i>δ*</i>	Épaisseur de déplacement	[<i>m</i>]
<i>θ</i>	Épaisseur de quantité de mouvement	[<i>m</i>]
<i>ψ</i>	Fonction de courant.	[<i>m²/s</i>]
<i>φ</i>	Fraction des nanoparticules solides.	(-)
<i>α</i>	Diffusivité thermique.	[<i>m²/s</i>]
<i>C_p</i>	Capacité calorifique à pression constante.	[<i>J.Kg⁻¹.C⁻¹</i>]
<i>λ</i>	la conductivité thermique du milieu	[<i>W.m⁻¹.C⁻¹</i>]
<i>x</i>	Abscisse dans le sens de l'écoulement.	[<i>m</i>]
<i>y</i>	Coordonnée normale à la plaque.	[<i>m</i>]
<i>f</i>	Fonction de la vitesse adimensionnelle.	(-)
<i>f'</i>	Dérivée de la fonction vitesse adimensionnelle.	(-)
<i>f''</i>	Fonction caractérisant le coefficient de frottement fluide-paroi	(-)
<i>σ</i>	Conductivité électrique	[<i>S/m</i>]
<i>L</i>	Opérateur inversible.	(-)
<i>N</i>	Opérateur non linéaire.	(-)
<i>R</i>	Résidu de l'opérateur linéaire.	(-)
<i>A_n</i>	Polynôme d'Adomian pour le problème dynamique.	(-)
<i>Pr</i>	Nombre de Prandtl.	(-)
<i>Nu</i>	Nombre de Nusselt	(-)
<i>Gr</i>	Nombre de Grashof	(-)
<i>Ra</i>	Nombre de Rayleigh	(-)
<i>Re</i>	Nombre de Reynolds	(-)

Φ_x	Flux échangé entre la paroi solide et le fluide	[W]
S	surface	[m ²]
q_x	Flux échangé par unité de surface (densité de flux)	[W. m ⁻²]
\bar{h}	Coefficient moyen de transfert de chaleur par convection	[W. m ⁻² . C ⁻¹]
α	Diffusivité thermique	[m ² . s ⁻¹]
β	Coefficient de dilatation volumique du fluide	[K ⁻¹]
g	Accélération de la pesanteur	[m. s ⁻²]
R_M	Nombre de Reynolds magnétique	(-)
E	Champ électrique	[kg. m. S ⁻³ . K ⁻¹ . A ⁻¹]
B	Champ magnétique	[Tesla = $\frac{kg}{A.S^2}$]
x_D	Point de décollement	
L_{ref}	Longueur de référence caractéristique	[m]
ΔT	Écart de température	[K]
V	Volume	[m ³]
K	Conductivité thermique	[W. m ⁻¹ . C ⁻¹]

Indices et symboles inférieures

<i>nf</i>	Nano-fluide.
<i>f</i>	Fluide.
<i>s</i>	Nanoparticule solide.
P	Température de la paroi.
∞	Condition à l'infini.
m	Moyenne

Acronymes et sigles

MHD	Magnétohydrodynamique
RK4	Runge-Kutta d'ordre quatre
ADM	Adomian Decomposition Method
NUM	Solution numérique

Liste des figures

Figures	Pages
CHAPITRE I	
Figure I.1 : Régimes d'écoulement.	4
Figure I.2 : Couche limites.	5
Figure I. 3 : la couche limite dynamique et la couche limite thermique sur une paroi plane	9
Figure I.4 : Variation de l'épaisseur et de la vitesse de la couche limite dynamique sur une paroi plane.	9
Figure I.5 : Couche limite thermique sur une plaque plane. [10
Figure I.6: Schéma d'écoulement de couche limite sur une plaque plane.	11
Figure I.7 : Rotation des particules fluides dans la zone de couche limite	11
Figure I.8: la zone de couche limite.	12
Figure I.9 : Epaisseur conventionnelle de la couche limite.	12
Figure I.10 : Ecoulement sur une plaque plane (a) pour un fluide parfait (b) pour un fluide réel	13
Figure I.11 : Epaisseur de déplacement de couche limite.	13
Figure I.12 : Epaisseur de déplacement de quantité de mouvement de couche limite	14
Figure I.13 : Epaisseurs de couche limite.	14
Figure I.14 : Décollement de la couche limite.	16
Figure I.15 : forces de pression du décollement de la couche limite.	16
Figure I.16 : Procédé de synthèse de nano-fluide en une seule étape (Argonne National Laboratory, USA)	24
Figure I.17 : Comparaison des conductivités thermiques de fluides courants, de métaux et oxydes métalliques.	24
Figure I.18 : Amélioration de la conductivité thermique en fonction du taux d'agglomération.	25
CHAPITRE II	
Figure II.1 : Géométrie de l'écoulement étudié (schéma).	28
CHAPITRE IV	
Figure IV.1 : Profil de vitesse de Blasius dans la couche limite ($\phi=0$, $M=0$).	39
Figure IV.2: Profil de vitesse d'un écoulement classique dans la couche limite en présence d'un champ magnétique ($\phi=0$ et $M=0$; 0.01 ; 0.2 ; 0.3 ; 0.4 ; 0.5).	40
Figure IV.3: Profil de vitesse d'un écoulement de nano-fluides dans la couche limite sans présence d'un champ magnétique ($\phi=0.01$; $M=0$) – Cas de : CNT ; Al₂O₃ et Cu .	41
Figure IV.4: Profil de vitesse d'un écoulement de nano-fluides dans la couche limite sans présence d'un champ magnétique ($\phi=0.05$; $M=0$) – Cas de : CNT ; Al₂O₃ et Cu .	42
Figure IV.5: Profil de vitesse d'un écoulement nano-fluide dans la couche limite sans présence d'un champ magnétique ($M=0$) – Cas de " CNT-eau "	43
Figure IV.6: Profil de vitesse d'un écoulement nano-fluide dans la couche limite sans présence d'un champ magnétique ($M=0$) – Cas de " Al₂O₃-eau "	43
Figure IV.7: Profil de vitesse d'un écoulement nano-fluide dans la couche limite sans présence d'un champ magnétique ($M=0$) -Cas de " Cu-eau "	44
Figure IV.8: Profil de vitesse d'un écoulement nano-fluide avec ($M=0.5$; $\phi=0.01$) – Cas des nanoparticules CNT ; Al₂O₃ et Cu .	45

Figure IV.9: Profil de vitesse d'un écoulement nano-fluide avec ($M=0.5 ; \phi =0.05$) – Cas des nanoparticules CNT , Al₂O₃ et Cu .	45
Figure IV.10 : Profil de vitesse d'un écoulement classique et l'écoulement de nano-fluide avec ($M=0.5 ; \phi =0.05$) – Cas de nanoparticules Cu .	46
Figure IV.11 : Évolution du coefficient de frottement $f''(0)$ en fonction de ϕ	52
Figure IV.12 : Évolution du coefficient de frottement $f''(0)$ en fonction de M	52

Liste des tableaux

Tableaux	Pages
CHAPITRE I	
Tableau I. 1: convection externe d'une plaque plane.	8
Tableau I. 2: Convection naturelle	8
Tableau I. 3 : Quelques ordres de grandeurs pour le nombre de Reynolds magnétique	18
Tableau I. 4 : Combinaisons nanoparticules/fluides de base	23
CHAPITRE IV	
Tableau IV. 1: Propriétés thermo-physiques du fluide de base et des nanoparticules solides.	38
Tableau IV. 2: Comparaison entre résultats analytique et numérique pour le cas de l'écoulement classique de Blasius ($\phi = 0 ; M = 0$)	39
Tableau IV. 3: Comparaison entre résultats analytique et numérique - Cas de l'écoulement du nano-fluide "CNT-eau" avec $\phi = 0.01$ et $M = 0.3$	46
Tableau IV. 4: Comparaison entre résultats analytique et numérique - Cas de l'écoulement nano-fluide "Al ₂ O ₃ -eau" avec $\phi = 0.01$ et $M = 0.3$	47
Tableau IV. 5: Comparaison entre résultats analytique et numérique - Cas de l'écoulement nano-fluide "Cu -eau" avec $\phi = 0.01$ et $M = 0.3$	47
Tableau IV. 6: Comparaison entre résultats analytique et numérique - Cas de l'écoulement nano-fluide "CNT-eau" avec $\phi = 0.03$ et $M = 0.3$	47
Tableau IV. 7: Comparaison entre résultats analytique et numérique - Cas de l'écoulement nano-fluide "Al ₂ O ₃ -eau" avec $\phi = 0.03$ et $M = 0.3$	48
Tableau IV. 8: Comparaison entre résultats analytique et numérique - Cas de l'écoulement nano-fluide "Cu-eau" avec $\phi = 0.03$ et $M = 0.3$	48
Tableau IV. 9: Comparaison entre résultats analytique et numérique - Cas de l'écoulement nano-fluide "CNT -eau" avec $\phi = 0.05$ et $M = 0.3$	48
Tableau IV. 10: Comparaison entre résultats analytique et numérique - Cas de l'écoulement nano-fluide "Al ₂ O ₃ -eau" avec $\phi = 0.05$ et $M = 0.3$	49
Tableau IV. 11: Comparaison entre résultats analytique et numérique - Cas de l'écoulement nano-fluide "Cu-eau" avec $\phi = 0.05$ et $M = 0.3$	49
Tableau IV. 12: Comparaison entre résultats analytique et numérique - Cas de l'écoulement nano-fluide "CNT-eau" avec $\phi = 0.05$ et $M = 0.5$	49
Tableau IV. 13: Comparaison entre résultats analytique et numérique - Cas de l'écoulement nano-fluide "Al ₂ O ₃ -eau" avec $\phi = 0.05$ et $M = 0.5$	50
Tableau IV. 14: Comparaison entre résultats analytique et numérique - Cas de l'écoulement nano-fluide "Cu -eau" avec $\phi = 0.05$ et $M = 0.5$	50

Introduction générale

Un des problèmes que doit résoudre la mécanique des fluides est celui de l'action d'un courant sur un solide. En effet, plongé dans un fluide en mouvement, un solide subit de la part de celui-ci une action sur la surface de contact dont la détermination est de première importance dans des domaines aussi variés comme la propulsion des navires et des avions, le mouvement des projectiles, les turbomachines...etc. Car toutes les réalisations techniques baignent dans des fluides comme l'air, l'eau et les fluides industriels. Ce problème, dit de la résistance des fluides [1].

Le concept de la couche limite est introduit par "Prandtl" qui montre que les écoulements visqueux, pour la plupart, peuvent être découpés en deux zones :

- Une zone proche à la paroi où les forces visqueuses et d'inertie sont du même ordre de grandeur ; appelée région de couche limite,
- la région extérieure où les forces visqueuses sont négligeables devant les forces d'inertie.

Dans ce travail de mémoire, on va essayer de représenter une étude dynamique de l'écoulement MHD d'un fluide/nano-fluide incompressible sur une plaque plane en absence d'un gradient de pression. La méthode utilisée pour résoudre les équations qui régissent le problème est une méthode semi-analytique dite la méthode de compositionnelle d'Adomian (ADM).

Ce mémoire consiste en quatre chapitres, une introduction générale et une conclusion générale. Il est organisé comme suit :

Dans un premier temps et dans une partie dite de **revue bibliographique**, on a essayé d'exposer quelques travaux académiques en relation avec notre étude.

Le premier chapitre donne un aperçu sur le concept de la couche limite laminaire incompressible ainsi les équations qui gouvernent le problème dynamique. Par ailleurs, on a essayé d'évoquer la question de la magnétohydrodynamique et ses applications. A la fin de ce chapitre nous avons exposés quelques notions sur les nano-fluides.

Le second chapitre de ce mémoire est dédié à la formulation mathématique des équations qui régissent le problème dynamique de l'écoulement magnétohydrodynamique de la couche limite laminaire d'un nano-fluide incompressible sur une plaque plane.

Le troisième chapitre est consacré aux outils mathématiques nécessaires au traitement semi-analytique des équations différentielles non linéaires qui gouvernent le problème étudié. La méthode décompositionnelle d'Adomian (ADM) est présentée et son implémentation sur le problème non linéaire de couche limite laminaire sans présence de gradient de pression (écoulement de Blasius M.H.D.) a été également abordée dans ce chapitre.

Le quatrième chapitre est réservé à la présentation et à la discussion des résultats obtenus par le traitement semi-analytique effectué par la méthode ADM. En effet, nous nous sommes particulièrement intéressés aux effets des paramètres physiques d'intérêt tels que le paramètre du champ magnétique M , la fraction volumique des nanoparticules ϕ , et la nature des nanoparticules sur l'évolution de la distribution des vitesses et du coefficient de frottement. Une comparaison des résultats semi-analytiques obtenus avec ceux de la méthode numérique de Runge-Kutta d'ordre 4 a été également réalisée.

Enfin, le travail élaboré se termine par une conclusion générale.

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

Dans la littérature, les équations de la couche limite laminaire d'un écoulement fluide sur une plaque plane sans présence d'un gradient de pression ont été traitées pour la première fois par Blasius[1] en 1908. En 1931 Falkner-Skan[2] a traité le problème de couche limite laminaire en présence d'un gradient de pression longitudinale. Howarth[3] en 1938 fut le premier qui a donné une solution numérique de l'écoulement de couche limite, en utilisant la méthode numérique de Runge-Kutta. Avec l'apparition des outils de calcul informatique, plusieurs chercheurs ont pu étudier plusieurs autres types d'écoulements de fluides (Newtoniens et/ou non-Newtoniens) avec divers aspect de couche limite. Par exemple, on peut citer le travail élaboré par Sakiadis[4] en 1961. Ce dernier, a étudié le comportement de l'écoulement de couche limite sur une plaque plane par deux méthodes différentes: une numérique et l'autre est une méthode intégrale. Il convient également de citer le fameux travail de Chen et Libby[5] en 1968 sur l'écoulement de couche limite laminaire en considérant le paramètre de gradient de pression constant. Par la suite, plusieurs chercheurs ont tenté de résoudre les équations de Falkner-Skan (Cebeci et Keller [6] en 1971 et Aisathambi[7] en 1998). Récemment, Gherieb et al. [8, 9] sont également intéressés à la résolution semi-analytique des problèmes dynamique, thermique et de transfert de masse dans un écoulement de couche limite laminaire à travers une paroi plane. D'autre part, MerabetAyeche et al. [10] a essayé d'étendre le champ d'étude à l'écoulement de couche limite laminaire pour un fluide biomagnétique tel que le sang humain par exemple.

Le physicien suédois Hannes Alfvén fut le premier à employer le terme magnétohydrodynamique (M.H.D.), en 1942. En effet, ses travaux sur le sujet vont lui permettre en 1970 de recevoir le prix Nobel de physique. Par la suite, la magnétohydrodynamique a subi d'importants développements, initiés en particulier au cours des années 1930-1950 par Hannes Alfvén, à travers l'étude de problèmes astrophysiques ; la (MHD) a donc trouvé dans ce domaine un champ très riche d'applications. Selon la littérature scientifique, plusieurs études portant sur les écoulements M.H.D. sont abordées par plusieurs chercheurs [11-14].

De nos jours, l'étude des nano-fluides connaît un intérêt croissant. Par définition, les nano-fluides sont des fluides dans lesquels sont insérés des particules nanométriques dont la taille est inférieure à 100 nm. Le terme nano-fluides a été donc introduit, pour la première fois, en 1995 par Choi [15]. La présence de ce genre de fines particules dans les fluides de base a montré son intérêt surtout en dynamique des fluides. La littérature scientifique contient également plusieurs travaux numériques et expérimentaux qui caractérisent les problèmes dynamiques et thermiques de l'écoulement de nano-fluides [16-24].

CHAPITRE I :
CONCEPT DES
ÉCOULEMENTES
ET DE LA COUCHE
LIMITE

1 Introduction :

La théorie de la couche limite est utile à l'analyse des nombreux types d'écoulements tels que l'écoulement d'un fluide électriquement conducteur avec la présence de champ magnétique, ce type d'écoulement dit MHD à de larges applications dans de nombreux problèmes d'ingénierie tels que les générateurs MHD, les études de plasma, les réacteurs nucléaires.....etc. La théorie de la couche limite permet aussi l'étude des écoulements nano-fluides, qui sont devenus une source de plusieurs contributions. Nous essayerons dans ce chapitre de donner un contexte de l'étude. Il s'agit de donner un aperçu sur la couche limite, la magnétohydrodynamique et le nano-fluides.

2 Écoulement des fluides et transfert de chaleur

2.1 Les régimes d'écoulement :

Soit un courant d'eau qui circule dans une conduite à section circulaire. On introduit un filet de colorant dans l'axe de cette conduite. Suivant la vitesse d'écoulement de l'eau, on peut observer les phénomènes suivants :

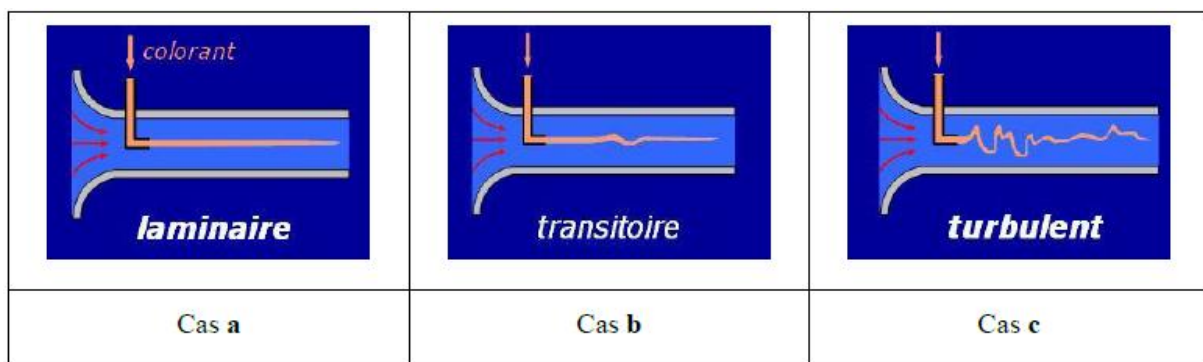


Figure I.1 Régimes d'écoulement [25].

Pour des vitesses faibles, le filet colorant traverse le long de la conduite en position centrale.

Pour des vitesses plus élevées, le filet colorant se mélange brusquement dans l'eau après avoir parcouru une distance. Pour des vitesses très élevées, le colorant se mélange donc immédiatement dans l'eau.

- **Régime laminaire :** (cas a) le fluide s'écoule en couches cylindriques coaxiales ayant pour axe le centre de la conduite.
- **Régime transitoire :** (cas b) c'est une transition entre le régime laminaire et le régime turbulent.
- **Régime turbulent :** (cas c) formation de mouvement tourbillonnant dans le fluide.

Cette expérience est faite par Reynolds en faisant varier le diamètre de la conduite, la température, le débit,etc, pour une variété de fluides [25].

2.2 Transfert de Chaleur :

Un transfert thermique, est l'un des modes d'échange d'énergie interne entre deux systèmes, un autre étant le travail : c'est un transfert d'énergie thermique qui s'effectue hors de l'équilibre thermodynamique. On distingue trois types de transfert thermique, qui peuvent coexister :

- **la conduction**, due à la diffusion progressive de l'agitation thermique dans la matière ;
- **la convection**, transfert thermique qui accompagne les déplacements macroscopiques de la matière ;
- **le rayonnement**, qui correspond à la propagation de photons.

La convection thermique est un phénomène d'échange de chaleur entre une surface solide et un fluide en mouvement ayant des températures différentes. Les mouvements de ce fluide ont pour effet de renouveler perpétuellement les particules au contact de la surface et par conséquent d'en accélérer les échanges de chaleur. Ce mouvement peut être forcé (pompe, ventilateur etc..) ou naturel (sous l'effet de la variation de la densité avec la température et/ou sous l'effet de la pesanteur), on parle alors de convection forcée ou convection naturelle. D'un point de vue phénoménologie, la convection thermique n'est pas un mode "propre" au même titre que la conduction, mais un phénomène couplé qui résulte de deux mécanismes :

- une conduction thermique immédiate au voisinage de la surface (déplacement microscopique) où la vitesse du fluide est presque nulle
- l'énergie ainsi communiquée au fluide (dans le cas d'une surface chaude) se trouve ensuite entraînée par l'écoulement (déplacement macroscopique) [26].

3 Principe :

Les mesures de vitesses dans les écoulements (laminaire ou turbulent) réalisées proche de la paroi ont permis de dévoiler des zones connues sous le nom de couches limites et dans lesquelles les variations de vitesse, température et concentration sont localisées (voir Figure I.2). La quantité de chaleur transmise par convection entre une paroi solide de surface S ayant une température T_P et un fluide en écoulement ayant une température T_∞ ($T_P > T_\infty$) est donnée par :

$$q_x = \frac{\Phi_x}{S} = \bar{h}(T_P - T_\infty) \quad (I.1)$$

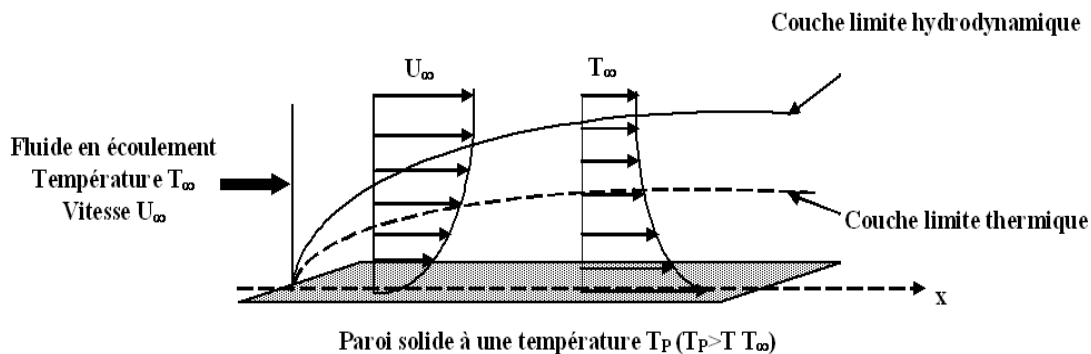


Figure I.2 : Couches limites [26].

Avec :

- ϕ_x est le flux échangé entre la paroi solide de surface S et le fluide [W]
- q_x est le flux échangé par unité de surface (densité de flux) [W. m⁻²]
- S est la surface d'échange [m²]
- \bar{h} est le coefficient moyen de transfert de chaleur par convection [W. m⁻². °C⁻¹]

3.1 Paramètres significatifs en transfert convectif [26] :

- **nombre de Prandtl**

Il s'exprime par :

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\mu C_p}{\lambda} \quad (1.2)$$

Avec :

- ν est la viscosité cinématique [m². s⁻¹]
- α est la diffusivité thermique [m². s⁻¹]
- μ est la viscosité dynamique [kg. m⁻¹. s⁻¹]
- C_p est la chaleur massique [J. kg⁻¹. C⁻¹]
- λ est la conductivité thermique du milieu [w. m⁻¹. C⁻¹]

- **nombre de Reynolds**

Il est donné par :

$$Re_{L_{ref}} = \frac{\bar{u} L_{ref}}{\nu} \quad (1.3)$$

Avec :

- L_{ref} est une longueur de référence caractéristique [m]
- \bar{u} est la vitesse moyenne du fluide [m. s⁻¹]
- pour un écoulement parallèle à une plaque plane ; $L_{ref} = L$ (fig. a)
- pour un écoulement externe perpendiculaire à une conduite horizontale de diamètre d ; $L_{ref} = d$ (fig. b)
- pour un écoulement interne dans une conduite de diamètre d ; $L_{ref} = dh = 4Sp/Pm = d$ (fig. c)
- pour un écoulement dans un espace annulaire d'épaisseur e ; $L_{ref} = dh = 4Sp/Pm = 2e$ (fig. d)

Les nombres de Nusselt, de Grashof et de Rayleigh s'expriment comme suit :

- **nombre de Nusselt :**

$$\overline{Nu}_{L_{ref}} = \frac{\bar{h} L_{ref}}{\lambda_f} \quad (1.4)$$

- **nombre de Grashof**

$$Gr_{L_{ref}} = \frac{L_{ref}^3 \beta \rho^2 g \Delta T}{\mu^2} \quad (1.5)$$

- nombre de Rayleigh

$$Ra_{L_{ref}} = Gr_{L_{ref}} \cdot Pr = \frac{L_{ref}^3 \beta g \Delta T}{\alpha \nu} \quad (1.6)$$

Avec :

- β est le coefficient de dilatation volumique du fluide [K^{-1}]; pour un gaz parfait $\beta = \frac{1}{T_\infty}$
- ρ est la masse volumique du fluide [$Kg \cdot m^{-3}$]
- g est l'accélération de la pesanteur [$m \cdot s^{-2}$]
- $-\Delta T = T_p - T_\infty$ est l'écart de température paroi-fluide [$^\circ K$]

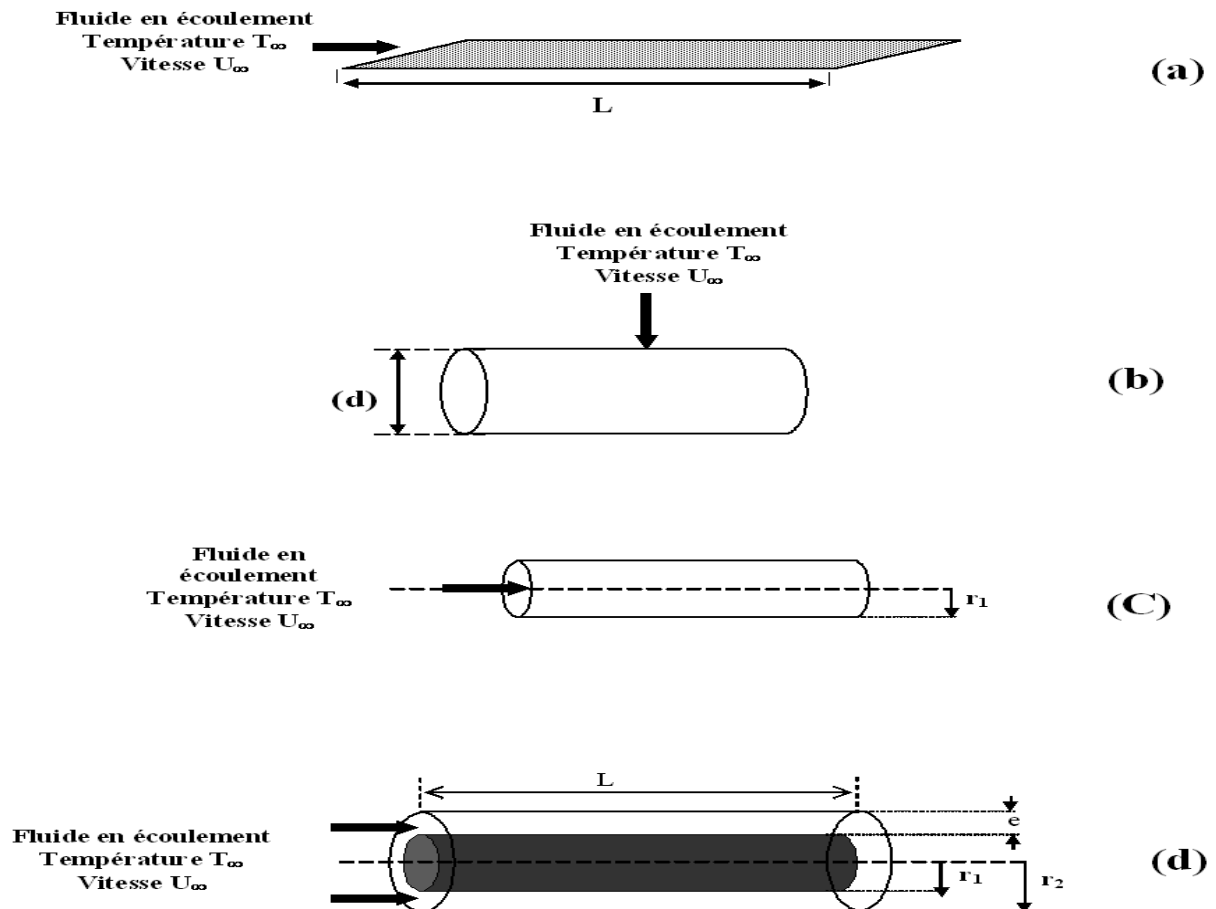


Figure I.3 : Écoulements des fluides [26].

- Notion de température moyenne du fluide

Les propriétés physiques du fluide (viscosité, conductivité, chaleur massique, etc.) sont généralement calculées à la température moyenne du fluide :

- elle peut correspondre à la température prise par le fluide sur la surface intérieure en contact avec l'écoulement.

Elle est appelée, dans ce cas, la température de film ou de surface T_f :

$$T_f = \frac{1}{2}(T_p + T_\infty) \quad (1.7)$$

– pour les écoulements internes en conduites, la température moyenne peut être associée à la température du mélange T_m

$$T_m = \frac{1}{2}(T_e + T_s) \tag{I.8}$$

Avec :

- T_p est la température de la plaque (surface) sur laquelle le fluide s'écoule.
- T_∞ est la température du fluide.
- T_e et T_s sont les températures d'entrée et de sortie du fluide.

3.2 Revue de Corrélations :

Souvent, c'est au travers de corrélations empiriques entre nombres adimensionnels que le coefficient de transfert de chaleur moyen h est accessible, étant donné que la complexité des situations réelles en général n'autorise pas de solutions théoriques. Dans ce qui suit, la présentation de corrélations sera limitée à des configurations de systèmes ayant eu ou pouvant éventuellement avoir de l'intérêt dans la pratique industrielle [26].

N:B : Il ne faut pas oublier que ces corrélations n'ont souvent qu'un domaine limité de validité pas toujours explicite et qu'il faut les utiliser avec beaucoup de précautions [26].

3.2.1 Cas de convection forcée :

3.2.1.1 Écoulements externes sur une plaque plane [26] :

Le Tableau I.1 donne quelques corrélations :

Corrélation	Conditions	
$Nu_x = 0,332Re_x^{1/2}Pr^{1/3}$	Laminaire	$Re \leq 5 \cdot 10^5$; $0,6 \leq Pr \leq 50$
$\overline{Nu}_L = 0,664Re_L^{1/2}Pr^{1/3}$	Laminaire	$Re \leq 5 \cdot 10^5$; $0,6 \leq Pr \leq 50$
$Nu_x = 0,565Re_x^{1/2}Pr^{1/2}$	Laminaire	$Re \leq 5 \cdot 10^5$; $Pr \ll 1$
$\overline{Nu}_L = 1,13Re_L^{1/2}Pr^{1/2}$	Laminaire	$Re \leq 5 \cdot 10^5$; $Pr \ll 1$
$Nu_x = 0,029Re_x^{4/5}Pr^{1/3}$	Turbulent - développé	$Re \leq 5 \cdot 10^5$; $0,6 \leq Pr \leq 60$
$\overline{Nu}_L = 0,036Re_L^{4/5}Pr^{1/3}$	Turbulent - développé	$Re \leq 5 \cdot 10^5$; $0,6 \leq Pr \leq 60$
$\overline{Nu}_L = (0,036Re_L^{4/5} - 871)Pr^{1/3}$	Mixte (lam puis turb)	$Re_L \geq 5 \cdot 10^5$; $Re_{Cr} = 5 \cdot 10^5$; $0,6 \leq Pr \leq 60$
Gaz et liquides : propriétés déterminées à T_f		

Tableau I. 1: Convection externe dans le cas d'une plaque plane [26].

3.2.2 Convection naturelle (plaques horizontales) :

En convection naturelle (cas des plaques horizontales), le Tableau I.2 donne quelques corrélations existantes :

Conditions	Corrélation	Géométrie
surface chaude au dessus ou surface froide au dessous		
$10^4 \leq Ra_L \leq 10^7$	$\overline{Nu}_L = 0,54Re_L^{1/4}$	
$10^7 \leq Ra_L \leq 10^{11}$	$\overline{Nu}_L = 0,15Re_L^{1/3}$	
surface froide au dessus ou surface chaude au dessous		
$10^5 \leq Ra_L \leq 10^{10}$	$\overline{Nu}_L = 0,27Re_L^{1/4}$	
Température pariétale TP constante Propriétés déterminées à Tf		

Tableau I. 2: Convection naturelle [26].

4 Concept de la couche limite :

Considérons l'écoulement d'un fluide avec une vitesse à l'infini amont U_∞ , et une température T_∞ sur une plaque plane à une température T_p . Au voisinage de la paroi, les valeurs de la vitesse et de la température sont différentes de celles de l'écoulement à potentiel et varient en fonction de la distance à la paroi y . Cette zone de gradients de vitesse et de température est appelée couche limite. Elle résulte d'un échange de quantité de mouvement et de chaleur entre le fluide et la paroi. Son épaisseur est généralement petite par rapport à l'ensemble de l'écoulement. On distingue deux types de couche limite : la couche limite dynamique et la couche limite thermique [27].

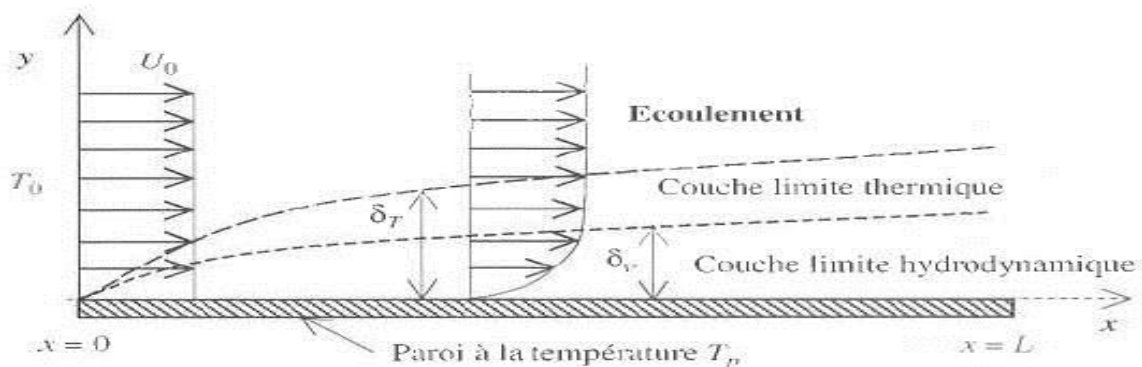


Figure I. 4 : la couche limite dynamique et la couche limite thermique sur une paroi plane [28].

4.1 Couche limite dynamique :

Une des caractéristiques principales d'un fluide est la viscosité. Elle varie avec la température et ne s'annule jamais. À la paroi, la vitesse du fluide est nulle et on observe des forces de frottement qui freinent l'écoulement au voisinage de celle-ci (Figure I.5) [28].

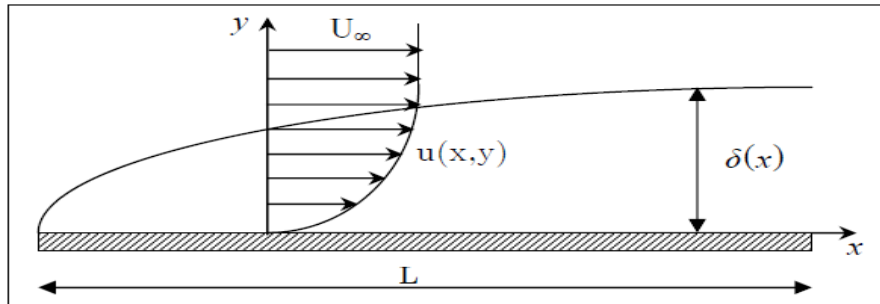


Figure I.5 : Variation de l'épaisseur et de la vitesse de la couche limite dynamique sur une paroi plane [28].

4.2 Couche limite thermique.

Lorsqu'un fluide, de température T_∞ , s'écoule sur une paroi à température T_p , des échanges thermiques s'établissent. Les particules du fluide s'échauffent ou se refroidissent au contact de la paroi. Ces particules échangent de la chaleur de proche en proche avec leurs voisines et un gradient de température se forme (Figure I.6) [28].

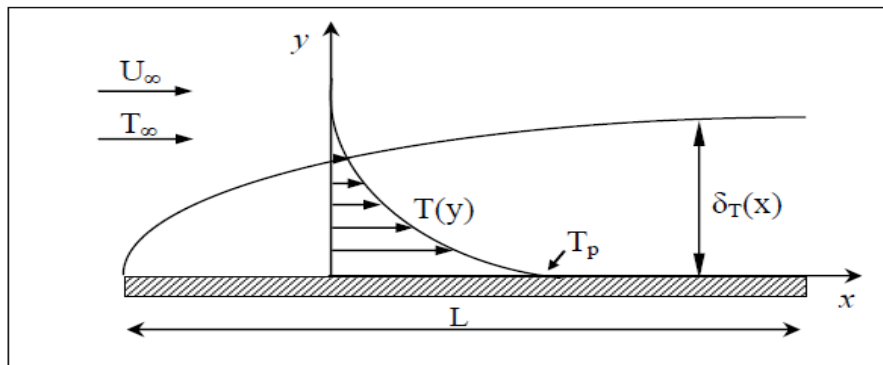


Figure I.6: Couche limite thermique sur une plaque plane [28].

4.3 Définitions et caractéristiques de la couche limite [29] :

L'écoulement d'un fluide visqueux sur une paroi solide représente une région dans laquelle la vitesse augmente de zéro à la paroi et s'approche de la vitesse de l'écoulement libre. Cette région s'appelle la couche limite. La Figure I.6 montre le développement d'une couche limite sur une face d'une longue plaque plane parallèle au sens de l'écoulement. Le gradient de vitesse provoque une contrainte de cisaillement importante au niveau de la paroi τ_o (ou τ_w).

$$\tau_0 = \mu \frac{du}{dy}_{y=0} \quad (\text{I.9})$$

La **couche limite** est la zone d'interface entre un corps et le fluide environnant lors d'un mouvement (écoulement) relatif entre les deux, conséquence de la viscosité du fluide. Le profil de vitesse au sein de la couche limite dépend de son état qui peut être soit laminaire soit turbulent. La transition entre l'état laminaire de la couche limite et l'état turbulent au point X_{cr} (Figure I.6) dépend du nombre de Reynolds (Re) basé sur cette distance, ainsi que de la géométrie du corps lorsque ce corps n'est pas une plaque plane comme dans la Figure I.6, de sa rugosité et de la turbulence de l'écoulement. Entre la couche limite laminaire et la couche limite turbulente, il existe une zone de transition.

Le gradient de vitesse dans la couche limite turbulente est plus grand que celui dans la couche limite laminaire.

* Une région d'entrée ou la couche limite se développe et $\frac{dP}{dx} \neq cte$, la pression est constante,

* Une région où l'écoulement est complètement établi ou :

- La couche limite remplit toute la zone d'écoulement.
- Les profils de vitesse, le gradient de pression, et la contrainte de cisaillement sont constants ; c'est-à-dire qu'ils ne sont pas fonction de (x).
- L'écoulement est soit laminaire, soit turbulent sur toute la longueur de l'écoulement, c'est-à-dire que la phase de transition n'est pas prise en compte.

Cependant, les caractéristiques de la couche limite d'écoulement visqueux pour les écoulements externes sont comme indiqué ci-dessous pour l'écoulement sur une plaque plane. Considérons un écoulement sur une plaque plane, comme illustré à la figure (I.7).

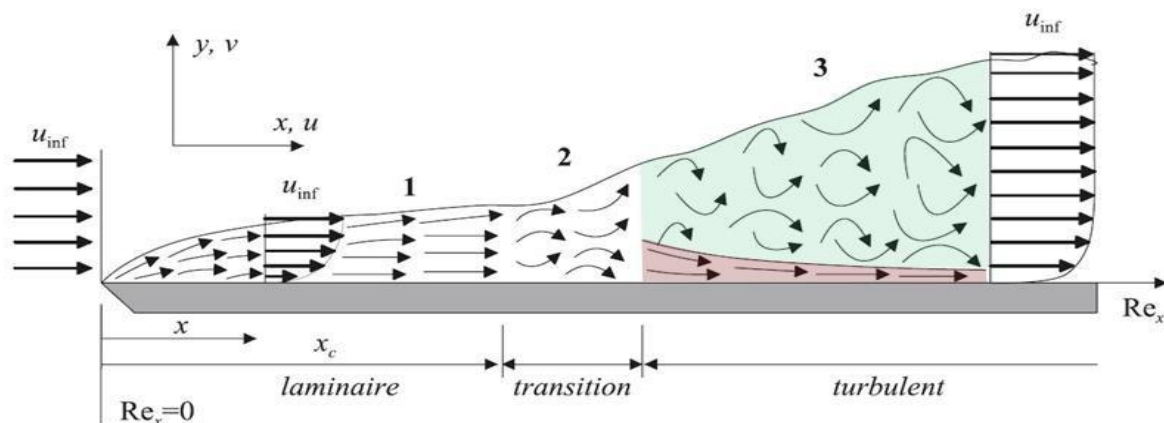


Figure I.7: Schéma d'écoulement de couche limite sur une plaque plane [28].

L'écoulement sur la plaque peut être divisé en deux domaines.

i) $0 \leq y \leq \delta$ écoulement de couche limite dans laquelle l'effet de force visqueuse est important.

En raison de la condition de non-glissement à la paroi, la première couche de fluide subit un retardement. Cette couche retardée provoque un retard supplémentaire pour la couche adjacente, développant ainsi une région mince dans laquelle la vitesse d'écoulement augmente de zéro à la paroi solide et se rapproche de la vitesse de l'écoulement libre.

En raison de la présence d'un gradient de vitesse à l'intérieur de la région de la couche limite, les particules fluides au sommet commencent à se déformer, lesquelles ont une vitesse supérieure à celle se trouvant en bas. Cette force provoque la rotation de la particule fluide lorsqu'elle pénètre dans la région de la couche limite (voir la figure I.8). Par conséquent, cette couche de fluide est appelée également écoulement rotationnel [29].

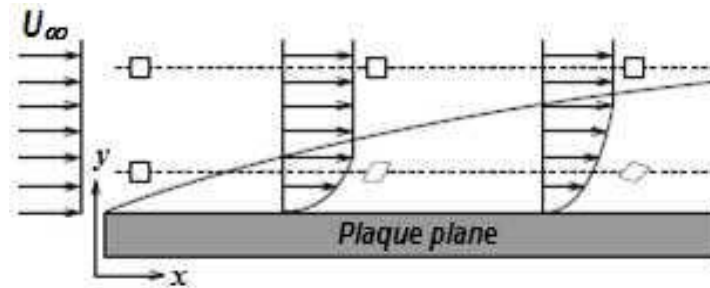


Figure I.8 : Rotation des particules fluides dans la zone de couche limite [29].

ii) $y > \delta$: **Zone d'écoulement externe à la couche limite** où la force visqueuse est très faible et peut être négligée. Il n'y a pas de gradient de vitesse dans cette zone et la particule fluide ne fait pas de rotation lorsqu'elle entrera dans la région extérieure à la couche limite. Par conséquent, l'écoulement est appelé écoulement irrotationnel [29].

Comme le montre la figure, les conditions de la couche limite font que le fluide adhère à la paroi solide. $u = v = 0$ à $y = 0$

Et à l'extérieur de la couche limite, la vitesse du fluide est égale à la vitesse de l'écoulement libre, c'est-à-dire : $u = U_\infty$ à $y \geq \delta$

La condition à la limite suivante est également valable pour l'écoulement de couche limite, $\frac{du}{dy} = 0$ Lorsque $y \geq \delta$

Ceci indique que la distribution de la vitesse est uniforme dans la direction y à l'extérieur de la zone de couche limite [29].

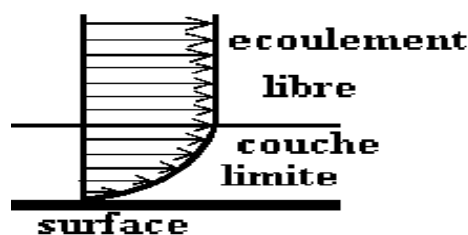


Figure I.9: la zone de couche limite [30].

4.3.1 Épaisseur de couche limite

On distingue trois types d'épaisseur de couche limite, à savoir :

- Épaisseur conventionnelle de la couche limite, δ
- Épaisseur de déplacement de la couche limite, δ^*
- Épaisseur de quantité de mouvement de la couche limite, θ

4.3.1.1 Épaisseur conventionnelle de couche limite, δ

L'épaisseur de la couche limite est définie comme la distance verticale entre la paroi solide et le point où la vitesse de l'écoulement atteint 99% de la vitesse de l'écoulement libre ($u = 0.99U_\infty$)

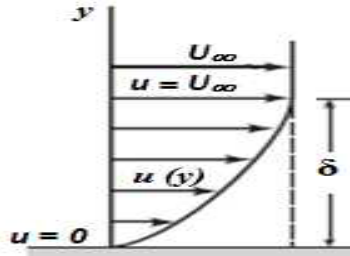


Figure I.10 : Épaisseur conventionnelle de la couche limite [29].

4.3.1.2 Épaisseur de déplacement de la couche limite, δ^*

L'épaisseur de déplacement représente la distance verticale dans laquelle la paroi solide doit être déplacée vers le haut de sorte que le fluide réel ait le même débit massique que le fluide idéal.

Considérons deux types d'écoulement de fluide sur une plaque plane horizontale fixe avec une vitesse d'écoulement U_∞ , comme illustré à la figure (I.11).

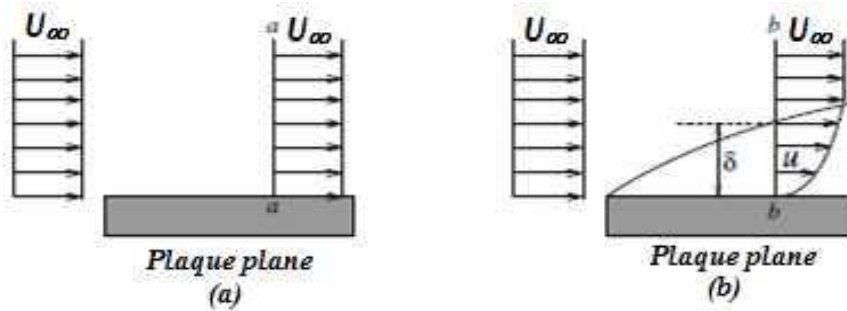


Figure I.11 : Écoulement sur une plaque plane (a) pour un fluide parfait (b) pour un fluide réel [29].

En l'absence de viscosité dans le cas d'un fluide parfait (Figure I.11 (a)), un profil de vitesse uniforme est développé au-dessus de la paroi solide. Cependant, dans le cas de fluide visqueux (fluide réel) et pas de glissement sur la paroi, un gradient de vitesse est développé dans la région de la couche limite, comme le montre la figure I.11 (b).

Le déficit de vitesse à travers la bande d'élément de section transversale $b-b$ (Figure I.11) est $(U_\infty - u)$. Cependant, le déficit en débit massique est obtenu comme suit :

$$(U_\infty - u)bdy \tag{I. 10}$$

Avec, b est la largeur de la plaque.

Le déficit en masse totale due à la présence de viscosité par rapport au cas du fluide parfait.

$$\int_0^\delta \rho U_\infty - u b dy \tag{I. 11}$$

Cependant, si nous déplaçons la plaque d'une distance δ^* vers le haut dans la section $a-a$ (Figure I.11) pour donner une réduction de masse de $\rho U_\infty b \delta^*$, le déficit de débits dans les deux cas sera identique si,

$$\int_0^{\delta} \rho U_{\infty} - u b dy = \rho U b \delta^* \tag{I.12}$$

Et,

$$\delta^* = \int_0^{\delta} 1 - \frac{u}{U_{\infty}} dy \tag{I.13}$$

Avec, δ^* est l'épaisseur de déplacement de la couche limite.

L'épaisseur de déplacement représente la distance verticale dans laquelle la paroi solide doit être déplacée vers le haut de sorte que le fluide parfait ait le même débit massique que le fluide réel[29].

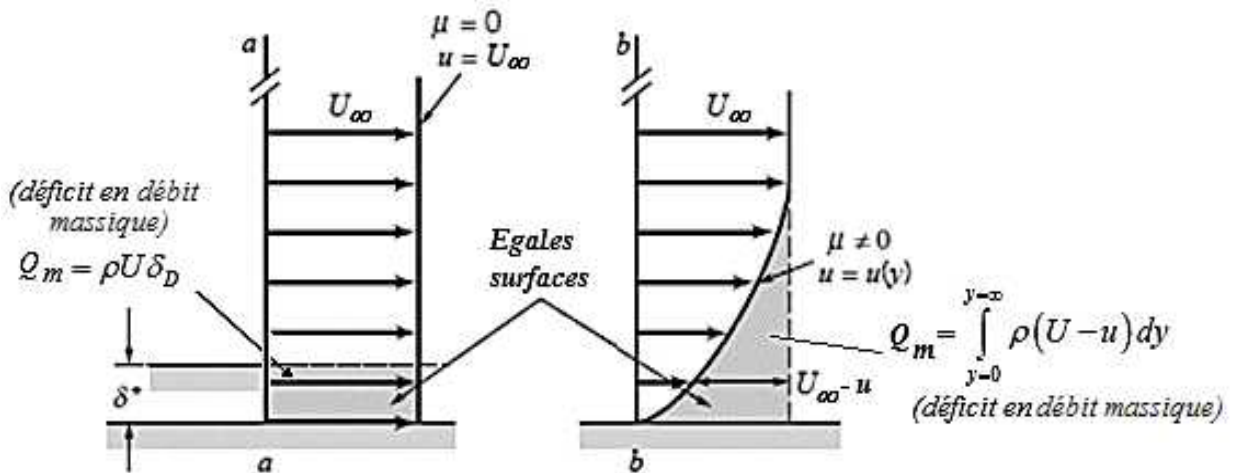


Figure I.12 : Épaisseur de déplacement de couche limite[29].

4.3.1.3 Épaisseur de quantité de mouvement de la couche limite, θ

Une autre épaisseur de la couche limite, il s'agit de l'épaisseur de quantité de mouvement, elle sert à prédire la force de traînée sur la surface de l'objet (Figure I.12) [29]

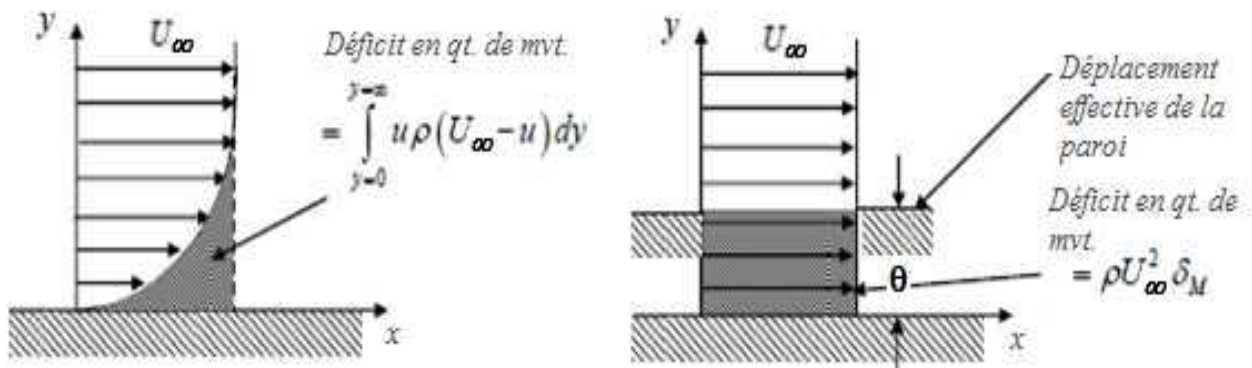


Figure I.13 : Épaisseur de déplacement de quantité de mouvement de couche limite [29].

En référence à la figure I.13, le déficit de vitesse à travers la bande d'élément de section $b-b$ contribue au déficit de flux de quantité de mouvement comme suit :

$$\rho u (U_{\infty} - u) b dy \tag{I.14}$$

Ainsi, le déficit total de la quantité de mouvement s'exprime :

$$\int_0^{\delta} \rho u U_{\infty} - u b dy \tag{I.15}$$

Cependant, si nous déplaçons la plaque d'une distance θ vers le haut à la section a-a pour donner un déficit de quantité de mouvement de $\rho U_\infty^2 b \theta$, le déficit de quantité de mouvement dans les deux cas sera identique si,

$$\int_0^\delta \rho U_\infty - u b dy = \rho U_\infty^2 b \theta \quad (I.16)$$

Et,

$$\theta = \int_0^\delta \frac{u}{U_\infty} \left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dy \quad (I.17)$$

Ici, θ est l'épaisseur de quantité de mouvement de la couche limite.

L'épaisseur de quantité de mouvement représente la distance verticale à laquelle la paroi solide doit être déplacée vers le haut, de sorte que le fluide parfait ait la même quantité de mouvement que le fluide réel.

Les trois différentes épaisseurs de la couche limite sont représentées et comparées dans la figure (I.14) suivante.

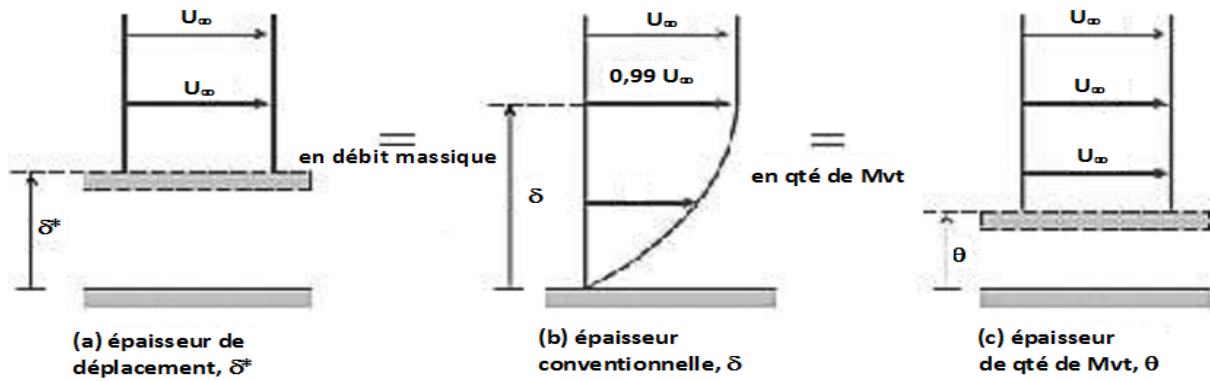


Figure I.14 : Épaisseurs de couche limite [29].

4.4 Équations de la couche limite :

Tout d'abord, on résume les principales hypothèses pour un écoulement de couche limite laminaire. Elles sont généralement:

- écoulement laminaire, permanent, bidimensionnel dans le plan (O x y).
- fluide incompressible ($\rho = Cte$)

L'écoulement peut être donc décrit par les équations de Navier-Stokes ainsi que l'équation de continuité, comme suit :

Suivant x,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \gamma \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (I.18)$$

Suivant y,

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \gamma \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (I.19)$$

Suivant z,

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \gamma \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (I.20)$$

Sous forme vectorielle, elles peuvent être réécrites sous la forme :

$$\rho \vec{g} - \nabla P + \nabla^2 V = \rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \quad (\text{I. 21})$$

L'équation de continuité est :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} \rho u + \frac{\partial \rho}{\partial y} \rho v + \frac{\partial \rho}{\partial z} \rho w = 0 \quad (\text{I. 22})$$

Compte tenu des hypothèses fixées ci-dessus, pour l'écoulement dans la couche limite, les équations de Navier-Stokes et celle de continuité de l'écoulement du fluide sont réduites à :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (\text{I. 23})$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{I. 24})$$

Le système d'équations **I.18**, **I.19** et **I.20** s'appelle les équations de couche limite, elles sont valables seulement dans le domaine de couche limite [29].

4.5 Décollement de la couche limite :

Lors de la convection d'un écoulement de fluide visqueux sur un obstacle, les particules sont animées d'un mouvement entretenu par les forces d'inertie (advection) et retardées par des forces de viscosité se traduisant par un frottement pariétal. En présence d'un gradient de pression, peut s'exercer une action favorable (dans le sens de l'advection) ou défavorable (dans le sens contraire à l'advection). Le sens de cette action est déterminé par le signe du gradient de pression. Cet équilibre des forces mises en jeu dans la couche limite se traduit en tout instant par l'équation de quantité de mouvement sur chaque direction de l'écoulement :

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP_E}{dx} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad (\text{I. 25})$$

Dans le cas de l'existence d'une zone à gradient de pression défavorable, $\frac{dP_E}{dx} > 0$, l'action retardatrice des forces de viscosité renforcée par celle des forces de pression peut, suivant leur intensité, équilibrer celle des forces motrices d'inertie. On atteint alors le point de séparation de la couche limite au-delà duquel les particules fluides s'écartent de la paroi: c'est le décollement [31].

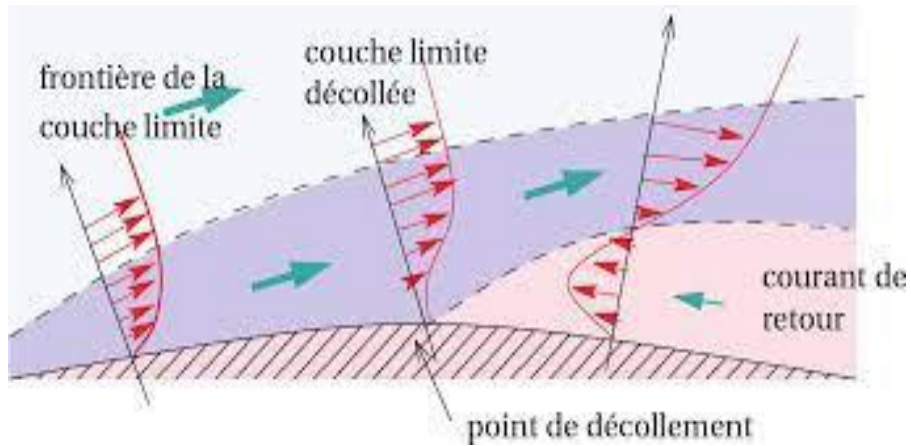


Figure I.15 : Décollement de la couche limite [32].

Le point de décollement est caractérisé par une condition de frottement pariétal nul.

point de décollement : $x = x_D$ tel que :

$$\frac{\partial U(x_D, y)}{\partial y} = 0 \tag{I.26}$$

N.B : Le décollement est le lieu de plusieurs instabilités hydrodynamiques dépendant du nombre de Reynolds de l'écoulement [31].

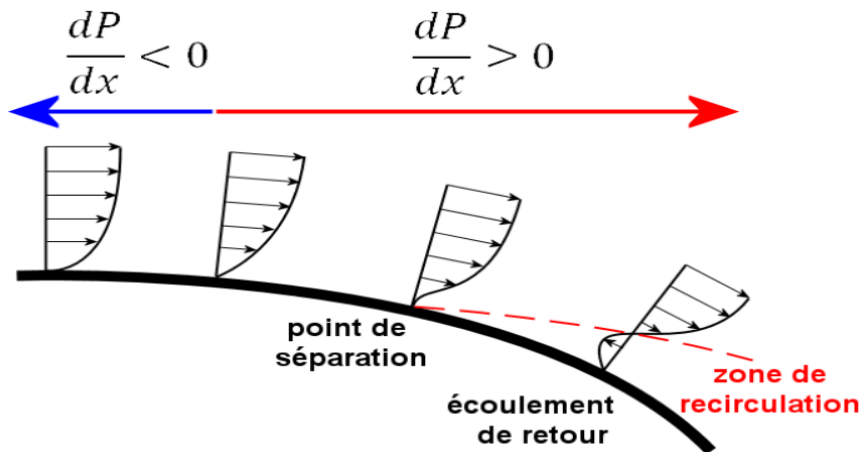


Figure I.16 : forces de pression du décollement de la couche limite [33].

5 Magnétohydrodynamique :

5.1 Définition :

La magnétohydrodynamique (M.H.D.) est une branche de la physique consacrée à l'étude des mouvements des fluides conducteurs de l'électricité en présence de champs magnétiques. Elle s'applique aux métaux liquides (mercure, métaux alcalins fondus), aux gaz faiblement ionisés et aux plasmas.

Lorsqu'un fluide conducteur se déplace dans un champ magnétique, il est le siège d'un champ électrique qui y produit des courants électriques ; ceux-ci modifient le champ magnétique initial ; d'autre part, les forces de Laplace appliquées à la matière le long des lignes de courant modifient le mouvement du fluide. Ainsi apparaît une interaction des effets électromagnétiques et hydrodynamiques qui constitue le domaine d'étude de la M.H.D. L'importance de l'interaction est caractérisée par un nombre sans dimension R_M appelé nombre de Reynolds magnétique ; R_M est proportionnelle à la conductivité électrique du fluide, à sa vitesse et aux dimensions de l'écoulement. L'interaction est généralement faible ($R_M < 1$) dans les métaux liquides et les gaz faiblement ionisés et forte ($R_M > 1$) dans les plasmas.

Le champ magnétique peut être considéré comme un fluide mélangé au fluide matériel et exerçant sur lui des efforts de « pression magnétique » proportionnels au carré de l'induction magnétique B . Si l'interaction champ-matière est forte, ces deux fluides se déplacent solidairement : le champ magnétique est « gelé » dans la matière. Le milieu peut alors propager des ondes spéciales de basse fréquence appelées ondes magnétohydrodynamiques : les plus simples d'entre elles sont les ondes d'Alfvén, qui se propagent parallèlement aux lignes de forces magnétiques.

La magnétohydrodynamique intervient dans l'interprétation de nombreux phénomènes naturels : champs magnétiques et vitesses de rotation des étoiles et des planètes ; taches.....etc. [34].

5.2 Nombre de Reynolds magnétique :

Le nombre de Reynolds magnétique peut être défini, par analogie avec le nombre de Reynolds en hydrodynamique. Il indique le rapport entre les termes de convection et de diffusion dans un fluide magnétique [35].

Il se définit comme : $R_m = \mu_0 \sigma v L$ (I.27)

Où :

- μ_0 est la perméabilité du vide,
- σ est la conductivité électrique,
- L est la longueur caractéristique,

- ν est la vitesse caractéristique du fluide.

On remarque que $\mu_0\sigma$ correspond à l'inverse de la Diffusivité magnétique η .

Ainsi on peut écrire : $R_m = \frac{\nu L}{\eta}$ (I.28)

Sous cette forme on peut ainsi voir que le nombre de Reynolds magnétique à la même structure que le nombre de Reynolds fluide.

Quelques ordres de grandeurs pour le nombre de Reynolds magnétique :

	R_m
INDUSTRIE	
générateur MHD-gaz	10-3
décharge diffuse	10-3
arcjet	6×10^{-2}
métal liquide (mercure)	1 à 10
propulseur MHD à plasma (MPD)	3
réactions thermonucléaires contrôlées	102
ASTROPHYSIQUE	
noyau de la Terre	103
ionosphère	103
atmosphère solaire	108
couronne solaire	1015
espace interplanétaire	1015
espace interstellaire	1021

Tableau I.3 : Quelques ordres de grandeurs pour le nombre de Reynolds magnétique [35].

5.3 Différentes modélisations de la MHD :

Il existe plusieurs modèles de la magnétohydrodynamique selon le degré de complexité nécessaire. Parmi les plus utilisés et plus simples sont :

- la « MHD idéale » ;
- la « MHD résistive ».

Le choix de l'un ou l'autre de ces deux modèles dépend de la valeur du Nombre de Reynolds magnétique R_m [36].

5.3.1 MHD idéale :

La **MHD idéale**, dite aussi à fort nombre de Reynolds magnétique ($R_m \gg 1$), est la forme la plus simple de la MHD. Le fluide, soumis à un fort champ magnétique, est traité comme ayant peu ou pas de résistance électrique, et on l'assimile à un conducteur parfait. La loi de Lenz s'applique de telle sorte que fluide et les lignes de champ magnétique sont intimement

liés : on dit que les lignes de champ sont « gelées » (« *frozen in* ») dans le fluide (on peut également dire que le fluide est gelé dans le champ magnétique). Dans le cas où le fluide est un conducteur parfait, plongé dans un champ magnétique constant et uniforme B_0 dans lequel se propage dans le même sens que l'orientation de ce champ une onde dont le champ magnétique est orthogonale à B_0 , on dit que le théorème d'Alfvén est satisfait. Une analogie consiste à comparer le fluide à un peigne et les lignes de champ aux cheveux : le mouvement des cheveux suit exactement ceux du peigne. Cette MHD idéale est étudiée dans les plasmas chauds, tels les plasmas astrophysiques et thermonucléaires d'origine naturelle (étoiles) ou artificielle (tokamaks).

Les équations de la MHD idéale consistent en l'équation de continuité, les lois de la quantité de mouvement, le théorème d'Ampère (dans la limite de l'absence de champ électrique et de diffusion de l'électron) et les équations de la thermodynamique (conservation de l'énergie). Comme toute description fluide d'un système cinétique, on effectue des approximations du flux de chaleur via des conditions adiabatiques ou isothermes [36].

5.3.2 MHD résistive :

La *MHD résistive*, dite à faible nombre de Reynolds magnétique ($R_m \leq 1$) décrit les fluides magnétisés et non parfaitement conducteurs. On parle en général d'une résistivité engendrée par les collisions entre les constituants du plasma, qui transforment l'énergie magnétique en chaleur (chauffage Joule). Lorsque la résistivité est non négligeable, (nombre de Reynolds petit), le théorème d'Alfvén n'est plus satisfait et la topologie magnétique peut être brisée.

Dans un fluide considéré comme un conducteur non parfait, l'évolution du champ magnétique dans le fluide est donnée par l'équation d'induction résistive. La variation locale du champ magnétique avec le temps est le résultat de son advection par le fluide et de sa diffusion dans le fluide. Le nombre de Reynolds est en facteur inverse de l'opérateur de diffusion, plus il est grand et plus on peut négliger la diffusion par rapport à l'advection. On peut quantifier l'importance de la diffusion en construisant un temps de diffusion [36].

5.3.3 D'autres modèles de MHD :

Selon la finesse requise, on peut complexifier le modèle de base de la MHD en prenant en compte différents effets se produisant dans le fluide. On peut ainsi créer la MHD-Hall, la MHD bi-fluides, MHD Hartmann [36].

5.4 Observations et applications :

5.4.1 Géophysique :

Le noyau fluide de la Terre et d'autres planètes est, selon la théorie en vigueur, une gigantesque dynamo MHD qui génère le champ magnétique terrestre (géomagnétisme). Ce phénomène serait dû aux mouvements de convection du noyau externe métallique et aux courants électriques induits [36].

5.4.2 Astrophysique :

L'astrophysique fut le premier domaine que décrivit la MHD. En effet, la matière observable de l'univers est composée de plasma à plus de 99 %, dont les étoiles, les milieux interplanétaire (l'espace entre les planètes d'un système stellaire) et interstellaire (entre les étoiles), les nébuleuses et les jets. Les taches solaires sont causées par le champ magnétique du Soleil, comme l'a théorisé Joseph Larmor en 1919. Le vent solaire est également gouverné par la MHD, tout comme les éruptions solaires (ruptures de continuité des lignes de champ et éjection de particules et de rayonnements à haute énergie) [36].

5.4.3 Ingénierie :

La MHD intervient dans la conception et la gestion des cuves d'électrolyse pour la production de l'aluminium. Les champs électromagnétiques intenses mettent en mouvement les fluides (aluminium et électrolyte) en créant des vagues imposant une distance minimale entre l'aluminium et les anodes.

La MHD est utilisée de manière théorique dans le confinement des plasmas (stabilisation, expulsion ou compression), notamment les plasmas chauds thermonucléaires dans les machines à fusion par confinement magnétique (comme les tokamaks) ou les dispositifs à striction magnétique (comme la Z machine).

La MHD est aussi directement au cœur d'applications technologiques sous forme de machines électromagnétiques sans pièce mobile, appelées des convertisseurs MHD, qui agissent sur le fluide au moyen de la force électromagnétique (dite force de Lorentz) et qui peuvent être utilisés :

- pour la génération d'électricité (générateur MHD) ;
- pour l'accélération de fluides (accélérateur MHD) ou leur freinage. Dans le cas particulier d'un plasma créé dans de l'air atmosphérique.

Les réalisations industrielles concrètes, au début du XXI^e siècle, restent expérimentales ou couvertes par le secret militaire. Elles se heurtent à de nombreuses difficultés : production de forts champs magnétiques à l'aide d'électroaimants supraconducteurs, génération de puissances électriques suffisantes, matériaux conducteurs résistant à la corrosion... et spécifiquement à la MHD-gaz : matériaux résistant aux fortes températures et densités de courant, systèmes d'ionisation des gaz performants, maîtrise des aspects théoriques des plasmas froids à paramètre de Hall élevé, etc [36].

5.4.4 Navires :

Dans le cadre de la propulsion par magnétohydrodynamique, on peut faire avancer un bateau à l'aide de ce phénomène : c'est ce qu'ont accompli les japonais avec le bateau Yamato 1 par la création d'une tuyère MHD.

La propulsion par MHD nécessite l'emploi d'électrodes. Entre celles-ci, lorsque le système est parcouru par une intensité continue, est créé un champ électrique orthogonal à un champ

magnétique exerçant alors une poussée, ou force de Laplace. Le champ des vitesses dans la tuyère, formé par les électrodes et l'inducteur, s'obtient grâce aux équations de Maxwell et de l'hydrodynamique : le couplage du champ des vitesses à celui du champ magnétique permet de décrire le profil des vitesses. Dans le cadre d'un écoulement d'Hartmann (écoulement stationnaire et laminaire d'un fluide conducteur visqueux supposé incompressible entre deux plaques infinies parallèles), le champ des vitesses est régi par la loi d'Hartmann : celle-ci se discute selon la valeur du nombre d'Hartmann. Si ce type de propulsion est avantageux par l'indépendance des champs électrique et magnétique, l'électrolyse causée par l'emploi d'électrodes pose problème. Les interactions entre le champ électrique et les ions présents dans l'eau de mer causent une accumulation de ces derniers à la cathode se traduisant par un dégagement gazeux, entre autres d'hydroxyde de calcium et de magnésium, électriquement isolant. En plus de bloquer les propriétés conductrices du fluide, ce dégagement est extrêmement bruyant : à haute pression, il est semblable au phénomène de cavitation ; la vaporisation de l'eau, qui se fait à 100 °C, introduit un bruit spécifique qui rend impossible la discrétion de l'embarcation [36].

6 Les nano-fluides :

Depuis une dizaine d'années, on entend beaucoup parler de nanosciences. Les développements que l'on désigne sous ce vocable sont très largement dus aux progrès accomplis en microscopie d'une part, en micro fabrication d'autre part.

Les nano-fluides sont des dispersions de particules de taille nanométrique (dont le diamètre est typiquement inférieur à 100 nm), appelées *nanoparticules*, dans un fluide de base afin d'en améliorer certaines propriétés [37].

Dans le cas des fluides caloporteurs, un des premiers paramètres à prendre en compte afin d'évaluer le potentiel d'échange de chaleur est la conductivité thermique. Or, les fluides les plus employés tels que l'eau, l'huile ou l'éthylène-glycol (EG) ne disposent que d'une conductivité thermique faible par rapport à celle des solides cristallins. Avec les nano-fluides, l'idée est alors d'insérer, au sein du fluide de base, des nanoparticules afin d'augmenter la conductivité thermique effective du mélange [37].

6.1 Préparation des nano-fluides :

Les procédés de fabrication de nanoparticules sont nombreux. Ils peuvent être classés en deux catégories :

- les procédés physiques, comme le broyage mécanique ;
- les procédés chimiques, comme la pyrolyse laser ou la précipitation chimique.

En général, les nanoparticules utilisées pour la synthèse de nano-fluides sont à base d'oxydes, de nitrures, de carbures, de métaux purs ou d'alliages, de nanotubes de carbone (NTC). On trouve également des particules composites pouvant utiliser des polymères.

Le tableau I.4 regroupe une liste non exhaustive de combinaisons de nanoparticules et de fluides de base préparés par différents groupes de recherche [37].

Il existe **deux méthodes principales** pour produire des nano-fluides :

- la **méthode en deux étapes** consiste à produire dans un premier temps les nanoparticules, puis à les disperser dans le fluide de base. Pour permettre une bonne dispersion, une forte action mécanique à l'aide d'un agitateur rotatif ou d'ultrasons est souvent nécessaire afin de briser les agglomérats. En outre, pour éviter l'agglomération due aux forces d'attraction entre les particules, on utilise des forces de répulsion électrostatique en chargeant la surface des particules en adaptant le pH. On peut également utiliser les forces de répulsion stériques à l'aide de molécules adsorbées ou greffées sur la surface ;

	Acétone	Eau	Éthylène glycol	Huile	Toluène	Décène	Éthanol
Ag		X		X			
AlN							X
Au		X			X		
Al ₇₀ Cu ₃₀			X				
Al ₂ O ₃		X	X	X			
Bi ₂ Te ₃							
C (diamant)		X					
C (graphite)		X		X			
C (NTC)		X		X		X	
C (fullerène)				X	X		
Cu	X	X	X	X			
CuO		X	X				
Fe			X				
SiC		X					
SiO ₂		X	X				
TiO ₂		X	X				
WO ₃			X				
ZrO ₂		X					

Tableau I. 4 : Combinaisons nanoparticules/fluides de base [37]

- la **méthode en une seule étape** consiste à produire les nanoparticules dans le fluide de base. Moins industrielle, elle n'est utilisable que pour certains nano-fluides mais permet d'éviter l'agglomération et l'oxydation des nanoparticules. Un exemple de procédé consiste à condenser sous forme de nanoparticules une vapeur métallique dans un réacteur sur un film de liquide à basse tension de vapeur [37].

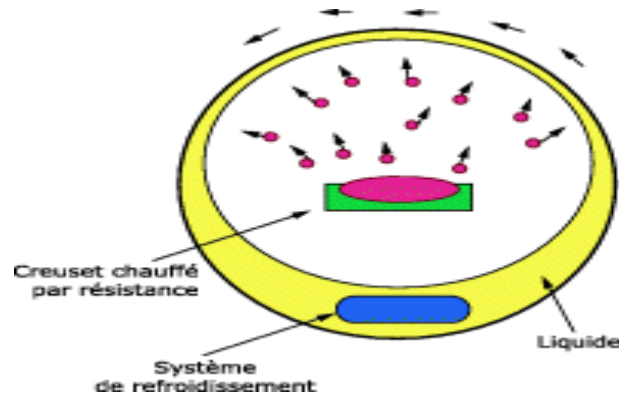


Figure I.17: Procédé de synthèse de nano-fluide en une seule étape (Argonne National Laboratory, USA) [37].

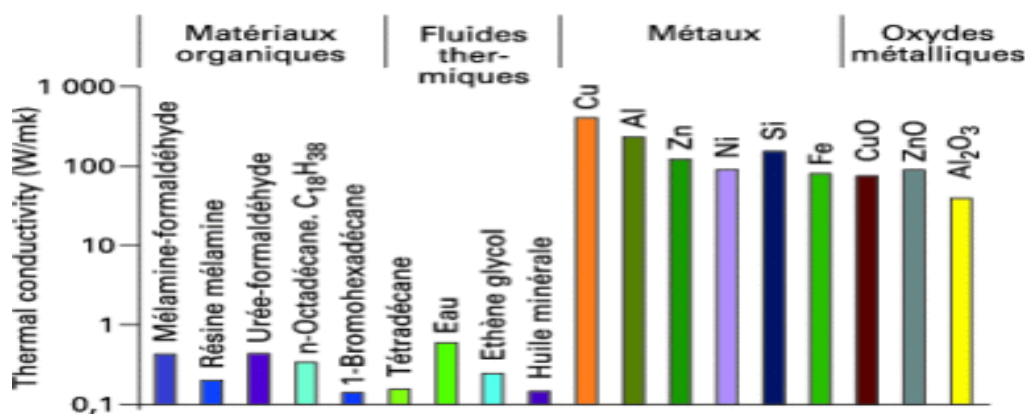


Figure I.18 : Comparaison des conductivités thermiques de fluides courants, de métaux et oxydes métalliques [38].

Plusieurs hypothèses sont envisagées :

Les **mouvements browniens** permettent aux particules de bouger dans un fluide et génèrent des collisions, donc des transports de chaleur solide-solide directs. Ils peuvent accroître la conductivité thermique du nano-fluide ;

La **couche de liquide située à l'interface liquide/particule** a une structure atomique beaucoup plus ordonnée que la majeure partie du liquide restant. Étant donné que les structures cristallines, très ordonnées, disposent d'une conductivité plus élevée que les liquides, on peut supposer que la couche de liquide inter faciale a une conductivité thermique plus élevée que le reste du liquide, ce qui doit mener à une conductivité plus élevée du nano-fluide ;

En créant des chemins de moindre résistance thermique, les **regroupements de particules** peuvent avoir un effet majeur sur la conductivité thermique effective. On parle de regroupement et non d'agglomération de particules. De tels regroupements de particules ont été observés expérimentalement. La figure 7 montre l'effet du regroupement de particules sur la conductivité thermique en fonction du taux d'agglomération (volume physique des particules sur volume du regroupement). Quand ce rapport diminue, on observe une augmentation de la conductivité thermique [38].

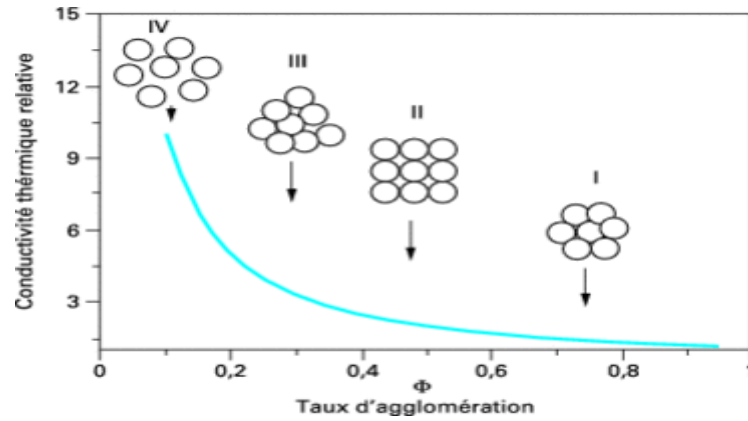


Figure I.19 : Amélioration de la conductivité thermique en fonction du taux d'agglomération [38].

Le développement industriel de ces solutions innovantes reste conditionné par la maîtrise des processus de production des nanoparticules et d'intégration aux fluides thermiques courants, par la baisse des coûts de ces opérations et par une évaluation des impacts techniques et économiques sur des systèmes complets [38].

6.2 Propriétés thermophysiques des nano-fluides :

6.2.1 Fraction volumique :

$$\phi = \frac{V_s}{V_T} = \frac{V_s}{V_s + V_f} \tag{I. 33}$$

V_s : Volume de solide (nanoparticules) ;
 V_f : Volume du fluide de base ;
 V_T : Volume totale (nanoparticules + fluide de base).

6.2.2 Masse volumique :

La détermination de la masse volumique d'un nano-fluide parfaitement homogène en fonction de la fraction volumique ϕ à une température T donnée :

$$\rho_{nf} = \phi \rho_s + (1 - \phi) \rho_f \tag{I. 34}$$

6.2.3 Chaleur spécifique :

Pour la détermination de la chaleur spécifique d'un nano-fluide, on peut citer le modèle de du Xuan et Roetzel le plus rencontrés dans la littérature.

$$(\rho C_p)_{nf} = (\rho C_p)_s + (1 - \phi) (\rho C_p)_f \tag{I. 35}$$

6.2.4 Viscosité dynamique :

La viscosité peut être définie comme étant une propriété d'un fluide pour qu'il résiste aux déformations lorsqu'il est mis en mouvement.

On peut donc parler de la viscosité comme étant une mesure du frottement interne d'un fluide. Un liquide très visqueux est un liquide qui présente un frottement interne élevé.

Les différents modèles de viscosités :

- **Modèle d'Einstein** : La viscosité dynamique d'un nano-fluide pour un mélange contenant des suspensions diluées de particules fines rigides est donnée par la relation suivante:

$$\frac{\mu_{nf}}{\mu_f} = 1 + 2.5\phi \quad (I.36)$$

Cette relation est valable pour le cas de particules sphériques et pour de très faible fraction volumique $\phi \leq 0.03$.

- **Modèle de Brinkman** : Par contre, Brinkman a généralisé la formule pour qu'elle puisse être utilisée dans une large plage de concentration de fraction massique.

$$\frac{\mu_{nf}}{\mu_f} = \frac{1}{(1 - \phi)^{2.5}} \quad (I.37)$$

- **Modèle de Batchelor** : Batchelor [38] a montré que la viscosité est une fonction non linéaire de ϕ avec la présence d'un terme en ϕ^2 :

$$\mu_{nf} = \mu_f(1 + 2.5\phi + 6.2\phi^2) \quad (I.38)$$

6.2.5 Conductivité thermique

Une grande partie des travaux traitant des nano-fluides porte sur la quantification de l'augmentation de la conductivité thermique. Une loi empirique appelée loi des mélanges, était proposée par S.K. Das et al. [37] :

$$\kappa_{eff} = [1 + \phi \left(\left(\frac{\kappa_s}{\kappa_f} \right)^n - 1 \right)]^{1/n} \quad (I.39)$$

Pour $n=1$ cette loi devient la loi de mélange parallèle :

$$\kappa_{eff} = \left[1 + \phi \left(\left(\frac{\kappa_s}{\kappa_f} \right) - 1 \right) \right] \quad (I.40)$$

Cette équation indique que la conductivité thermique effective d'un mélange est simplement une combinaison linéaire du rapport de la conductivité thermique des particules et du fluide de base [37].

**CHAPITRE II:
FORMULATION
MATHÉMATIQUE
DU PROBLEME
ÉTUDIÉ**

1. Le problème :

Considérons l'écoulement de couche limite laminaire uniforme, bidimensionnel et stationnaire d'un nano-fluide visqueux, électriquement conducteur et incompressible sur une plaque plane. Comme le montre la Figure II.1, l'écoulement est soumis à un champ magnétique transversal d'intensité B qui est supposé être appliqué dans la direction- y , normale à la surface. L'écoulement qui entraine la couche limite est uniforme et la vitesse à la frontière de la couche limite est notée u_e .

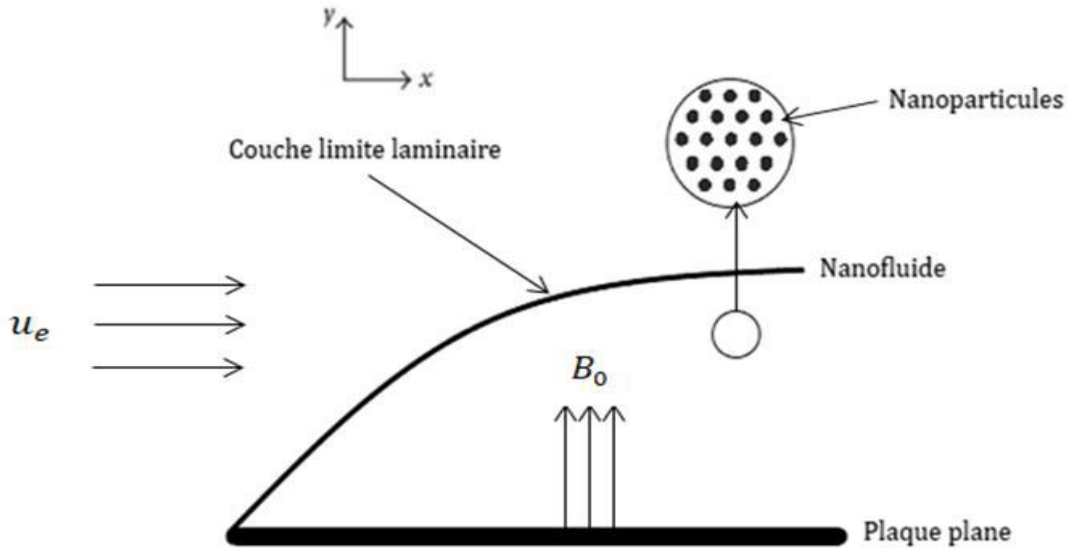


Figure II.1 : Géométrie de l'écoulement étudié (schéma) [39].

2. Formulation mathématique du problème dynamique du nano-fluide :

Dans le cas d'une plaque plane dans un écoulement uniforme d'un nano-fluide on considère que l'écoulement bidimensionnel stationnaire incompressible avec gradient de pression extérieure nul soumis à un champ magnétique dans la direction y

→ $(u = u_e = Cte, \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \frac{\partial p}{\partial x} = 0)$ à l'extérieur de la couche limite, $(\frac{\partial p}{\partial y} = 0)$ dans la couche limite et $\frac{\sigma B^2(x)}{\rho}(u_e - u)$ selon y .

Donc, l'équation de continuité est :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{II. 1}$$

Et l'équation de Navier-Stokes en coordonnées cartésiennes est alors :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\sigma B^2(x)}{\rho}(u_e - u) \tag{II. 2}$$

Avec les conditions aux limites :

$$\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{0}, \mathbf{v}(x, 0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}(x, \infty) = \mathbf{u}_e \quad (\text{II.3})$$

Le terme $\sigma B^2(\mathbf{u}_e - \mathbf{u})$ dans l'équation (II.2) est la force de Lorentz.

Pour atteindre la similarité de la solution des équations (II.1), (II.2) avec les conditions aux limites (II.3), on pose :

$$B(x) = B_0 x^{\frac{m-1}{2}} \text{ et } \mathbf{u}_e = \mathbf{a}_0 x^m$$

Selon Blasius, le gradient de pression est nul, ce qui va conduire à considérer que $\mathbf{m}=\mathbf{0}$. Les paramètres B_0 et \mathbf{a}_0 sont des constantes.

Par introduction de la fonction de courant $\psi(x, y)$, tel que :

$$\mathbf{u} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \mathbf{v} = - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (\text{II.4})$$

L'équation de continuité est ainsi automatiquement satisfaite, mais l'équation de la quantité de mouvement fait apparaître des dérivées partielles jusqu'au troisième ordre :

Nous trouvons :

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nu_{nf} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + \frac{\sigma}{\rho_{nf}} B^2(x)(\mathbf{u}_e - \mathbf{u}) \quad (\text{II.5})$$

Les trois conditions aux limites écrites pour ψ sont :

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, \infty) = \mathbf{u}_e \quad (\text{II.6})$$

Avec :

$$\psi(x, y) = (\mathbf{u}_e x \nu)^{\frac{1}{2}} \cdot f(\eta) \quad (\text{II.7})$$

Si on introduit la variable de similitude ;

$$\eta = y \left(\frac{\mathbf{u}_e}{\nu x} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{II.8})$$

Et la fonction qui caractérise la distribution des vitesses choisit de telle façon à satisfaire :

$$\frac{\mathbf{u}}{\mathbf{u}_e} = f' \quad (\text{II.9})$$

La solution implique donc :

Pour résoudre l'équation (II.2), nous devons déterminer, en premier, les dérivées successives de ψ par rapport à x et y .

Notons d'abord :

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{1}{2} \frac{\eta}{x} \quad ; \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\eta}{y} \quad (\text{II. 10})$$

Ainsi :

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = u_e f' \quad ; \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{2} \left(\frac{u_e v}{x} \right)^{\frac{1}{2}} f - \frac{1}{2} u_e \frac{y}{x} f' \quad (\text{II. 11})$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{2} u_e \left(\frac{u_e}{v x^3} \right)^{\frac{1}{2}} y f'' \quad ; \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = u_e \left(\frac{u_e}{v x} \right)^{\frac{1}{2}} f'' \quad ; \quad \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} = \frac{u_e^2}{v x} f''' \quad (\text{II. 12})$$

Après simplification (c.a.d. en tenant compte de II.10, II.11 et II.12), l'équation (II.5) devient :

$$\frac{1}{2} f f'' + \frac{\mu_{nf} \rho_f}{\rho_{nf} \mu_f} f''' + \frac{\sigma B_0^2}{\rho_{nf} u_e} (1 - f') = 0 \quad (\text{II. 13})$$

Avec la viscosité dynamique du nano-fluide :

$$\mu_{nf} = \frac{\mu_f}{(1 - \phi)^{2.5}} \quad (\text{II. 14})$$

La masse volumique du nano-fluide :

$$\rho_{nf} = (1 - \phi) \rho_f + \phi \rho_s \quad (\text{II. 15})$$

Et on deviné le paramètre magnétique :

$$M = \frac{\sigma B_0^2}{\rho_f u_e} \quad (\text{II. 16})$$

On obtient :

$$\frac{1}{(1 - \phi)^{2.5} [(1 - \phi) + \phi \frac{\rho_s}{\rho_f}]} f''' + \frac{1}{2} f f'' + \frac{M}{(1 - \phi) + \phi \frac{\rho_s}{\rho_f}} (1 - f') = 0 \quad (\text{II. 17})$$

Les conditions aux limites pour $f(\eta)$ sont obtenues à partir de celles définies pour la fonction de courant ψ . Donc, on obtient :

$$f'(0) = 0, \quad f(0) = 0, \quad f'(\infty) = 1 \quad (\text{II. 18})$$

Cas particulier :

Si on prend $\phi = 0$ et $M = 0$, l'équation (II.17) devient :

$$f''' + \frac{1}{2} f f'' = 0 \quad (\text{II. 19})$$

L'équation (II.19) est celle de Blasius pour un écoulement classique d'un fluide incompressible et visqueux sans présence d'un champ magnétique et sans gradient de pression. .

CHAPITRE III :
DESCRIPTION DE LA
MÉTHODE
DECOMPOSITIONNELLE
D'ADOMIAN ET SON
APPLICATION AU
PROBLEME ÉTUDIÉ

7 LA MÉTHODE DECOMPOSITIONNELLE D'ADOMIAN

Dans les débuts des années quatre-vingt Mr George Adomian a développé une méthode appelée méthode décompositionnelle d'Adomian qui permet de trouver une approximation aussi précise que l'on veut d'une solution d'un problème. En effet, cette méthode permet de trouver les solutions de toute sorte d'équations fonctionnelles même dans le cas non linéaire comme les équations aux dérivées partielles, les équations différentielles ordinaires et les équations aux dérivées partielles fractionnaires. [40]

L'avantage de cette méthode est de permettre la résolution par un schéma direct le problème considéré où la solution est obtenue sous forme de séries, rapidement convergentes.

Beaucoup d'auteurs ont donné un grand intérêt à l'application de cette méthode, et à la résolution des problèmes aussi bien déterministe que stochastique.

Dans ce chapitre, on va exposer le principe de cette méthode sur un problème non linéaire. [41]. Le principe de la méthode ADM sera également appliqué sur le problème non linéaire de couche limite de Blasius MHD étudié.

1. Principe général de la méthode:

Soit l'équation fonctionnelle :

$$\mathbf{F} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (\text{III.1})$$

Où \mathbf{f} est une fonction donnée et \mathbf{F} est un opérateur différentiel non linéaire d'un espace de Hilbert \mathbf{H} dans \mathbf{H} , contient des termes linéaires et des termes non linéaires c.-à-d. :

\mathbf{F} = des termes linéaires + des termes non linéaires.

La partie linéaire est notée \mathbf{P} et la partie non linéaire est notée \mathbf{N} .

Donc, on a :

$$\mathbf{F} = \mathbf{P} + \mathbf{N} \quad (\text{III.2})$$

\mathbf{P} sera décomposer en deux termes \mathbf{L} et \mathbf{R} c.-à-d. $\mathbf{P} = \mathbf{L} + \mathbf{R}$, où \mathbf{L} est un opérateur inversible et \mathbf{R} est le reste de la partie linéaire \mathbf{P} .

L'équation (III.1) s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{L}(\mathbf{u}) + \mathbf{R}(\mathbf{u}) + \mathbf{N}(\mathbf{u}) = \mathbf{f} \quad (\text{III.3})$$

En appliquant l'opérateur inverse \mathbf{L}^{-1} à l'équation (III.3) on trouve :

$$\mathbf{L}^{-1}\mathbf{L}(\mathbf{u}) = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{f} - \mathbf{L}^{-1}\mathbf{R}(\mathbf{u}) - \mathbf{L}^{-1}\mathbf{N}(\mathbf{u}) \quad (\text{III.4})$$

**CHAPITRE III : DESCRIPTION DE LA MÉTHODE DECOMPOSITIONNELLE
D'ADOMIAN ET SON APPLICATION AU PROBLEME ÉTUDIÉ**

À titre d'exemple, on prend L un opérateur différentiel d'ordre 1 comme suit :

$$L(u) = \frac{d(u)}{dt} \quad ; \quad L^{-1}(u) = \int_0^t (u) dt \quad (\text{III.5})$$

On obtient :

$$L^{-1}L(u) = u - u(0) \quad (\text{III.6})$$

Alors :

$$u = u(0) + L^{-1}f - L^{-1}R(u) - L^{-1}N(u) \quad (\text{III.7})$$

On cherche la solution u sous la forme :

$$u = \sum_{i=0}^n u_i = u(0) + L^{-1}f - L^{-1}R\left(\sum_{i=0}^n u_i\right) - L^{-1}N\left(\sum_{i=0}^n u_i\right) \quad (\text{III.8})$$

En utilisant la formule (III.8), on trouve :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0(x, t) = u(0) + L^{-1}f \\ u_1(x, t) = -L^{-1}R(u_0) - L^{-1}N(u_0) \\ u_2(x, t) = -L^{-1}R(u_1) - L^{-1}N(u_1) \\ \quad \quad \quad \cdot \\ \quad \quad \quad \cdot \\ \quad \quad \quad \cdot \\ u_{n+1}(x, t) = -L^{-1}R(u_n) - L^{-1}N(u_n) \end{array} \right. \quad (\text{III.9})$$

Remarque

Si L est un opérateur différentiel d'ordre 2, c'est-à-dire :

$$L(u) = \frac{\partial^2(u)}{\partial x^2} \quad , \quad L^{-1}(u) = \int_0^x \left[\int_0^x (.) dx \right] dx \quad (\text{III.10})$$

On obtient :

$$L^{-1}L(u) = u - u(0) - u'(0)x \quad (\text{III.11})$$

Où $u(0)$ et $u'(0)$ sont données.

*En général, si L un opérateur différentiel d'ordre n , on utilise la formule :

$$L^{-1}L(u) = u - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-t_0)^k}{k!} u^{(k)}(t_0) \quad (\text{III.12})$$

Où $u(t_0)$, $u'(t_0)$ et $u''(t_0)$, ... sont données.

2. Recherche des polynômes d'Adomian :

L'étape la plus importante dans la méthode de décomposition est celle du calcul des polynômes d'Adomian.

On décompose le terme non linéaire :

$$N(u) = N\left(\sum_{i=0}^n u_i\right) \quad (\text{III.13})$$

En écrivant $N(u)$ sous forme d'une série de polynômes spéciaux, appelés polynômes d'Adomian. On obtient donc :

$$N(u) = \sum_{i=0}^n A_i \quad (\text{III.14})$$

Les polynômes A_n sont donc les polynômes d'Adomian.

Pour obtenir les polynômes, on introduit le paramètre λ comme suit :

$$u(\lambda) = \sum_{i=0}^n \lambda^i u_i = u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \dots + \lambda^i u_i + \dots \quad (\text{III.15})$$

$$N(u(\lambda)) = \sum_{i=0}^n \lambda^i A_i = A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2 + \dots + \lambda^i A_i + \dots \quad (\text{III.16})$$

En utilisant les deux formules (3.15) et (3.16) :

$$A_1 = \frac{1}{1!} \left[\frac{d}{d\lambda} N(u(\lambda)) \right]_{\lambda=0} \quad A_2 = \frac{1}{2!} \left[\frac{d^2}{d\lambda^2} N(u(\lambda)) \right]_{\lambda=0} \quad (\text{III.17})$$

$$A_3 = \frac{1}{3!} \left[\frac{d^3}{d\lambda^3} N(u(\lambda)) \right]_{\lambda=0} \quad A_n = \frac{1}{n!} \left[\frac{d^n}{d\lambda^n} N(u(\lambda)) \right]_{\lambda=0}$$

Remarque

Nous pouvons obtenir les polynômes d'Adomian en posant :

$$u(\lambda) = \sum_{i=0}^n \lambda^i u_i, \quad N(u(\lambda)) = \sum_{i=0}^n \lambda^i A_i \quad (\text{III.18})$$

En développant $\mathbf{u}(\lambda)$ sous forme de puissances de λ et en comparant, on trouve que A_n représente le coefficient de λ^n .

Exemple : $N\mathbf{u} = \mathbf{u}^2$.

$$A_0 = \mathbf{u}_0^2$$

$$A_1 = 2 \mathbf{u}_0 \mathbf{u}_1$$

$$A_2 = \mathbf{u}_1^2 + 2 \mathbf{u}_0 \mathbf{u}_2$$

$$A_3 = 2 \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 + 2 \mathbf{u}_0 \mathbf{u}_3$$

$$A_4 = \mathbf{u}_2^2 + 2 \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_3 + 2 \mathbf{u}_0 \mathbf{u}_4$$

$$A_5 = 2 \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_3 + 2 \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_4 + 2 \mathbf{u}_0 \mathbf{u}_5$$

3. Application de la méthode d'Adomian sur le problème étudié :

Dans ce chapitre, nous appliquerons la méthode de décomposition d'Adomiana l'équation non linéaire (III.19) caractérisant la dynamique du problème de couche limite laminaire en présence d'un champ magnétique et sans gradient de pression (Écoulement dit de Blasius M.H.D.).

$$f''' + M(1 - \phi)^{2.5} = M(1 - \phi)^{2.5} f' - \frac{1}{2}(1 - \phi)^{2.5} \left[(1 - \phi) + \phi \frac{\rho_s}{\rho_f} \right] f f'' \quad (\text{III.19})$$

3.1. Application de la méthode pour le problème dynamique du nano-fluide :

Pour résoudre le problème étudié caractérisé par l'équation (III.19) en utilisant la méthode ADM, nous choisissons l'opérateur linéaire suivant:

L , un opérateur différentiel d'ordre 3, s'exprimant par :

$$L = \frac{d^3}{d(\eta)^3} \quad (\text{III.20})$$

Par application de (III.20) sur l'équation (III.19), on aura :

$$Lf + M(1 - \phi)^{2.5} = M(1 - \phi)^{2.5} f' - \frac{1}{2}(1 - \phi)^{2.5} \left[(1 - \phi) + \phi \frac{\rho_s}{\rho_f} \right] f f'' \quad (\text{III.21})$$

Considérons maintenant l'opérateur inverse:

$$L^{-1} = \int_0^\eta \int_0^\eta \int_0^\eta (\cdot) d\eta d\eta d\eta \quad (\text{III.22})$$

Pour la deuxième opération (seconde itération):

$$\begin{aligned}
 A_1 = & 0.2916666666666667C_5^2M\eta^4(1-\phi)^{2.5} & \text{(III. 30)} \\
 & - 0.04583333333333334C_5^3\eta^5(1-\phi)^{2.5} \\
 & + M0.16666666666666666C_5\eta^3 \\
 & - 0.041666666666666664M\eta^4(1-\phi)^{2.5}(1-\phi)^{2.5} \\
 & - 0.125C_5M^2\eta^5(1-\phi)^5 \\
 & + 0.018055555555555557C_5^2M\eta^6(1-\phi)^5 \\
 & - 0.09166666666666666C_5M^2\eta^5(1-\phi)^{2.5}(1-\phi)^{2.5} \\
 & + 0.04444444444444443C_5^2M\eta^6(1-\phi)^{2.5}(1-\phi)^{2.5} \\
 & + 0.03611111111111111M^3\eta^6(1-\phi)^5(1-\phi)^{2.5} \\
 & - 0.016666666666666663C_5M^2\eta^7(1-\phi)^5(1-\phi)^{2.5} \\
 & - 0.008730158730158729C_5M^2\eta^7(1-\phi)^{2.5}(1-\phi)^5 \\
 & + 0.0031746031746031737M^3\eta^8(1-\phi)^5(1-\phi)^5 \\
 & + 0.04583333333333334C_5^3\eta^5(1-\phi)^{2.5}\phi \\
 & - 0.018055555555555557C_5^2M\eta^6(1-\phi)^5\phi \\
 & - 0.04444444444444443C_5^2M\eta^6(1-\phi)^{2.5}(1-\phi)^{2.5}\phi \\
 & + 0.016666666666666663C_5M^2\eta^7(1-\phi)^5(1-\phi)^{2.5}\phi \\
 & + 0.008730158730158729C_5M^2\eta^7(1-\phi)^{2.5}(1-\phi)^5\phi \\
 & - 0.0031746031746031737M^3\eta^8(1-\phi)^5(1-\phi)^5\phi \\
 & - \frac{1}{2}(0.041666666666666667C_5^2\eta^4 + \dots \text{ect} \\
 & \quad \cdot \\
 & \quad \cdot \\
 & \quad \cdot
 \end{aligned}$$

En fin, la solution du problème dynamique de cet écoulement est déterminée par addition des termes $(f_0, f_1, f_2, \dots, f_n)$. Finalement, cet ajout donne la solution $f(\eta)$ du problème dynamique étudié sous forme d'une série rapidement convergente. Cette solution s'exprime donc comme suit :

$$f(\eta) = f_0 + f_1 + f_2 + \dots + f_n \tag{III.31}$$

Il est à noter que la précision de la solution augmente avec l'augmentation du nombre d'itérations (n). En effet, on suit la méthode ADM jusqu'à atteindre le nombre d'opérations (ou d'itérations) nécessaires pour obtenir la précision souhaitée.

Par ailleurs, la constante $C_5 = f''(0)$ caractérise le frottement fluide-paroi. Elle se détermine par utilisation des conditions aux limites.

CHAPITRE IV : RESULTATS ET DISCUSSIONS

1. Introduction

Les résultats obtenus dans le cadre de ce travail font l’objet de ce chapitre. Notre étude porte essentiellement sur l’écoulement magnétohydrodynamique de couche limite laminaire à travers une plaque plane pour plusieurs types de nano-fluides. L’objectif visé par cette contribution est de mettre en évidence l’impact du champ magnétique externe et de la fraction volumique des nanoparticules sur la distribution des vitesses et l’évolution du coefficient de frottement. Les équations issues de la modélisation mathématique sont donc traités analytiquement par la méthode de décomposition Adomienne (Adomian Decomposition Method : ADM) qui a été évoquée en détail dans le chapitre précédent. Par ailleurs, une étude numérique a été menée en utilisant la méthode de Runge-Kutta du 4^{ème} ordre. Les résultats numériques obtenus seront utilisés comme guide pour valider les résultats du traitement analytique par la technique ADM.

Les propriétés thermo-physiques des nanoparticules utilisées sont représentées dans le tableau(IV.1).

<i>Les propriétés Thermophysiques</i>	<i>Fluidedebase</i>	<i>Nanoparticules</i>		
	<i>Eau (H₂O)</i>	<i>CNT</i>	<i>Al₂O₃</i>	<i>Cu</i>
<i>Masse volumique, ρ (kg/m³)</i>	998.2	2600	3970	8933

TableauIV. 1: Propriétés thermo-physiques du fluide de base et des nanoparticules solides.

2. Profil de distribution des vitesses

2.1.Écoulement classique (ϕ = 0 et M=0)

Dans le modèle mathématique développé pour des valeurs $\phi = 0$ et $M = 0$, l’écoulement traditionnel de Blasius se présente. Pour ce type d’écoulement, la variation de la fonction $f'(\eta)$, qui caractérise la valeur adimensionnée ($\frac{u}{u_e}$) de la distribution des vitesses, en fonction de la variable de similitude η est représentée par la figure (IV.1). Il est clairement constaté que la vitesse croit d’une manière monotone de $u = 0 \rightarrow f' = 0$ au niveau de la plaque jusqu’à la valeur $u_e \rightarrow f' = 1$ à la frontière de la couche limite (u_e étant la vitesse libre ou externe de l’écoulement étudié). Cette constatation est la même pour tous les cas de figures de la distribution des vitesses présentées ci-dessous.

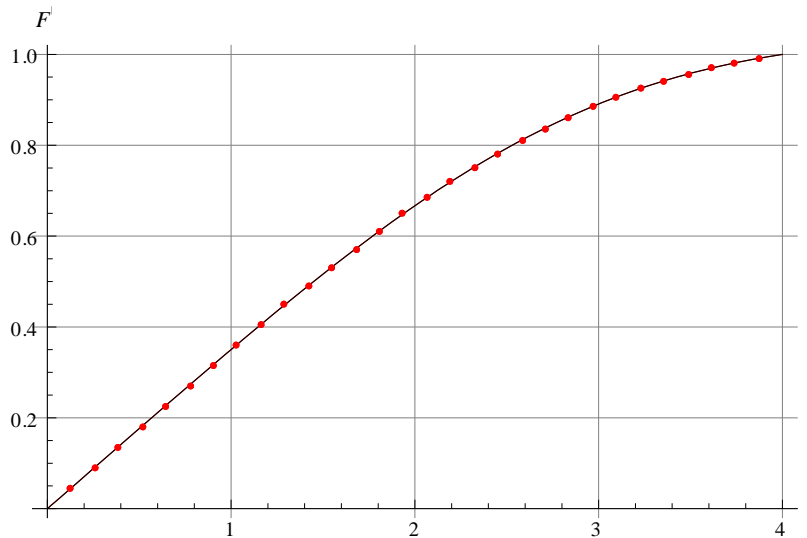


Figure (IV.1) : Profil de vitesse de Blasius dans la couche limite ($\phi=0, M=0$).

η	F'_{ADM}	F'_{NUM}	$ F'_{NUM} - F'_{ADM} $
0	0	$1.35525 \cdot 10^{-20}$	$1.35525 \cdot 10^{-20}$
0.5	0.1762112957253776	0.1762112330814756	$6.26439 \cdot 10^{-8}$
1	0.3501777145227038	0.3501777397604763	$2.52378 \cdot 10^{-8}$
1.5	0.5163938633605478	0.5163938986544889	$3.52939 \cdot 10^{-8}$
2	0.6668884001803899	0.6668884152844939	$1.51041 \cdot 10^{-8}$
2.5	0.7935191318911249	0.7935191215018716	$1.03893 \cdot 10^{-8}$
3	0.8908698779473763	0.8908698975091346	$1.95618 \cdot 10^{-8}$
3.5	0.9583153121477087	0.9583153439308316	$3.17831 \cdot 10^{-8}$
4	1.	1.000000023759446	$2.37594 \cdot 10^{-8}$

TableauIV. 2: Comparaison entre résultats analytique et numérique pour le cas de l'écoulement classique de Blasius ($\phi = 0 ; M = 0$)

D'autre part, le tableau(IV.2) représente l'erreur entre la solution Adomienne et la solution numérique obtenue par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 et utilisée comme guide. En effet, l'erreur est calculée par la formule suivante : $Erreur = |F'_{NUM} - F'_{ADM}|$

Les résultats obtenus montrent clairement que les résultats coïncident parfaitement, ce qui justifie la robustesse et l'efficacité de la technique semi-analytique d'Adomian adoptée. Il est à noter que la solution ADM converge à la solution numérique au bout de 23 itérations.

2.2.Écoulement magnétohydrodynamique classique ($\phi = 0$ et M variable)

Dans cette partie, on va essayer de visualiser, à travers les simulations réalisées, les effets de variation du paramètre magnétique M sur l'évolution de la distribution des vitesses dans l'écoulement de Blasius classique.

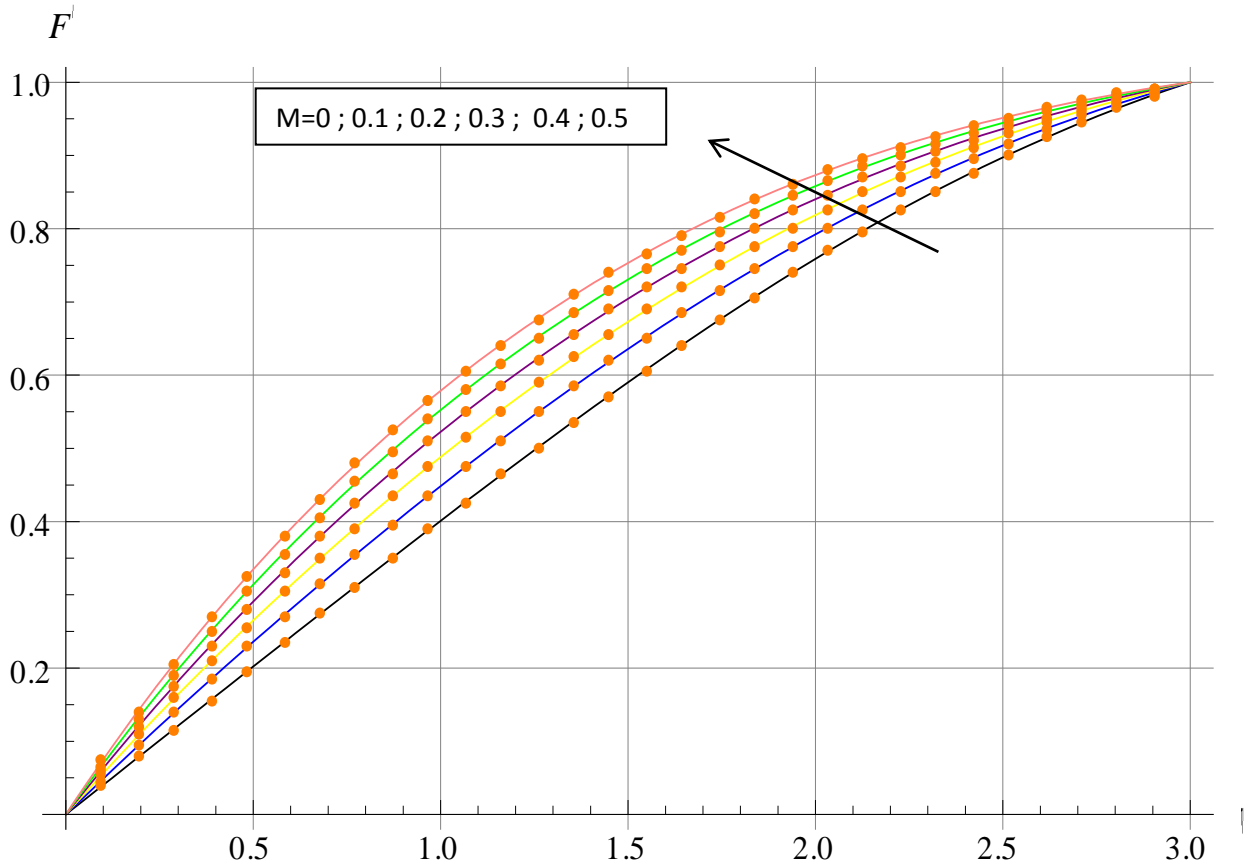


Figure (IV.2): Profil de vitesse d'un écoulement classique dans la couche limite en présence d'un champ magnétique ($\phi=0$ et $M=0 ; 0.01 ; 0.2 ; 0.3 ; 0.4 ; 0.5$).

Dans le cas d'un écoulement de couche limite magnétohydrodynamique, comme le montre la figure (IV.2), on constate que la vitesse apparaît comme une fonction croissante du paramètre magnétique M . En effet, l'accroissement de l'intensité du champ magnétique (M croissant) fait disparaître le phénomène de séparation et le profil des vitesses devient de plus en plus stable.

2.3 Écoulement de nano-fluides

Dans les sections précédentes, l'écoulement classique de Blasius classique, sans présence de nanoparticules solides dans le fluide de base, a été considéré. Dans cette partie d'étude, on va considérer l'écoulement de nano-fluides. En effet, trois types de nanoparticules sont utilisés dont leurs propriétés thermophysiques sont données par le Tableau (IV.2). Il s'agit du cuivre (**Cu**), de l'alumine (**Al₂O₃**) et des nanoparticules **CNT** (nanotube de carbone).

Il est à noter également que l'effet de la fraction volumique des nanoparticules a été étudié pour les deux types d'écoulements, à savoir :

- Écoulement de Blasius classique.
- Écoulement hydromagnétique.

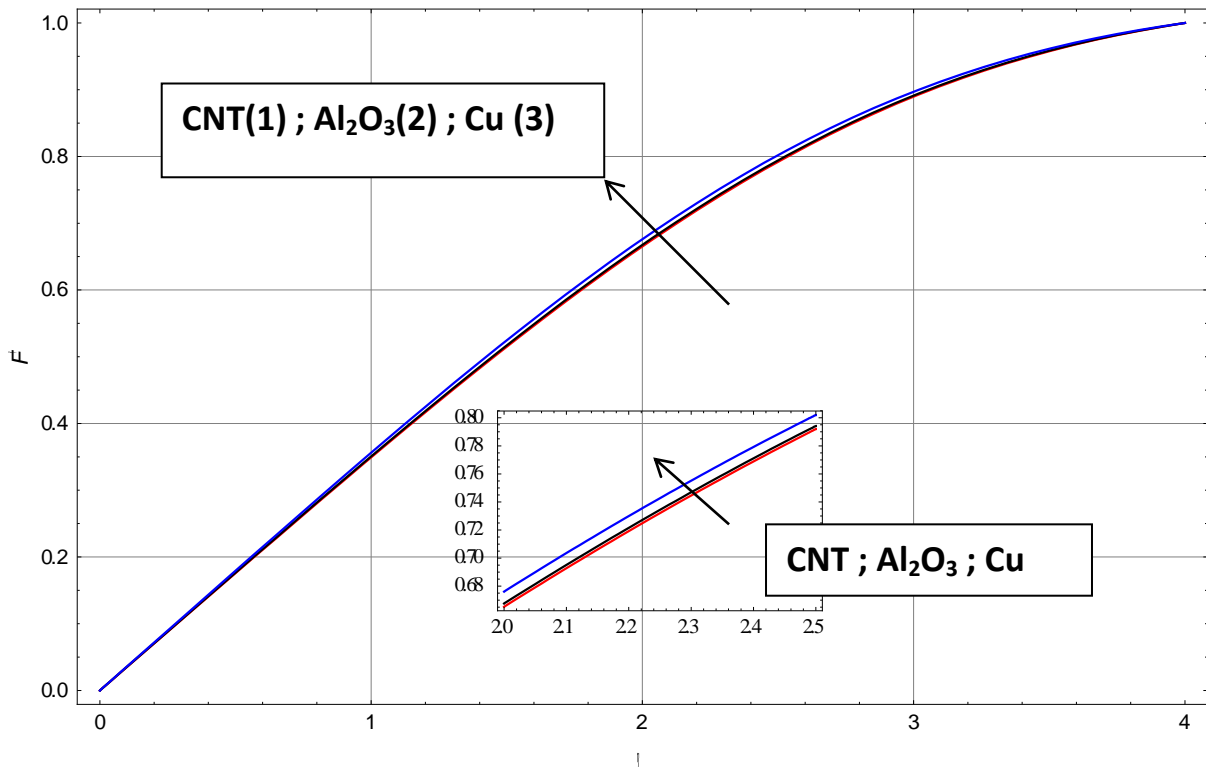


Figure (IV.3): Profil de vitesse d'un écoulement de nano-fluides dans la couche limite sans présence d'un champ magnétique ($\phi=0.01$; $M=0$) – Cas de : CNT ; Al_2O_3 et Cu.

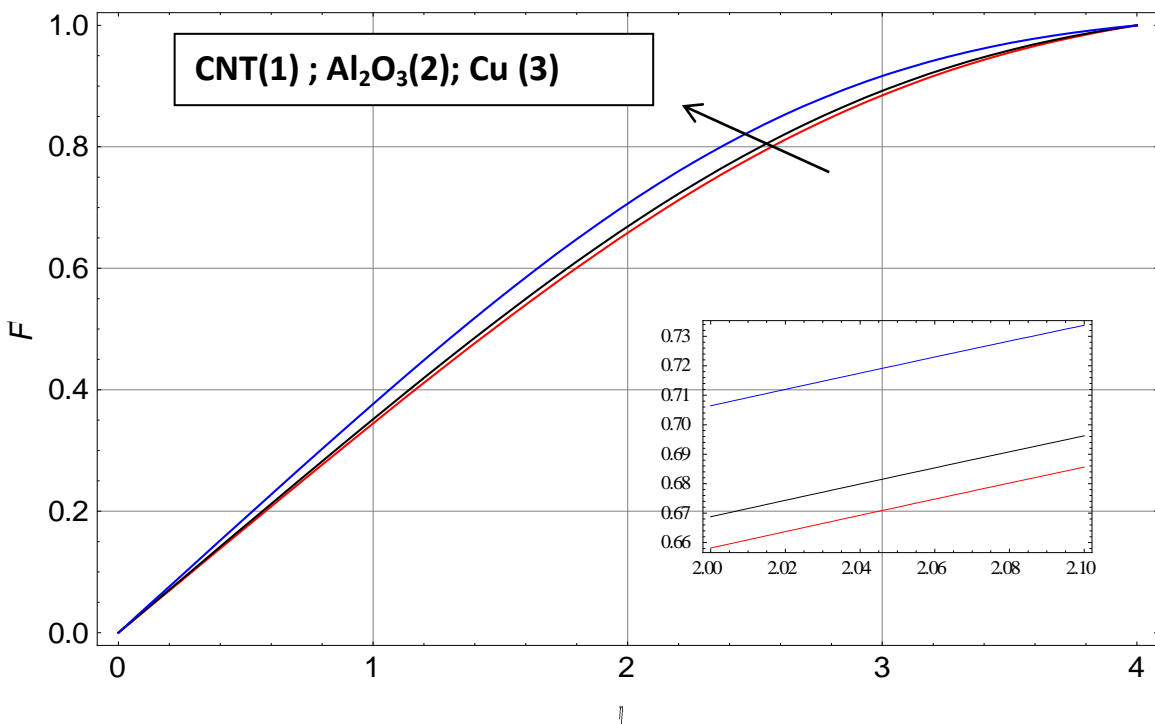


Figure (IV.4): Profil de vitesse d'un écoulement de nano-fluides dans la couche limite sans présence d'un champ magnétique ($\phi=0.05$; $M=0$) – Cas de : CNT ; Al_2O_3 et Cu.

Les **Figures (IV. 3)** et **(IV.4)** visualisent l'effet de la présence de nanoparticules solides dans un fluide à base d'eau sur la distribution des vitesses pour un écoulement de couche limite sans présence d'un champ magnétique externe ($M=0$). Les résultats obtenus révèlent que l'écoulement du nano-fluide "CNT-eau" présente les valeurs de vitesse les plus élevées comparées aux autres types d'écoulements de nano-fluides. En effet, pour avoir un profil d'écoulement plus stable en évitant le retour d'écoulement, il est préférable d'utiliser des nanoparticules de type cuivre.

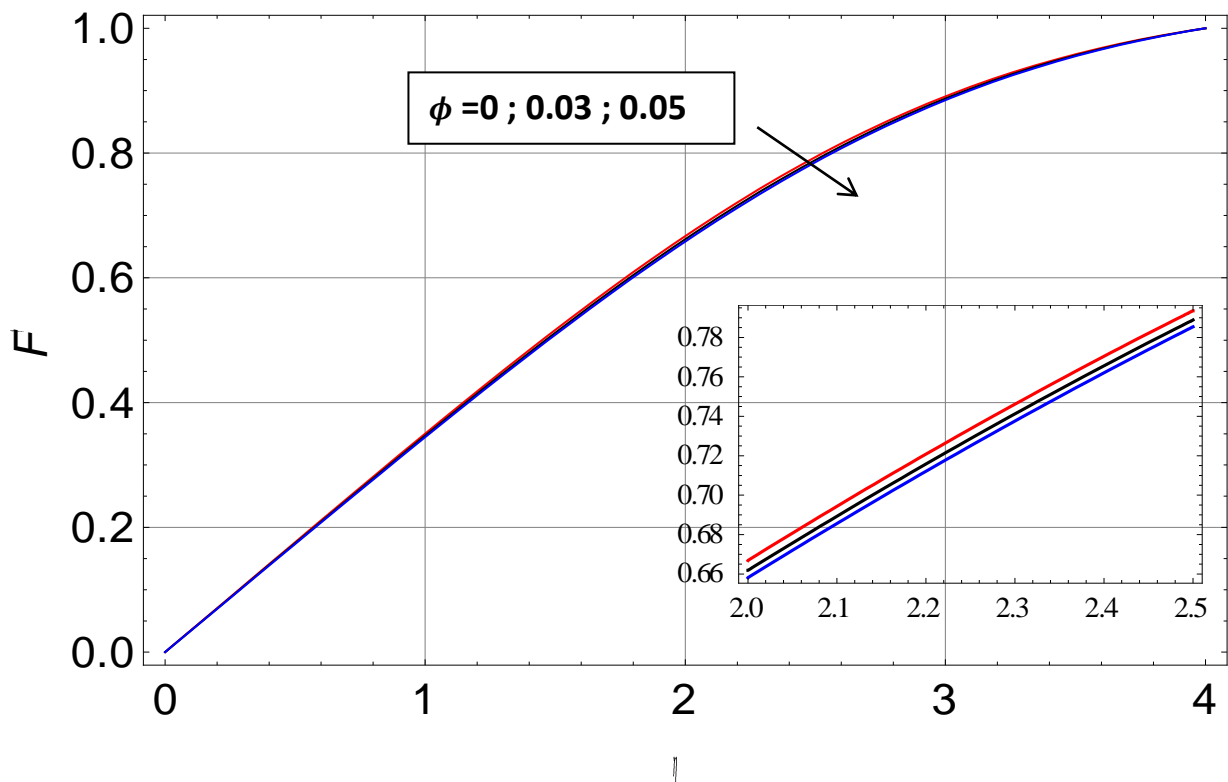


Figure (IV.5): Profil de vitesse d'un écoulement nano-fluide dans la couche limite sans présence d'un champ magnétique ($M=0$) – Cas de "CNT-eau"

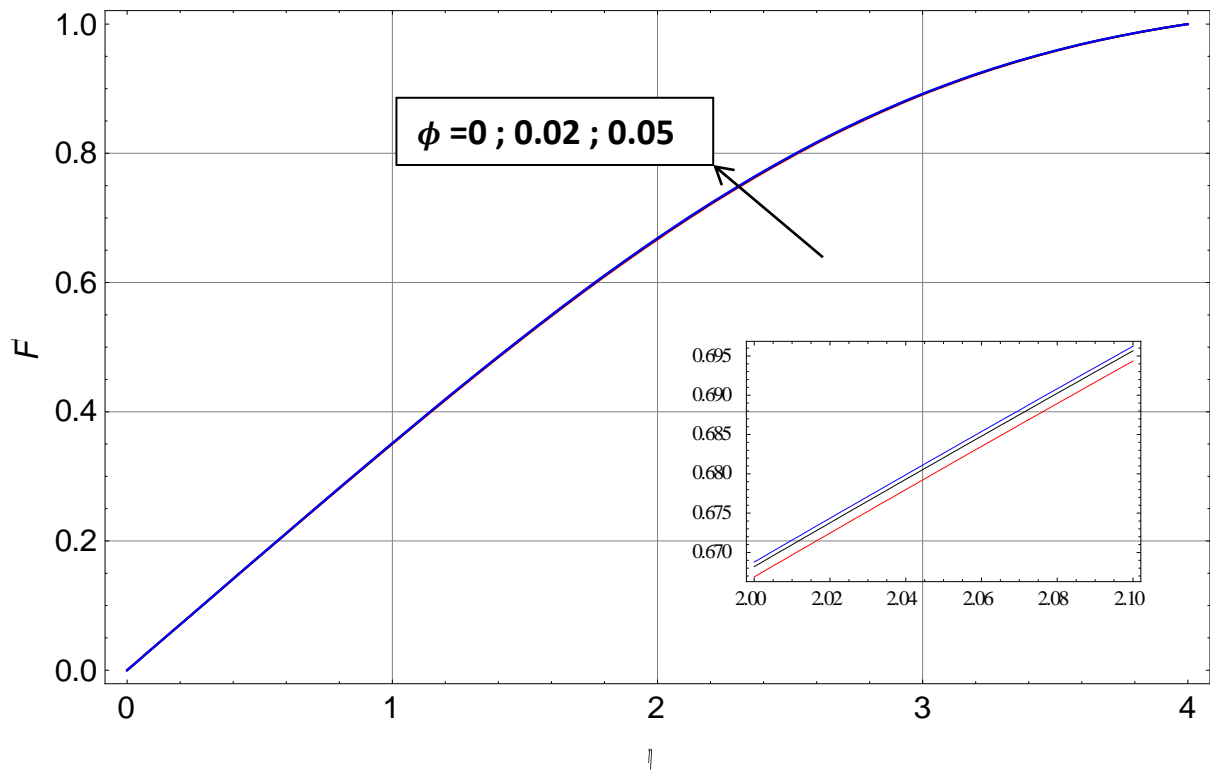


Figure (IV.6): Profil de vitesse d'un écoulement nano-fluide dans la couche limite sans présence d'un champ magnétique ($M=0$) -Cas de "Al₂O₃-eau "

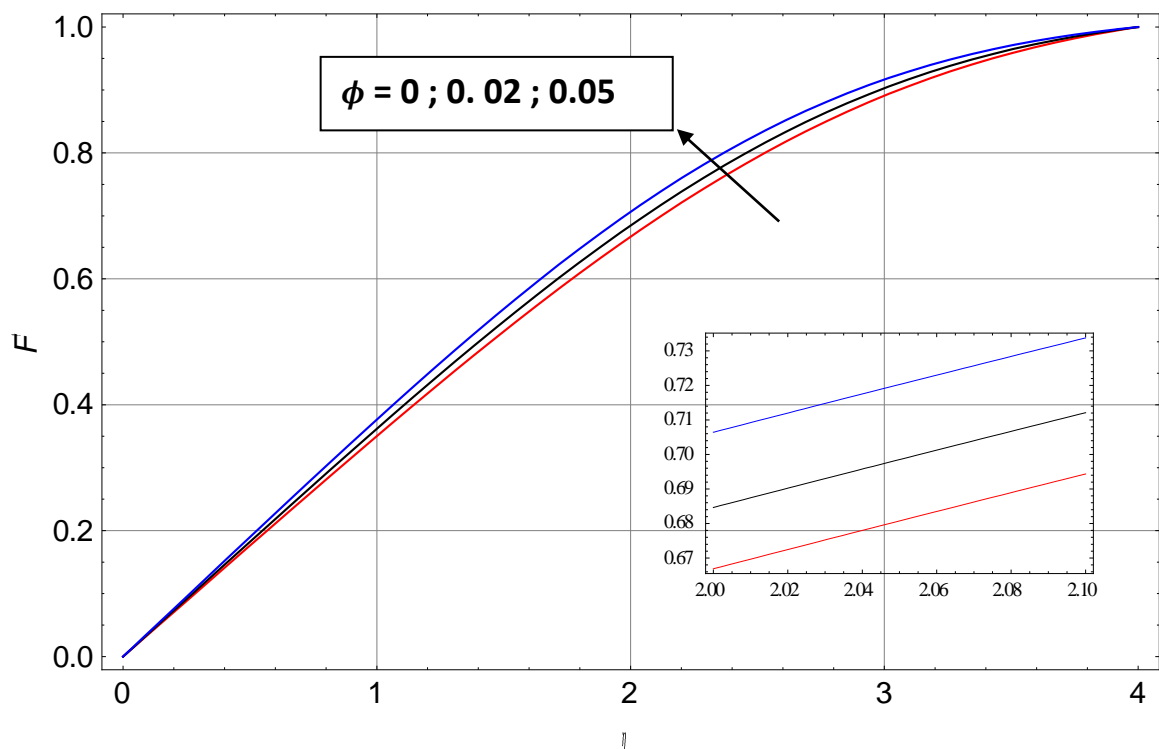


Figure (IV.7): Profil de vitesse d'un écoulement nano-fluide dans la couche limite sans présence d'un champ magnétique ($M=0$) -Cas de "Cu-eau "

Les figures (IV.5), (IV.6) et (IV.7) schématisent l'effet de la variation de la fraction volumique des nanoparticules sur l'évolution de la vitesse des écoulements de nano-fluides étudiés. Il apparaît que l'effet de l'augmentation de la fraction ϕ varie selon la nature des nanoparticules utilisées. En effet, on constate que la vitesse augmente au fur et à mesure que la fraction des nanoparticules de cuivre et d'alumine augmente ; tandis qu'elle diminue avec l'accroissement de la fraction des nanoparticules CNT. Les résultats obtenus confirment les résultats des figures (IV.3) et (IV.4) montrant ainsi le grand avantage d'opérer avec des nano-fluides de type "Cu-eau" et "Al₂O₃-eau" qui ne favorisent pas le phénomène de séparation ; tandis que la présence des nanoparticules CNT le favorise.

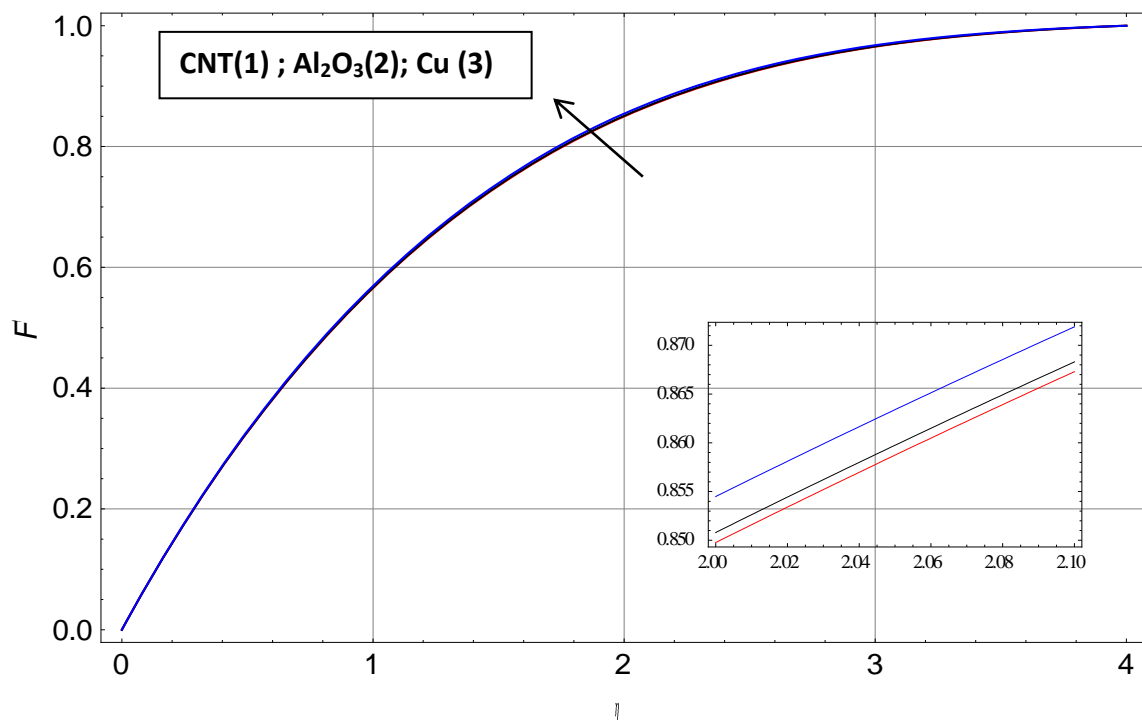


Figure (IV.8): Profil de vitesse d'un écoulement nano-fluide avec ($M=0.5$; $\phi =0.01$) – Cas des nanoparticules CNT ; Al₂O₃ et Cu.

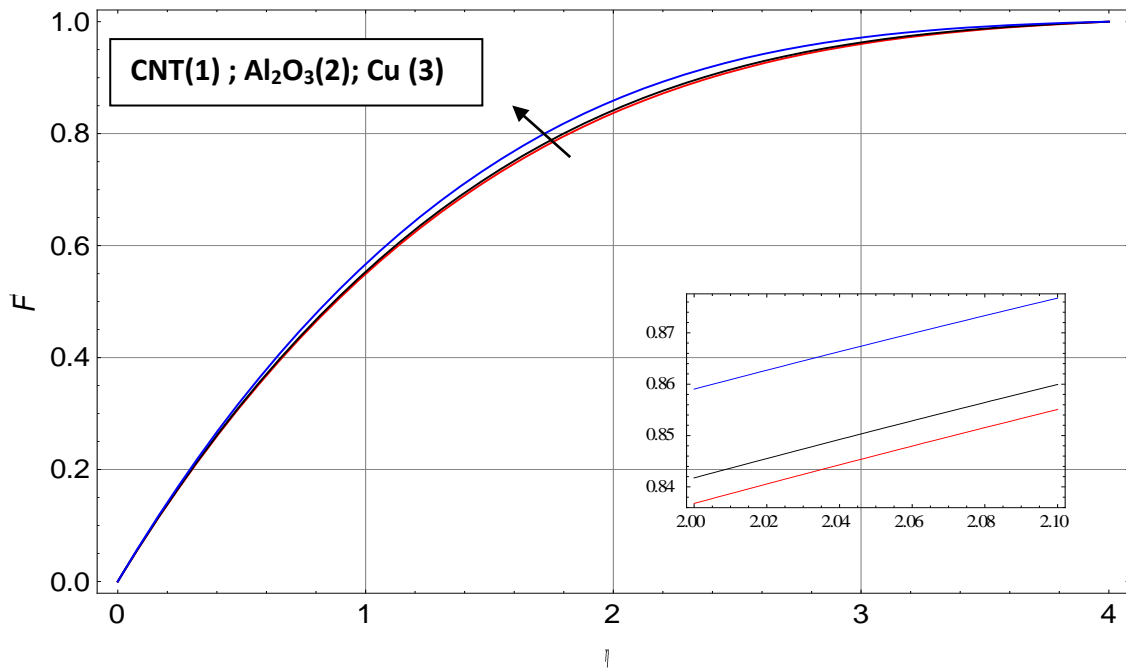


Figure (IV.9):Profil de vitesse d'un écoulement nano-fluide avec ($M=0.5 ; \phi =0.05$) – Cas des nanoparticules **CNT**, Al_2O_3 et **Cu**.

Les figures (IV.8) et (IV.9) visualisent l'effet de la nature des nanoparticules sur l'évolution de la vitesse de l'écoulement des nano-fluides. D'après les résultats obtenus, il est clairement visualisé que les nanoparticules de cuivre présentent les valeurs les plus élevées de la vitesse comparés aux autres types de nanoparticules Al_2O_3 et **CNT**, justifiant ainsi le même comportement obtenu dans les figures (IV.3) et (IV.4) dans le cas d'un écoulement de nano-fluides sans présence d'un champ magnétique. En effet, dans un écoulement hydromagnétique, les nanoparticules de type cuivre sont également préférées pour avoir un profil plus stable figures (IV.10).

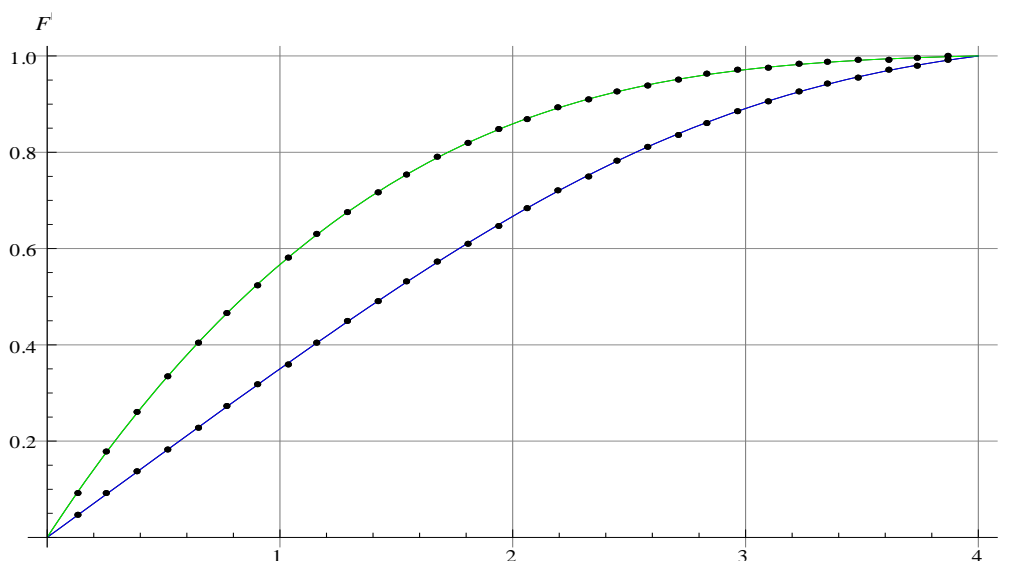


Figure (IV.10):Profil de vitesse d'un écoulement classique et l'écoulement de nano-fluide avec ($M=0.5 ; \phi =0.05$) – Cas de nanoparticules **Cu**.

3 Comparaison des résultats pour l'écoulement de nano-fluides

Comme pour le cas d'un écoulement classique tableau (IV.2), une comparaison entre les résultats analytiques (ADM) et numérique (RK4) a été également réalisée pour l'écoulement de nano-fluides. Le code mathématique de la méthode RK4 est inclut dans la bibliothèque du logiciel Mathematica. En effet, on a également comparé les résultats de la distribution des vitesses avec $M=0.3$ et sous l'effet de la variation de la fraction volumique des nanoparticules CNT, Al_2O_3 et Cu. De même, l'erreur est introduite de la manière suivante :

$$\text{Erreur} = |F'_{NUM} - F'_{ADM}|$$

D'après les résultats obtenus présentés par les tableaux (IV.3)-(IV.14), on constate une parfaite concordance entre les différents résultats numériques et analytiques, ce qui confirme la plus grande précision de la méthode analytique de décomposition d'Adomian.

η	F'_{NUM}	F'_{ADM}	$ F'_{NUM} - F'_{ADM} $
0	1.35525×10^{-20}	0	1.35525×10^{-20}
0.5	0.2802210515192502	0.2802210483506989	3.16855×10^{-9}
1	0.5026180500177967	0.502618052686885	2.66909×10^{-9}
1.5	0.6752369422351829	0.6752369436212807	1.3861×10^{-9}
2	0.8031665903958147	0.8031666198026455	2.94068×10^{-8}
2.5	0.8919251313843631	0.8919251232378433	8.14652×10^{-9}
3	0.9487538147185315	0.9487537959144042	1.88041×10^{-8}
3.5	0.9820750691025726	0.9820750562309547	1.28716×10^{-8}
4	1.0000000003069907	1.0000000000006537	3.06337×10^{-10}

Tableau IV. 3: Comparaison entre résultats analytique et numérique - Cas de l'écoulement du nano-fluide 'CNT-eau ' avec $\phi = 0.01$ et $M = 0.3$

η	F'_{NUM}	F'_{ADM}	$ F'_{NUM} - F'_{ADM} $
0	2.71051×10^{-20}	0	2.71051×10^{-20}
0.5	0.31750715644249317	0.31750715205637403	4.38612×10^{-9}
1	0.5531809592650593	0.5531809667749966	7.50994×10^{-9}
1.5	0.7239273792320664	0.7239273892526119	1.00205×10^{-8}
2	0.841753441809137	0.8417534509947437	9.18561×10^{-9}
2.5	0.9177235949442935	0.9177235788996814	1.60446×10^{-8}
3	0.962901281871465	0.9629012752229237	6.64854×10^{-9}
3.5	0.9875568545966907	0.9875568532062147	1.39048×10^{-9}
4	0.999999988226887	0.999999990450306	1.08181×10^{-8}

Tableau IV. 4: Comparaison entre résultats analytique et numérique - Cas de l'écoulement nano-fluide 'Al₂O₃-eau ' avec $\phi = 0.01$ et $M = 0.3$

η	F'_{NUM}	F'_{ADM}	$ F'_{NUM} - F'_{ADM} $
0	0	0	0
0.5	0.28261486953141546	0.28261486586491247	3.6665×10^{-9}
1	0.507184915341783	0.5071849166423701	1.30059×10^{-9}
1.5	0.6812375673226724	0.6812375710220566	3.69938×10^{-9}
2	0.8094313267573316	0.8094313316014233	4.84409×10^{-9}
2.5	0.8972548253583853	0.8972547998674328	2.5491×10^{-8}
3	0.9523534833712023	0.9523534732976737	1.00735×10^{-8}
3.5	0.9837419502510395	0.9837419455254446	4.72559×10^{-9}
4	1.0000000006086864	1.000000000006253	6.08061×10^{-10}

TableauIV. 5: Comparaison entre résultats analytique et numérique - Cas de l'écoulement nano-fluide "Cu-eau" avec $\phi = 0.01$ et $M = 0.3$

η	F'_{NUM}	F'_{ADM}	$ F'_{NUM} - F'_{ADM} $
0	4.06576×10^{-20}	0	4.06576×10^{-20}
0.5	0.2754318572452927	0.2754318575342653	2.88973×10^{-10}
1	0.49559075483585946	0.4955907581718672	3.33601×10^{-9}
1.5	0.6678456430051269	0.6678456543820755	1.13769×10^{-8}
2	0.7967277926640141	0.7967278209327893	2.82688×10^{-8}
2.5	0.8871797365784881	0.8871797352984055	1.28008×10^{-9}
3	0.9458878816299033	0.9458878738992746	7.73063×10^{-9}
3.5	0.9808577279894074	0.9808577192481662	8.74124×10^{-9}
4	1.000000000868236	1.000000000008527	8.67383×10^{-10}

TableauIV. 6: Comparaison entre résultats analytique et numérique -Cas de l'écoulement nano-fluide "CNT-eau" avec $\phi = 0.03$ et $M = 0.3$

η	F'_{NUM}	F'_{ADM}	$ F'_{NUM} - F'_{ADM} $
0	1.35525×10^{-20}	0	1.35525×10^{-20}
0.5	0.27693063127740025	0.2769306294319423	1.84546×10^{-9}
1	0.4984561836695239	0.498456186591813	2.92229×10^{-9}
1.5	0.6716305215253089	0.671630525249818	3.72451×10^{-9}
2	0.8007132080518523	0.8007132446518854	3.66×10^{-8}
2.5	0.8906098902594486	0.8906098846918117	5.56764×10^{-9}
3	0.9482372377496239	0.9482372194864103	1.82632×10^{-8}
3.5	0.9819623871239178	0.9819623754368421	1.16871×10^{-8}
4	0.999999999245005	1.000000000015064	7.70058×10^{-11}

TableauIV. 7: Comparaison entre résultats analytique et numérique -Cas de l'écoulement nano-fluide "Al₂O₃-eau" avec $\phi = 0.03$ et $M = 0.3$

η	F'_{NUM}	F'_{ADM}	$ F'_{NUM} - F'_{ADM} $
0	0	0	0
0.5	0.2823792603980897	0.2823792573470533	3.05104×10^{-9}
1	0.5088380122640149	0.5088380150889404	2.82493×10^{-9}
1.5	0.6852278017181656	0.6852278189862324	1.72681×10^{-8}
2	0.8148161427847168	0.8148161574709775	1.46863×10^{-8}
2.5	0.9024791832248537	0.9024791818498517	1.375×10^{-9}
3	0.9561331887487939	0.9561331690969769	1.96518×10^{-8}
3.5	0.9855505884604163	0.9855505225729551	6.58875×10^{-8}
4	1.0000000219362921	0.999999999864713	2.19498×10^{-8}

TableauIV. 8: Comparaison entre résultats analytique et numérique -Cas de l'écoulement nano-fluide "Cu-eau" avec $\phi = 0.03$ et $M = 0.3$

η	F'_{NUM}	F'_{ADM}	$ F'_{NUM} - F'_{ADM} $
0	1.35525×10^{-20}	0	1.35525×10^{-20}
0.5	0.2705978937730399	0.2705979006928842	6.91984×10^{-9}
1	0.4884244782424709	0.4884244861540695	7.9116×10^{-9}
1.5	0.6602200642630607	0.6602200932419547	2.89789×10^{-8}
2	0.7899981630545949	0.7899981729655853	9.91099×10^{-9}
2.5	0.8821493709312731	0.8821494032533164	3.2322×10^{-8}
3	0.9428044786807294	0.942804463773341	1.49074×10^{-8}
3.5	0.9795284518214114	0.9795284558530198	4.03161×10^{-9}
4	0.9999999914450356	0.999999999997904	8.55475×10^{-9}

TableauIV. 9: Comparaison entre résultats analytique et numérique -Cas de l'écoulement nano-fluide "CNT-eau" avec $\phi = 0.05$ et $M = 0.3$

η	F'_{NUM}	F'_{ADM}	$ F'_{NUM} - F'_{ADM} $
0	0	0	0
0.5	0.27300696413980147	0.27300696723928275	3.09948×10^{-9}
1	0.4930360493137646	0.4930360548768899	5.56313×10^{-9}
1.5	0.66633029931916	0.6663303155592211	1.62401×10^{-8}
2	0.7964629707132973	0.7964630083885832	3.76753×10^{-8}
2.5	0.8877473558544821	0.8877473580286127	2.17413×10^{-9}
3	0.9466648035141102	0.9466647966362239	6.87789×10^{-9}
3.5	0.9813562421483605	0.9813562130427728	2.91056×10^{-8}
4	1.0000000269417966	0.999999999996589	2.69421×10^{-8}

TableauIV. 10: Comparaison entre résultats analytique et numérique -Cas de l'écoulement nano-fluide "Al₂O₃-eau" avec $\phi = 0.05$ et $M = 0.3$

η	F'_{NUM}	F'_{ADM}	$ F'_{NUM} - F'_{ADM} $
0	0	0	0
0.5	0.2817786178386814	0.2817786126836609	5.15502×10^{-9}
1	0.5097375653064885	0.5097375647672344	5.39254×10^{-10}
1.5	0.6881638283643625	0.6881638480867882	1.97224×10^{-8}
2	0.8190165921837993	0.819016631754197	3.95704×10^{-8}
2.5	0.9065972318255393	0.9065972466235482	1.4798×10^{-8}
3	0.9590800296537734	0.9590799979191182	3.17347×10^{-8}
3.5	0.9869281707272466	0.9869281268339574	4.38933×10^{-8}
4	1.0000000308886834	1.0000000000064801	3.08822×10^{-8}

TableauIV. 11: Comparaison entre résultats analytique et numérique -Cas de l'écoulement nano-fluide "Cu-eau" avec $\phi = 0.05$ et $M = 0.3$

η	F'_{NUM}	F'_{ADM}	$ F'_{NUM} - F'_{ADM} $
0	1.35525×10^{-20}	0	1.35525×10^{-20}
0.5	0.3155017050069205	0.31550170562287905	6.15959×10^{-10}
1	0.5493895046001693	0.5493895138893268	9.28916×10^{-9}
1.5	0.7190426446629012	0.7190426478181885	3.15529×10^{-9}
2	0.836781230521518	0.8367812311585582	6.3704×10^{-10}
2.5	0.9136002501770717	0.9136002736495096	2.34724×10^{-8}
3	0.9601746612970579	0.9601746058159196	5.54811×10^{-8}
3.5	0.9863104526229237	0.9863103790393453	7.35836×10^{-8}
4	1.0000000335188686	1.0000000003883542	3.31305×10^{-8}

TableauIV. 12: Comparaison entre résultats analytique et numérique - Cas de l'écoulement nano-fluide "CNT-eau" avec $\phi = 0.05$ et $M = 0.5$

η	F'_{NUM}	F'_{ADM}	$ F'_{NUM} - F'_{ADM} $
0	2.71051×10^{-20}	0	2.71051×10^{-20}
0.5	0.31750715644249317	0.31750715205637403	4.38612×10^{-9}
1	0.5531809592650593	0.5531809667749966	7.50994×10^{-9}
1.5	0.7239273792320664	0.7239273892526119	1.00205×10^{-8}
2	0.841753441809137	0.8417534509947437	9.18561×10^{-9}
2.5	0.9177235949442935	0.9177235788996814	1.60446×10^{-8}
3	0.962901281871465	0.9629012752229237	6.64854×10^{-9}
3.5	0.9875568545966907	0.9875568532062147	1.39048×10^{-9}
4	0.999999988226887	0.999999990450306	1.08181×10^{-8}

TableauIV. 13: Comparaison entre résultats analytique et numérique -Cas de l'écoulement nano-fluide "Al₂O₃-eau " avec $\phi = 0.05$ et $M = 0.5$

η	F'_{NUM}	F'_{ADM}	$ F'_{NUM} - F'_{ADM} $
0	1.35525×10^{-20}	0	1.35525×10^{-20}
0.5	0.32480549448262636	0.3248054958882028	1.40558×10^{-9}
1	0.5668982822497312	0.5668982892565082	7.00678×10^{-9}
1.5	0.7413458571159468	0.7413458648563229	7.74038×10^{-9}
2	0.8590376815972433	0.8590376917371304	1.01399×10^{-8}
2.5	0.9315327289845785	0.9315327269734167	2.01116×10^{-9}
3	0.9716060155417661	0.971606017370531	1.82876×10^{-9}
3.5	0.9913220504547903	0.9913220670011356	1.65463×10^{-8}
4	0.9999999977740753	0.9999999788415153	1.89326×10^{-8}

TableauIV. 14: Comparaison entre résultats analytique et numérique – Cas de l'écoulement nano-fluide "Cu-eau " avec $\phi = 0.05$ et $M = 0.5$

4 Évolution du coefficient de frottement $f''(0)$:

La figure (IV.11) montre l'évolution du coefficient de frottement $f''(0)$ en fonction de la fraction volumique des nanoparticules. Les résultats obtenus montrent qu'au fur et à mesure que la fraction ϕ des nanoparticules augmente, le coefficient de frottement diminue (ce coefficient est caractérisé par l'évolution de la constante $f''(0)$). En effet, cette diminution est un mauvais signe du fait qu'elle favorise l'apparition du phénomène de séparation. Par contre, un comportement tout à fait inverse du coefficient de frottement est observé avec l'accroissement du paramètre magnétique M , ce qui est un bon indicateur sur la disparition du phénomène de séparation. Il est bien clair que la présence d'un champ magnétique a un effet bénéfique sur l'écoulement des nano-fluides en le rendant plus stable.

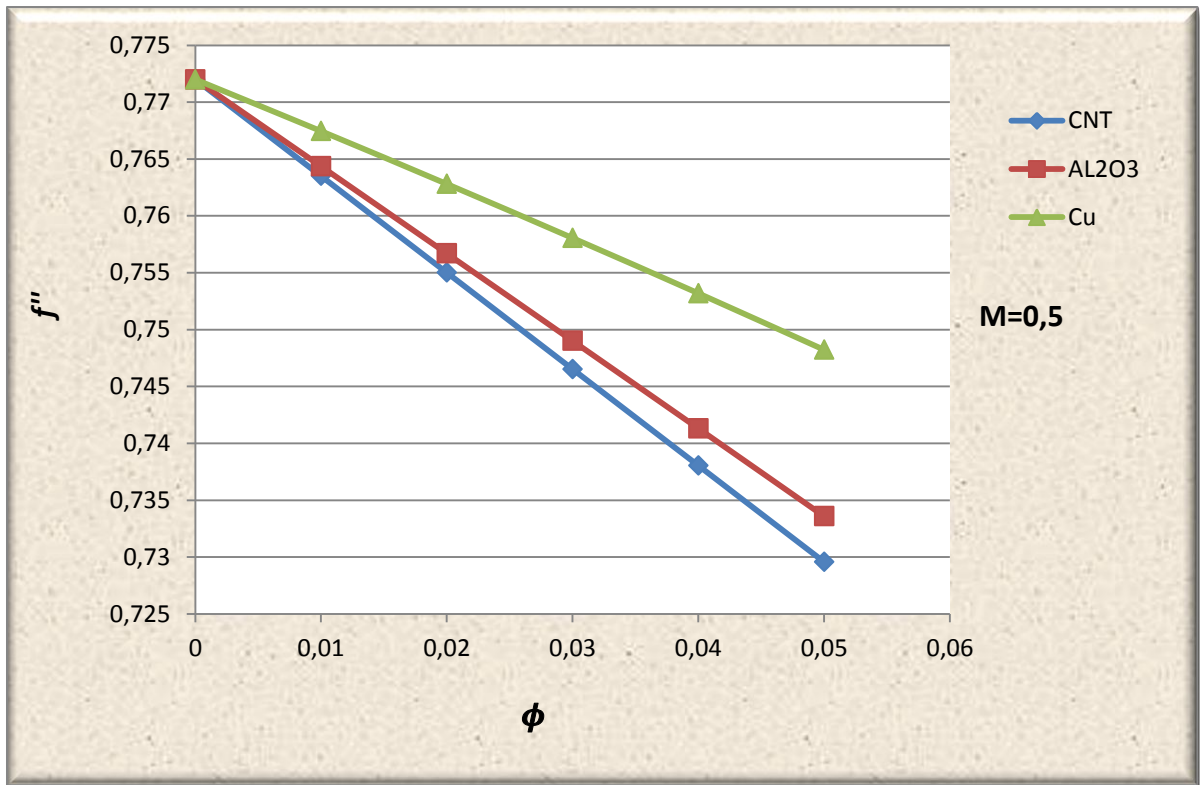


Figure (IV.11) : Évolution du coefficient de frottement $f''(0)$ en fonction de ϕ

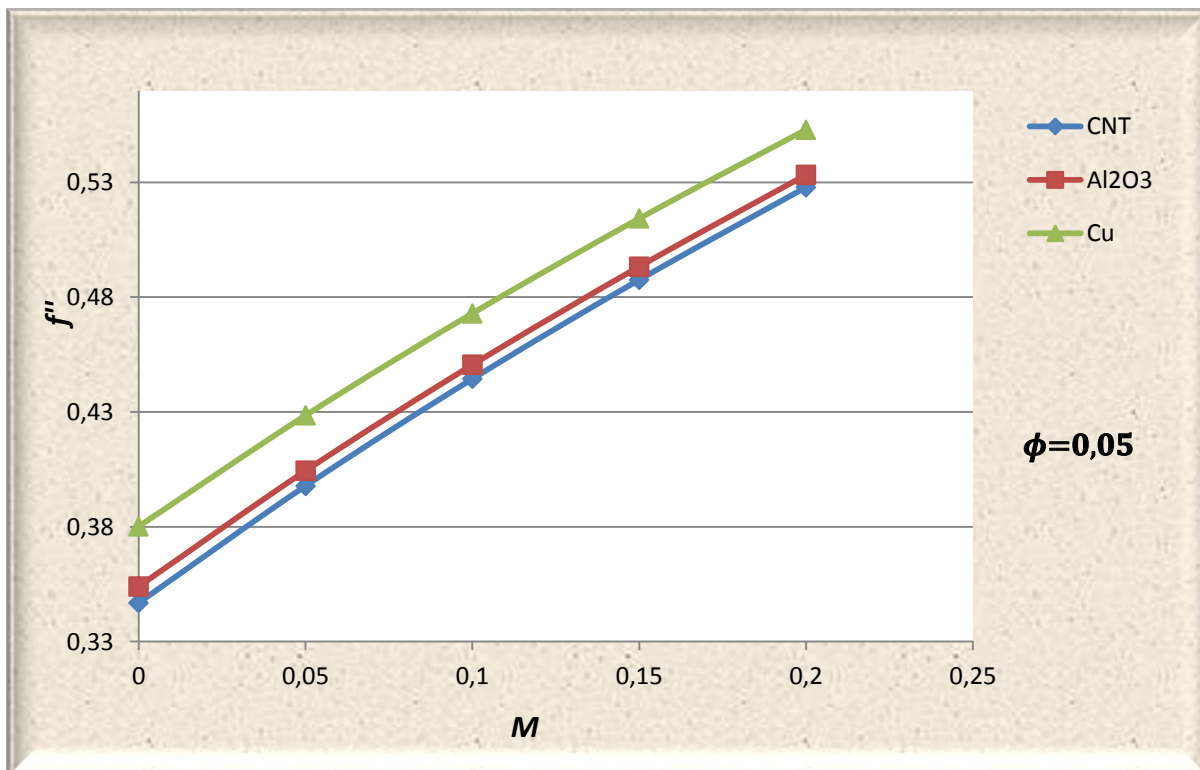


Figure (IV.12) : Évolution du coefficient de frottement $f''(0)$ en fonction de M

CONCLUSION GENERALE

Dans ce travail, nous avons étudié le comportement dynamique de la couche limite laminaire et incompressible dans un écoulement MHD d'un nano-fluide qui se développe autour d'une plaque plane sans présence d'un gradient de pression. En effet, nous nous sommes particulièrement intéressés à l'écoulement de Blasius MHD.

Pour qu'il y'aura une interaction entre la vitesse du fluide en mouvement et les lignes du champ magnétique, on a appliqué ce dernier dans la direction normale à l'écoulement. Les nanoparticules utilisées sont celles du cuivre (**Cu**), (**AL₂O₃**) et (**CNT**) avec des fractions volumiques qui varient entre **0** et **5%**, le fluide de base utilisé est l'eau.

La solution du problème est obtenue à l'aide d'une méthode semi-analytique robuste dite la méthode décompositionnelle d'Adomian (**ADM**).

Les évolutions de la distribution des vitesses et du coefficient de frottement montrent clairement les effets de la fraction volumique des nanoparticules, le type des nanoparticules et l'intensité du champ magnétique.

Les principales conclusions que l'on peut tirer de cette étude sont donc:

- L'application d'un champ magnétique M engendre l'accroissement de la vitesse et là l'augmentation du coefficient de frottement, ce qui conduit à un écoulement stable. Dans ces conditions, le phénomène de séparation n'apparaît pas et par conséquent le décollement de la couche limite n'intervient pas.
- L'utilisation des nanoparticules (**AL₂O₃**) et (**Cu**) favorisent l'augmentation de la vitesse et par conséquent l'écoulement devient plus stable, empêchant ainsi la séparation de la couche limite.
- L'utilisation de nanoparticules (**CNT**) peut conduire à une séparation de l'écoulement. En effet, la vitesse diminue avec l'accroissement de la fraction volumique des nanoparticules CNT.
- L'impact de l'utilisation simultanée du champ magnétique et des nanoparticules sur l'évolution du coefficient de frottement se diffère.
- Les résultats obtenus par le traitement semi-analytique montrent une excellente cohérence avec les méthodes numériques, justifiant ainsi l'efficacité et la fiabilité de la méthode décompositionnelle d'Adomian (**ADM**).

Enfin, cette modeste contribution nous a permis de défricher un sujet d'actualité et offre par conséquent un certain nombre de perspectives. En effet, il serait souhaitable d'investiguer les champs suivants :

- Étude du comportement thermique de l'écoulement de la couche limite considéré. L'objectif ici est de voir l'impact de la présence des nanoparticules sur l'évolution du nombre de Nusselt.
- Validation des résultats analytiques et numériques par les études expérimentales et celles de la littérature scientifique.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES :

- [1] Blasius, H. (1908), “Grenrschichten in flussigkeitenmitkleinerreibung”, *ZeitschriftfürMathematik und Physik*, Vol. 56, pp. 1-37.
- [2] Falkner, V.M. and Skan, S.W. (1931), “Some approximate solutions of the boundary layer equations”, *Philosophical Magazine*, Vol. 12, pp. 865-896.
- [3] Howarth, L. (1938), “On the solution of the laminar boundary layer equations”, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, Vol. 164, pp. 547-579.
- [4] Sakiadis BC. (1961),” Boundary layer behavior on continuous solid surfaces: II. The boundary layer on continuous flat surface”. *AICHe J.*7:221-225.
- [5] Chen, K.K. and Libby, P.A. (1968), “Boundary layers with small departures from the Falkner-Skan profile”, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 33 No. 2, p. 273.
- [6] Cebeci, T. and Keller, H.B. (1971), “Shooting and parallel shooting methods for solving the Falkner-Skan boundary-layer equation”, *Journal of Computational Physics*, Vol. 7 No. 2, pp. 289-300.
- [7] Asaithambi, A. (1998), “A finite-difference method for the Falkner-Skan equation”, *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 92 Nos 2/3, pp. 135-141.
- [8] Gherieb, S., Kezzar, M., Sari, M.R. (2020), Analytical and numerical solutions of heat and mass transfer of boundary layer flow in the presence of a transverse magnetic field, *Heat Transfer-Asian Research*, <https://doi.org/10.1002/htj.21655>
- [9] Gherieb, S., Kezzar, M., Nehal, A. and Sari, M.R. (2020), "A new improved generalized decomposition method (improved-GDM) for hydromagnetic boundary layer flow", *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, Vol. 30 No. 10, pp. 4607-4628.
- [10] Chahra M. Ayeche, Mohamed Kezzar, Mohamed R. Sari & Mohamed R. Eid, Analytical ADM study of time-dependent hydromagnetic flow of biofluid over a wedge, *Indian Journal of Physics*, Springer Eds., DOI 10.1007/s12648-020-01935-9, 2021.
- [11] A., Shafiq, T.N., Sindhu, Statistical study of hydromagnetic boundary layer flow of Williamson fluid regarding a radiative surface, *Results in Physics*, 7, 2017, 3059-3067.
- [12] T., Muhammad, T., Hayat, A., Alsaedi, A., Qayyum, Hydromagnetic unsteady squeezing flow of Jeffrey fluid between two parallel plates, *Chinese Journal of Physics*, 55, 2017, 1511-1522.
- [13] P.V., SatyaNarayana, B., Venkateswarlu, B., Devika, Chemical reaction and heat source effects on MHD oscillatory flow in an irregular channel, *Ain Shams Engineering Journal*, 7, 2016, 1079-1088.
- [14] A., Salman, F., Chishtie, M., Asad, Analytical technique for magnetohydrodynamic (MHD) fluid flow of a periodically accelerated plate with slippage, *European Journal of Mechanics - B/Fluids*, 65, 2017, 192-198.
- [15] CHOI S U S. Enhancing thermal conductivity of fluids with nanoparticles in developments and application of non newtonien flows. *ASME FED-vol. 231/MD*, 1995, 66: 99–105.
- [16] MURSHED S M S, LEONG K C, YANG C. Enhanced thermal conductivity of TiO₂-Water based nanofluids. *International Journal of Thermal Sciences*, 2005, 44: 367–373.
- [17] HONG T, YANG H, CHOI C J. Study of the enhanced thermal conductivity of Fe nanofluids. *Journal of Applied Physics*, 2005, : 064311-1–064311-4.
- [18] H. XIE H, ANG J, XI T, LIU Y, AI F, WU Q. Thermal conductivity enhancement of suspensions containing nanosized alumina particles. *Journal of Applied Physics*, 2002, 91:4568–4572.
- [19] WANG Y, FISHER T S, DAVIDSON J L, JIANG L. Thermal conductivity of nanoparticle suspensions. *Proceedings of 8th AIAA/ASME Joint Thermophysics and Heat Transfer Conference USA*, 2002.
- [20] PAK B C, CHO Y I. Hydrodynamic and heat transfer study of dispersed fluids with submicron metallic oxide particles. *Exp. heat transfer*, 1998, 11: 151-170.
- [21] TORII S, YANG W J. Heat transfer augmentation of aqueous suspensions of nanodiamonds in turbulent pipe flow. *J. Heat Transfer*, 2009, 131: 043203-1-043203-5.
- [22] M.R., Sari, M., Kezzar, R., Adjabi, Heat transfer of copper-water nanofluid flow through converging-diverging channel, *Journal of Central South University of Technology*, 23, 2016, 484-496.

[23] M., Kezzar, M.R., Sari, Series Solution of Nanofluid Flow and Heat transfer Between Stretchable/Shrinkable Inclined Walls, *International Journal of Computational Methods*, 3, 2017, 2231–2255.

[24] M.M., Rashidi, M., Reza, S., Gupta, MHD stagnation point flow of micropolar nanofluid between parallel porous plates with uniform blowing, *Powder Technology*, 301, 2016, 876-885.

[25] Laouar Lakhdar. , Cours, ‘ ‘ Systèmes Hydrauliques et Pneumatiques ’ ’UNIVERSITE BADJI MOKHTAR – ANNABA, 2020/2021.

[26] Dib .Abdelhafid., Cours de Transfert de Chaleur ,’ ’Convection thermique ’ ’Université Abderahmane Mira-Bejaia, Faculté de Technologie, Département de Génie des Procédés , 2013-2014 .

[27] Berkane Houda, Mémoire de magistère ‘ ‘Influence de l’effet thermique sur les caractéristiques de la couche limite laminaire sur une paroi lisse’ ’, Université Mohamed Khider Biskra, 2005.

[28] Odin BULLIARD-SAURET ., Thèse DOCTEUR ,’ ’ Étude expérimentale de l’intensification des transferts thermiques par les ultrasons en convection forcée ‘ ’, préparée au sein du CEA/Liten à Grenoble dans l’École Doctorale I-MEP² , 2016 .

[29] Cours MDF, UNIVERSITE HASSIBA BENBOUALI de Chlef, 2019/2020 .

[30] Ressource électronique:

<http://accrodavion.be/Accrodavions/lacouchelimite.html>

[31] Ressource électronique:

<http://hmf.enseiht.fr/travaux/CD0708/beiep/10/html/Theorie.html#Instab>

[32] Ressource électronique:

https://fr.wikipedia.org/wiki/Fichier:D%C3%A9collement_de_la_couche_limite_pour_Wikip%C3%A9dia.png

[33] Ressource électronique:

https://www.researchgate.net/figure/Decollement-dune-couche-limite-sous-leffet-dun-gradient-de-pression-adverse-a_fig29_313195064

[34] Ressource électronique:

<https://www.universalis.fr/encyclopedie/magnetohydrodynamique/>

[35] Ressource électronique:

https://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre_de_Reynolds_magn%C3%A9tique

[36] Ressource électronique:

<https://fr.wikipedia.org/wiki/Magn%C3%A9tohydrodynamique>

[37] João-Paulo Ribeiro, Jean-Antoine Gruss, ‘ ‘Nanofluides pour les applications thermiques’ ’, Réf : NM5115 v1,2009.

[38] Christophe Marvillet, ‘Nanofluides Fluides caloporteurs – Propriétés ‘ ,Réf : BE9571 v2 , 2015.

[39] Ressource électronique:

https://www.researchgate.net/figure/Decollement-dune-couche-limite-sous-leffet-dun-gradient-de-pressure-adverse-a_fig29_313195064

[40] Ressource électronique:

<http://dspace.univ-tlemcen.dz/handle/112/4772>

[41] Brahimi Saadoune, mémoire de magistère en mathématiques,’’ Calcul numérique de quelques modèles pour E.D.P. avec conditions non classiques’’,UNIVERSITÉ LARBI BEN M’HIDI OUM EL BOUAGHI, 2009/2010.