

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

## وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

BADJI MOKHTAR- ANNABA UNIVERSITY  
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR ANNABA



جامعة باجي مختار - عنابة

Année : 2020

Faculté: Sciences de l'Ingéniorat  
Département: Electronique

### MEMOIRE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de : MASTER

Intitulé

*Etude statistique de la différence de phases des champs diffractés par un milieu stratifié en polarisation directe*

Domaine : Sciences et Technologie

Filière : Télécommunications

Spécialité : Systèmes des Télécommunications

Par : BEN CHEMSA Lylia  
FATNASSI Sabrina

DEVANT Le JURY

|                       |                            |                   |                   |
|-----------------------|----------------------------|-------------------|-------------------|
| Président :           | <b>BRIK Fatima</b>         | <b>MCB</b>        | <b>UBM Annaba</b> |
| Directeur de mémoire: | <b>LAFIFI Saddek</b>       | <b>Professeur</b> | <b>UBM Annaba</b> |
| Examineur :           | <b>KOUADRIA Nasreddine</b> | <b>MCA</b>        | <b>UBM Annaba</b> |

## ملخص

أصبحت مشاكل انعراج الموجات الكهرومغناطيسية من خلال الهياكل المشوهة في السنوات الأخيرة موضوعا هاما من البحوث في الكهرومغناطيسية بفضل مجال واسع للتطبيق في البصريات المتكاملة، والنشر والاتصالات السلكية واللاسلكية. في هذه المذكرة، نحدد لبنية مكونة من ثلاث طبقات مفصولة بسطحيتين مشوهتين عشوائيا، كثافة الاحتمال لفرق الطور الزاوي للمجالات المتناثرة في الاستقطاب المباشر للواجهات ضعيفة الارتفاع ذات الطول اللانهائي وذات التوزيعات الغوسية. لثلاثة تكوينات، التربة الزراعية، طبقة الرمل على سطح الجرانيت والتربة المغطاة بالتلوج، ندرس تأثير زاوية السقوط، ومعلمة الارتباط بين الواجهتين وسمك الطبقة الثانية على إحصائيات فرق الطور الزاوي.

## ABSTRACT

*The problems of the scattering of electromagnetic waves through deformed structures have become in recent years an important topic of research in electromagnetism thanks to its wide field of application in integrated optics, propagation and telecommunications. In this Master's thesis, we determine for a structure formed by three layers separated by two randomly deformed interfaces the probability density of the phase difference of the scattered fields in direct polarizations for weakly rough interfaces of infinite length and the Gaussian heights distributions. We show that the probability density of the intensity ratio is a function of only two parameters. For three configurations, agricultural soil, sand layer on a granite surface and snow-covered soil, we study the influence of the incidence angle, the correlation parameter between the two interfaces and the thickness of the second layer on the statistics of the phase difference.*

## RESUME

*Les problèmes de la diffraction des ondes électromagnétiques à travers des structures déformées sont devenus au cours de ces dernières années un important thème de recherche en électromagnétisme grâce à son large domaine d'application en optique intégré, propagation et télécommunication. Dans ce mémoire, nous déterminons pour une structure formée de trois couches séparées par deux interfaces aléatoirement déformées la densité de probabilité de la différence de phase des champs diffractés en polarisations directes pour des interfaces faiblement rugueuses de longueur infinie et des distributions des hauteurs gaussiennes. Nous montrons que la densité de probabilité de la différence de phase est une fonction seulement de deux paramètres. Pour trois configurations sol agricole, surface de granit recouverte de sédiment et un sol recouvert de neige, nous étudions l'influence de l'angle d'incidence, du paramètre de corrélation entre les deux interfaces et l'épaisseur de deuxième couche sur les statistiques de la différence de phase.*

## Remerciements

Je remercie tout d'abord Dieu, le Tout Puissant, de m'avoir bardé de courage et de patience pour venir à bout de mes faiblesses et faire de l'amour des études mon faible.

Je tiens à remercier du fond du coeur mon encadreur **Mr. Lafifi saddek** pour avoir daigné diriger cet humble travail et qui, à aucun moment, ne s'est épargné pour m'éclairer, Et pour lui donner des conseils et des encouragements, ainsi que pour lui Gentillesse, disponibilité, pertinence et patience légendaire. je remercier tous les membres de jury

Je remercie ma chère sœur et amie, **Souaidia Mounira**, qui ne m'a pas abandonnée tout au long de cette période.

Je remercie **ma mère, mon père**, mes amies et aussi tout les personnes qui ont pu m'aider et que sont intervenus d'une manière ou d'une autre dans la réalisation de ce mémoire, et pour leur soutien moral et physique.

A la fin, Je remercie mon fiancé **Mr Toubi mohamed lamine** qui m'encourage et qui a été toujours à mes cotés tout long de ce parcours.

**BEN CHEMSA LILIA**

## Remerciements

*Pendant la période de ma travail, j'ai eu trouvé plusieurs personnes, qui directement ou indirectement ont contribué afin qu'aujourd'hui, je terminer l'élaboration du présent travail.*

*Premièrement, je tiens à remercier Dieu qui avec son pouvoir m'a aidé à vaincre ce défi. Par la suite, je remercie **Mr Lafifi Saddek** mon encadreur pour son appui, sa disponibilité, sa patience et sa valable orientation. je remercier tous les membres de jury*

*Je remercie ma famille d'une façon générale, et **ma mère, mon père, mes frères** d'une façon particulière, que ils m'ont donné leurs soutiens psychologiques, nécessaires pour réussé.*

**FATNASSI SABRINA**

## ***Dédicace***

C'est avec une grande gratitude et des mots sincères, que je dédie ce modeste travail de fin d'étude à mes chers parents qui ont sacrifié leur vie pour ma réussite.

A mon père pour avoir toujours cru en moi et pour ses nombreux sacrifices.

A ma mère pour son soutien et ses encouragements.

J'espère qu'un jour, je pourrai leur rendre un peu de ce qu'ils ont fait pour moi, que dieu leur prête bonheur et longue vie.

A mon seul frère.

À ma seule sœur.

À mon fiancé, qui a été mon soutien tout au long de cette période.

Et à tous mes amis de près.

Enfin, une dédicace toute spéciale à Mon cher grand-père ben helel masoud <RAHIMAHOU ALLAH>  
Grâce à lui, j'ai atteint ce niveau.

BEN CHEMSA LILIA

## ***Dédicace***

*Je dédie ce modeste travail à ceux qui sont toujours.*

*Présents dans mon cœur.*

*A ma très chère mère.*

*A mon très père.*

*A toute ma famille.*

*A tous mes amis.*

Fatnassi Sabrina

# Liste des figures

|   |    |
|---|----|
| Figure I.1. Schéma simplifié d'une surface séparant deux milieux différents.....                                | 09 |
| Figure I.2. Polarisation d'onde électromagnétique (a) polarisation horizontale, (b) polarisation verticale..... | 10 |
| Figure II 1 : Structure à deux couches non parallèles.....  | 14 |
| Figure IV.1a. Le coefficient r en fonction de $u_0$ .....   | 41 |
| Figure IV.1b. La phase $\psi$ en fonction $u_0$ .....   | 41 |
| Figure IV.2a. Le coefficient r en fonction de $q$ .....   | 42 |
| Figure IV.2b. La phase $\psi$ en fonction $q$ .....   | 42 |
| Figure IV.3a. Le coefficient r en fonction de $\theta_0$ .....  | 43 |
| Figure IV.3b. La phase $\psi$ en fonction $\theta_0$ .....  | 43 |
| Figure IV.4a. Densité de probabilité.....   | 44 |
| Figure IV.4b. Fonction de répartition.....  | 44 |
| Figure IV.5a. La moyenne en fonction de q.....  | 45 |
| Figure IV.5b. L'écart type en fonction de q.....  | 45 |
| Figure IV.6a. La moyenne en fonction de $\theta_0$ .....  | 46 |
| Figure IV.6b. L'écart type en fonction de $\theta_0$ .....  | 46 |

# Table des matières

|                                   |           |
|-----------------------------------|-----------|
| <b>INTRODUCTION GÉNÉRALE.....</b> | <b>03</b> |
|-----------------------------------|-----------|

## **CHAPITRE I : *Les équations de Maxwell et la diffraction des ondes électromagnétiques.***

|   |    |
|---|----|
| I.1. Introduction.....  | 06 |
| I.2. Equations de Maxwell.....  | 06 |
| I.3. Équations de propagation.....                                      | 08 |
| I.4. Conditions aux limites imposées aux champs électromagnétiques..... | 10 |
| I.4.1. Conditions aux limites.....                                      | 10 |
| I.4.2. Polarisation d'une onde plane.....                               | 11 |
| I.5. Conclusion.....  | 12 |

## **Chapitre II : Diffraction des ondes électromagnétiques par un milieu stratifié.**

|  |    |
|--|----|
| II.1. Introduction .....                                       | 14 |
| II.2. Présentation de problème.....                            | 14 |
| II.2.1. Position du problème .....                             | 14 |
| II.2.2. Description statistique des surfaces .....             | 15 |
| II.3. Amplitudes diffractées et développement de Rayleigh..... | 15 |
| II.3.1. Développements de Rayleigh .....                       | 15 |
| II.3.2. Champ incident.....                                    | 16 |
| II.3.3. Conditions aux limites.....                            | 18 |
| II.4. Méthode de perturbation.....                             | 19 |
| II.4.1. Résolution à l'ordre zéro.....                         | 20 |
| II.4.2. Résolution à l'ordre un.....                           | 22 |
| II.5. Intensité diffractée.....                                | 25 |

## **Chapitre III : Statistique des champs diffractés, de l'intensité de diffraction et de la différence de phase.**

|   |    |
|---|----|
| III.1. Introduction.....  | 29 |
| III.2. Variances et covariance des parties réelle et imaginaire de l'amplitude de diffraction.. | 29 |
| III.3. Densités de probabilité .....  | 32 |

|  |    |
|--|----|
| III.4. Caractéristiques statistiques de la différence de phase.....                                      | 34 |
| III.4.1. Densité de probabilité conjointe des amplitudes de diffraction dans les deux polarisations..... | 34 |
| III.4.2. Densité de probabilité de la différence de phase.....   | 37 |
| III.4.3. Moyenne et variance de la différence de phase.....  | 37 |
| III.4.4. Fonction de répartition de la différence de phase.....  | 38 |
| III.5. Bilan .....   | 38 |

**Chapitre IV : Simulations.**

|  |           |
|--|-----------|
| IV.1. Introduction.....  | 40        |
| IV.1. Coefficient $r$ et phase $\psi$ .....                        | 40        |
| IV.2. Caractéristiques statistiques de la différence de phase..... | 43        |
| IV.2.1. Distribution de la différence de phase.....                | 43        |
| IV.2.2. Moyenne et variance de la différence de phase.....         | 45        |
| <b>Conclusion générale.....</b>                                    | <b>47</b> |
| <b>Références bibliographiques.....</b>                            | <b>48</b> |

## **INTRODUCTION GENERALE**

Le problème de la diffraction d'une onde plane par une surface rugueuse bidimensionnelle est un important thème de recherche en électromagnétisme grâce à ses applications dans différents domaines : optique [1-2], télédétection [4], propagation et télécommunication [4-6]. Le but principal de notre étude est de déterminer les effets de la rugosité sur la diffraction de l'onde plane. La diffraction de l'onde à travers la structure rugueuse nécessite le recours aux conditions aux limites qui reste l'une des étapes les plus importantes et aucun problème ne peut y échapper.

Dans ce mémoire, nous présentons une étude statistique de la différence des phases des champs diffractés à grande distance par milieu stratifié formé par une double interface rugueuse éclairée par une onde plane en polarisation directe. Une telle étude est en particulier importante dans la caractérisation des deux interfaces. Ces interfaces séparent trois milieux de permittivité différente et sont caractérisées par des distributions des hauteurs gaussiennes. La modélisation de ce phénomène peut se faire soit à l'aide de théories rigoureuses basées sur la résolution des équations de Maxwell, soit avec des théories approchées.

Dans le premier chapitre nous commençons par présenter, les équations de Maxwell sous forme classique [5-6]. L'étude de la diffraction des ondes par des surfaces rugueuses repose sur ces équations ainsi que sur les conditions aux limites imposées au champ électromagnétique [6]. En adoptant le développement de Rayleigh, nous déterminons par une méthode de perturbation à l'ordre 1, les propriétés statistiques du champ diffracté à grande distance.

Dans le second chapitre, nous présentons les propriétés statistiques des surfaces rugueuses et rappelons les expressions des champs diffractés et des conditions aux limites dans le cadre de l'hypothèse de Rayleigh [7]. Pour la modélisation de ces surfaces rugueuses, une approche probabiliste est utilisée où la surface est un processus aléatoire vérifiant certaines propriétés statistiques. Pour les surfaces que nous utilisons, la distribution des hauteurs est supposée gaussienne. La description d'un processus aléatoire gaussien est donnée par sa moyenne, son écart type et sa fonction de corrélation.

Nous allons présenter dans le troisième chapitre, les propriétés statistiques des amplitudes de diffraction et de l'intensité diffractée. Pour des distributions de hauteurs gaussiennes, nous déterminons les intensités cohérentes et incohérentes, les densités de



probabilité du module, de la phase, l'intensité et de la différence de phase des champs diffractés à grande distance.

Le chapitre quatre est réservé aux simulations numériques. Pour une étude comparative de trois type de structures, un sol agricole, un sol recouvert de neige et une surface de granit recouverte de sédiment, nous étudions l'influence de l'angle d'incidence, l'épaisseur de la deuxième couche et le paramètre de corrélation des interfaces sur les statistiques de la différence des champs diffractés par milieu stratifié en polarisation directe.

## **CHAPITRE I :**

# **Les équations de Maxwell et la diffraction des ondes électromagnétiques**

### **I.1. Introduction**

### **I.2. Equations de Maxwell**

### **I.3. Équations de propagation**

### **I.4. Conditions aux limites imposées aux champs électromagnétiques.**

#### **I.4.1. Conditions aux limites**

#### **I.4.2. Polarisation d'une onde plane**

### **I.5. Conclusion**

## CHAPITRE I :

# Les équations de Maxwell et la diffraction des ondes électromagnétiques

### I.1. Introduction

La génération et la propagation des ondes électromagnétiques sont régies par les lois de l'électrodynamique. En particulier, les équations de Maxwell, associées aux conditions aux limites des champs électrique et magnétique et d'un modèle physique du milieu de propagation.

La théorie de l'électromagnétisme repose sur les célèbres équations de Maxwell. La synthèse maxwellienne de l'électromagnétisme peut être condensée en quatre équations qui décrivent la dynamique de ces champs. La diffraction des ondes électromagnétiques à travers des structures rugueuses nécessite le recours aux conditions aux limites qui reste l'une des étapes les plus importantes utilisées pour la résolution du problème et la détermination des champs diffractés. La modélisation de ce phénomène peut se faire soit à l'aide de théories rigoureuses basées sur la résolution des équations de Maxwell, soit avec des théories approchées.

**Le but principal est :**

- Présentent les équations de Maxwell.
- Les équations de la propagation et les conditions aux limites imposées aux champs électromagnétiques.
- A la fin, Le phénomène de la diffraction d'une onde électromagnétique.

### I.2. Equations de Maxwell

Une onde électromagnétique dans un milieu linéaire, homogène et isotrope est caractérisée par 4 vecteurs:  $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$  (vecteur induction électrique),  $\vec{B}$  et  $\vec{H}$  (vecteur excitation magnétique).

D'après la théorie de Maxwell, les champs électrique  $\vec{E}$  et magnétique  $\vec{B}$  sont déterminés dans le cas général, à partir des densités de charge  $\rho$  et de courant  $\vec{J}$ , par les équations fondamentales.

$$\text{Div } \vec{B} = 0 \quad (\vec{B} \text{ est à flux conservative}) \quad (\text{I.1})$$

$$\text{Rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{Loi de Faraday}) \quad (\text{I.2})$$

$$\text{Div } \vec{D} = \rho \quad (\text{Théorème de Gauss}) \quad (\text{I.3})$$

$$\text{Rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (\text{Théorème d'Ampère généraliser}) \quad (\text{I.4})$$

Avec :

$\vec{E}$  : Champ électrique (v/m).

$\vec{B}$  : Densité du flux magnétique (Tesla).

$\vec{D}$  : Densité de déplacement (A/m).

$\vec{J}$  : Densité de courant électrique (A/m<sup>2</sup>).

$\rho$  : Densité de charge électrique (c/ m<sup>3</sup>).

Nous pouvons voir que les équations (I.1) et (I.2) ne font pas intervenir les sources. Elles sont dites équations homogènes. Elles sont valables quel que soit le milieu.

Sous sa forme intégrale, l'équation (I.1) traduit la conservation du flux du vecteur  $\vec{B}$ .

L'équation (I.2) donne le champ électrique  $\vec{E}$  induit par les variations temporelles du champ magnétique B. L'équation (I.3) présente la loi de Gauss et atteste de l'existence des charges électriques. Enfin, la dernière équation (I.4) sous forme intégrale donne la généralisation du théorème d'Ampère et donne le vecteur induit  $\vec{H}$  par le mouvement des charges ainsi que les variations temporelles du vecteur  $\vec{D}$ . Les densités de charge et de courant électrique  $\rho$  et  $j$  constituent les sources.

De nouvelles relations doivent venir compléter les équations de Maxwell, en fonction des propriétés des milieux auxquels on les appliquera.

De telles relations sont appelées « équations constitutives » : un bon exemple est la loi d'Ohm (pour un conducteur ohmique de conductivité  $\sigma$ ) :

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (\text{I.5})$$

Pour les champs  $\vec{D}$  et  $\vec{B}$  :

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad (\text{I.6})$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (\text{I.7})$$

Où  $\varepsilon$ ,  $\mu$  et  $\sigma$  sont des constantes indépendantes de  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  ; ils ont les caractéristiques suivantes :

$$\sigma = 0 \quad \text{Pour un milieu non conducteur ;}$$

$$\sigma \neq 0 \quad \text{Pour un milieu conducteur ;}$$

$$\mu_r = \mu / \mu_0$$

$$\varepsilon_r = \varepsilon / \varepsilon_0 = n^2 \quad (n: \text{indice de réfraction du milieu}).$$

### **I.3. Équations de propagation**

Le champ électrique et le champ magnétique sont reliés dans les équations de Maxwell (il s'agit d'un champ électromagnétique), ils ont été découplés en utilisant des dérivations pour former les équations de propagation [8].

- **Pour le champ électrique  $\vec{E}$  :**

Le rotationnel de l'équation (I.3) et d'après (I.7) on a:

$$\overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = \overrightarrow{\text{rot}} \left( -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{H} \quad (\text{I.8})$$

Et; d'après (I.4), (I.6) et (I.8) on trouve que:

$$\overline{\text{rot}}(\overline{\text{rot}}\vec{E}) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left( \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = -\mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (\text{I.9})$$

Sachant que :

$$\overline{\text{rot}}(\overline{\text{rot}}\vec{E}) = \overline{\text{grad}}(\text{div}\vec{E}) - \Delta\vec{E} \quad (\text{I.10})$$

On obtient d'après (I.9) et (I.10) l'équation de propagation de  $\vec{E}$  :

$$\overline{\text{grad}}(\text{div}\vec{E}) - \Delta\vec{E} + \mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{I.11})$$

Dans le cas du vide :

$$\sigma = \rho = 0$$

$$\mu = \mu_0$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 n^2$$

Et l'équation devient :

$$\Delta\vec{E} - \varepsilon_0\mu_0 n^2 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad (\text{I.12})$$

• Pour le champ magnétique  $\vec{H}$  :

De la même façon, et dans le vide l'équation de propagation s'écrit :

$$\Delta\vec{H} - \varepsilon_0\mu_0 n^2 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad (\text{I.13})$$

On suppose que toutes les grandeurs complexes dépendent du temps par le facteur  $\exp(j\omega t)$ . Les équations (I.12) et (I.13) peuvent donc s'écrire sous la forme :

$$\Delta\vec{E} + k^2\vec{E} = 0 \quad (\text{I.14})$$

$$\Delta \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0 \quad (\text{I.15})$$

Avec :  $k$  est le nombre d'onde ( $k = n\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ ), ces équations portent le nom d'équations de Helmholtz. Une solution élémentaire de ces équations est l'onde plane uniforme, où les champs sont exprimés sous forme exponentielle :

$$\vec{E}(r,t) = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - k \cdot r)} \quad (\text{I.16})$$

$$\vec{H}(r,t) = \vec{H}_0 e^{j(\omega t - k \cdot r)} \quad (\text{I.17})$$

Où  $\vec{E}_0$  et  $\vec{H}_0$  sont indépendants de  $r$ .

La relation entre les champs électrique et magnétique est donnée par :

$$Z = \left| \frac{E}{H} \right| = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \quad (\text{I.18})$$

$Z$  : représente l'impédance du milieu.

#### **I.4. Conditions aux limites imposées aux champs électromagnétiques.**

##### **I.4.1. Conditions aux limites**

La plupart des problèmes électromagnétiques sont basés sur les équations de Maxwell. Ces équations sont valables dans tout l'espace infini [8]. Pour pouvoir appliquer la théorie de l'électromagnétisme à des milieux qui sont finis.

$$\Delta E + k^2 E = 0 \quad (\text{I.19})$$

$$\Delta H + k^2 H = 0 \quad (\text{I.20})$$

Où  $\Delta$  représente le Laplacien scalaire.

Il faudra que les équations d'onde plane (I.19) et (I.20) des champs, électrique et magnétique, satisfassent aux conditions aux frontières, appelées aussi conditions aux limites entre les différents milieux, possédant des caractéristiques diélectriques différentes.

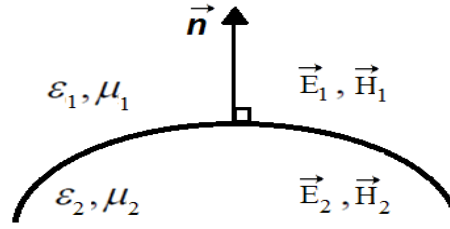


Figure I.1. Schéma simplifié d'une surface séparant deux milieux différents. [2].

Considérons une surface qui sépare deux milieux différents, notons 1 et 2 soit homogènes et isotropes, présentée dans la figure.I.1 [9]. Pour pouvoir décrire le passage du rayonnement du milieu 1 au milieu 2, on définit les conditions aux limites imposées au champ électrique et magnétique par la continuité des composantes normales et tangentielles.

✓ **La continuité des composantes normales**

Cette dernière est définie à partir du déplacement électrique  $\vec{D}$  et la densité de flux magnétique  $\vec{B}$ .

$$\vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = 0 \quad (\text{I.21})$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \quad (\text{I.22})$$

✓ **La continuité des composantes tangentielles**

Cette condition est écrite selon le champ électrique  $\vec{E}$  et le champ magnétique  $\vec{H}$

$$\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \quad (\text{I.23})$$

$$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = 0 \quad (\text{I.24})$$

La normale  $\vec{n}$  est la direction perpendiculaire à la surface de séparation, on note que pour une surface non plane la normale dépend du point considéré.

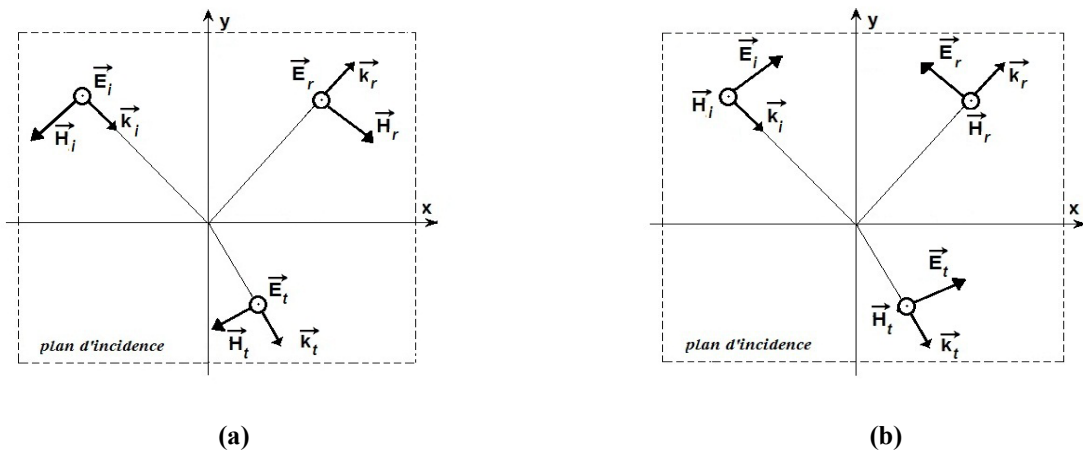
#### I.4.2. Polarisation d'une onde plane

La propagation d'une onde plane incidente permet de définir deux types de polarisations, une polarisation transversale électrique notée **(TE)** appelée aussi polarisation horizontale (**h**) et notée généralement par  $E_{//}$ , ou E le champ électrique de l'onde est



perpendiculaire au plan d'incidence (figure I.2 (a)), et une polarisation transversale magnétique notée (TM) ou bien polarisation verticale ( $v$ ) aussi notée  $H_{//}$ ; dans ce mode le champ magnétique de l'onde est perpendiculaire au plan d'incidence; c'est-à-dire que le champ électrique est dans le plan d'incidence (Figure I.2 (b)).

Quand un champ linéaire incident ( $\vec{E}_i$  ou  $\vec{H}_i$ ), est réfléchi sur une surface parfaitement lisse, les champs réfléchis ( $\vec{E}_r$  ou  $\vec{H}_r$ ) et transmis ( $\vec{E}_t$  ou  $\vec{H}_t$ ) gardent les mêmes caractéristiques de polarisation du champ incident. Cependant, si le champ incident est réfléchi sur une surface rugueuse, dans ce cas la polarisation des champs réfléchis et transmis montre deux composantes: une composante similaire à la polarisation du champ incident que l'on appelle polarisation directe et l'autre orthogonale que l'on appelle, polarisation croisée [10-13].



**Figure I.2.** Polarisation d'onde électromagnétique (a) polarisation horizontale, (b) polarisation verticale [3]

### **I.5. Conclusion:**

Dans ce chapitre, nous avons procédé à une présentation globale de quelques notions l'électromagnétisme, nous avons présenté les équations de Maxwell, Les équations de la propagation et les conditions aux limites imposées aux champs électromagnétiques.

## **CHAPITRE II :**

# **Diffraction des ondes électromagnétiques par un milieu stratifié**

### **II.1. Introduction**

### **II.2. Présentation de problème**

#### **II.2.1. Position du problème**

#### **II.2.2. Description statistique des surfaces**

### **II.3. Amplitudes diffractées et développement de Rayleigh**

#### **II.3.1. Développements de Rayleigh**

#### **II.3.2. Champ incident**

#### **II.3.3. Conditions aux limites**

### **II.4. Méthode de perturbation**

#### **II.4.1. Résolution à l'ordre zero**

#### **II.4.2. Résolution à l'ordre un**

### **II.5. Intensité diffractée**

### **II.6. Conclusion**

## CHAPITRE II :

### Diffraction des ondes électromagnétiques par un milieu stratifié

#### II.1. Introduction

Dans ce chapitre, on considère l'étude du problème de la diffraction des ondes électromagnétiques par une structure composée de trois couches.

**Le but principal de ce chapitre est:**

- Présentation du problème de la diffraction par des couches déformées.
- Le développement de Rayleigh.
- Méthode de perturbation.
- Intensité diffractée.

#### II.2. Présentation de problème

##### II.2.1. Position du problème

La figure II.1, présente une description géométrique de deux surfaces déformées aléatoirement, non parallèles dans un intervalle de  $-L/2$  à  $+L/2$  et distantes de  $u_0$ . Chaque surface est décrite par une fonction dérivable,  $a(x)$  et  $b(x)$  comme il est indiqué dans le schéma.

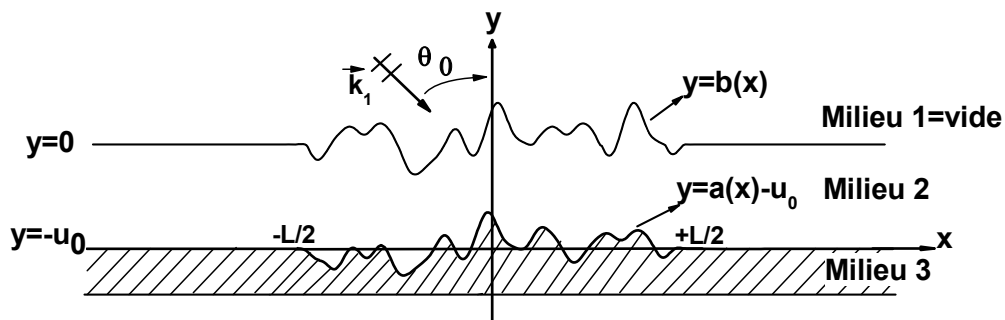


Figure II.1 : Structure à deux couches non parallèles

### II.2.2. Description statistique des surfaces :

Les fonctions décrivant les interfaces sont des processus aléatoires gaussiens centrés ( $\langle a_i(x) \rangle = 0, \forall x$ ) et supposés stationnaires à l'ordre 2. Par la suite, les crochets  $\langle \rangle$  désignent l'espérance mathématique. Les fonctions aléatoires  $a_i(x)$  peuvent être décrites à partir des relations de filtrage. Pour les applications, nous considérons le cas où les interfaces aléatoires présentent des fonctions de corrélation gaussiennes. Les fonctions d'autocorrélation  $R_{ii}(x)$  et la fonction d'intercorrélation  $R_{ij}(x)$  sont données par.

$$\begin{aligned} R_{ii}(x) &= \sigma_i^2 \exp\left(-\frac{x^2}{l_i^2}\right) \\ R_{ij}(x) &= q_{ij} \sigma_i \sigma_j \frac{2l_i l_j}{l_i^2 + l_j^2} \exp\left[-\frac{2x^2}{l_i^2 + l_j^2}\right] \end{aligned} \quad (\text{II.1})$$

$l_i$  représente la longueur de corrélation et  $\sigma_i$  la hauteur quadratique moyenne. Pour  $q_{ij} = 0$ , les interfaces sont non corrélées. Elles sont totalement corrélées (c'est à dire pour  $l_i = l_j$  et  $q_{ij} = 1$ ).

Les spectres et l'interspectre sont des gaussiennes avec :

$$\begin{aligned} \hat{R}_{ii}(\alpha) &= \sigma_i^2 l_i \sqrt{\pi} \exp\left[-\frac{l_i^2 \alpha^2}{2}\right] \\ \hat{R}_{ij}(\alpha) &= q_{ij} \sigma_i \sigma_j \sqrt{\pi l_i l_j} \exp\left[-\frac{(l_i^2 + l_j^2) \alpha^2}{4}\right] \end{aligned} \quad (\text{II.2})$$

Où  $\hat{g}(\alpha)$  représente la transformée de Fourier de  $g(x)$ .

## II.3. Amplitudes diffractées et développement de Rayleigh

### II.3.1. Développements de Rayleigh

La principale difficulté à la résolution du problème de la diffraction par des surfaces déformées aléatoirement est la détermination des amplitudes diffractées en fonction des amplitudes incidentes. Une hypothèse très féconde a été introduite par Rayleigh à la fin du XIXème siècle, permettant de définir la rugosité d'une surface en fonction de sa géométrie et

des caractéristiques de l'onde incidente. Ainsi, les champs diffractés par une structure rugueuse s'expriment sous la forme de développement de Rayleigh, obtenu à partir de la transformée de Fourier de l'équation de Helmholtz, qui définit que l'onde diffractée est formée par une somme d'onde plane montante et descendante.

### **II.3.2. Champ incident**

Les ondes diffractées sont dues au rayonnement des courants de surface créée par l'onde incidente, cette dernière est une onde plane de longueur d'onde  $\lambda$ , et dont le vecteur d'onde  $\vec{k}_1$ , situé dans le plan  $xOy$ , fait l'angle d'incidence  $\theta_0$  avec l'axe  $Oy$ . On considère une dépendance temporelle en  $\exp(j\omega t)$ .

Le milieu 1 est assimilé au vide. On note  $Z_1 = 120\pi$  l'impédance du vide et  $k_1 = 2\pi / \lambda$ , le nombre d'onde. Par la suite, les grandeurs  $n_{2,3}, \epsilon_{r2,3}, Z_{2,3}$  et  $k_{2,3}$  désignent les indices optiques, les permittivités relatives, les impédances et les nombres d'onde des milieux 2 et 3. En polarisation E//, le champ électrique incident est parallèle à l'axe  $Oz$ . En polarisation H//, c'est le champ magnétique qui est parallèle à l'axe  $Oz$ .

En absence de déformation ( $a(x) = b(x) = 0$ ), le phénomène de diffraction se réduit à la réflexion et réfraction spéculaire. Dans le cas où l'onde incidente est plane, les champs réfléchis et réfractés sont également des ondes planes.

Par contre ; en cas de la présence de déformation, les ondes diffractées correspondent aux ondes rayonnées uniquement par la zone d'interaction de la surface, c'est la zone qui comprend la déformation et voisinage proche d'un point de vue électromagnétique.

Le champ incident se met sous la forme:

$$F_0(x, y) = \frac{1}{\sqrt{L}} \exp(-j\alpha_0 x + j\beta_0 y) = \begin{cases} E_{z0}(x, y) & \text{pour E//} \\ Z_1 H_{z0}(x, y) & \text{pour H//} \end{cases} \quad (\text{II.3})$$

Où :

$$\alpha_0 = k_1 \sin \theta_0 ; \quad \beta_0 = k_1 \cos \theta_0 \quad (\text{II.4})$$

Le facteur  $1/\sqrt{L}$  permet d'avoir une puissance incidente  $P_0$  indépendante de la longueur  $L$  de la déformation :

$$P_0 = \frac{\cos \theta_0}{2Z_1} \quad (\text{II.5})$$

Le plan étant localement déformé ( $a(x) \neq b(x) \neq 0$ ). On a donc des champs diffractés dans chaque milieu s'expriment sous la forme de développements de Rayleigh.

Dans le vide, la composante parallèle à Oz est donnée sous la forme suivante :

$$F_1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A_1(\alpha) \exp(-j\alpha x) \exp(-j\beta_1(\alpha)y) d\alpha \quad (\text{II.6})$$

Dans le milieu 2, il faut considérer des ondes se déplaçant dans les sens  $+y$  et  $-y$  :

$$\begin{aligned} F_2(x, y) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A_2^{(-)}(\alpha) \exp(-j\alpha x) \exp(+j\beta_2(\alpha)y) d\alpha \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A_2^{(+)}(\alpha) \exp(-j\alpha x) \exp(-j\beta_2(\alpha)y) d\alpha \end{aligned} \quad (\text{II.6})$$

Dans le milieu 3, le développement de Rayleigh ne fait intervenir que des ondes se déplaçant dans le sens  $-y$  avec :

$$F_3(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A_3(\alpha) \exp(-j\alpha x) \exp(+j\beta_3(\alpha)y) d\alpha \quad (\text{II.7})$$

Les constantes de propagation  $\beta_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) présente une partie imaginaire inférieure ou égale à zéro avec :

$$\beta_j^2 + \alpha^2 = k_j^2, \quad \text{Im}(\beta_j) \leq 0 \quad (\text{II.8})$$

Les constantes de propagation  $\beta_j$  associées à  $\alpha_0$  sont notées  $\beta_{j0} = \beta_j(\alpha_0)$  avec  $\beta_0 = \beta_{10}$ .

Les expressions des composantes électriques et magnétiques se déduisent des fonctions  $F(x, y)$  avec :

**En polarisation E//,**

$$\begin{aligned} H_x(x, y) &= -\frac{1}{jkZ} \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \\ H_y(x, y) &= \frac{1}{jkZ} \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} \end{aligned} \quad ; F(x, y) = E_z \quad (\text{II.9})$$

**En polarisation H//,**

$$\begin{aligned} E_x(x, y) &= \frac{1}{jk} \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \\ E_y(x, y) &= -\frac{1}{jk} \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} \end{aligned} \quad ; F(x, y) = ZH_z \quad (\text{II.10})$$

L'hypothèse de Rayleigh s'accorde sur la validité des développements en tout point de l'espace  $y$  compris sur les surfaces limites [8]. Cette hypothèse permet d'écrire les conditions aux limites:

### **II.3.3. Conditions aux limites :**

Les conditions aux limites ont pour but de déterminer et de calculer les inconnus (qui sont les amplitudes de diffraction, notés  $A_1(\alpha)$ ,  $A_2^{(-)}(\alpha)$ ,  $A_2^{(+)}(\alpha)$  et  $A_3(\alpha)$ ) produits par le développement de Rayleigh, en les appliquant sur les deux interfaces.

La continuité des composantes tangentielles à l'interface supérieure  $y = b(x)$  donne :

**En polarisation TE (E//)**

$$[F_{1z}(x, y)]_{y=b(x)} - [F_{2z}(x, y)]_{y=b(x)} = -[F_{0z}(x, y)]_{y=b(x)} \quad (\text{II.11})$$

$$\left[ \frac{\partial F_1}{\partial y} - \dot{b}(x) \frac{\partial F_1}{\partial x} \right]_{y=b(x)} - \left[ \frac{\partial F_2}{\partial y} - \dot{b}(x) \frac{\partial F_2}{\partial x} \right]_{y=b(x)} = - \left[ \frac{\partial F_0}{\partial y} - \dot{b}(x) \frac{\partial F_0}{\partial x} \right]_{y=b(x)} \quad (\text{II.12})$$

**En polarisation TM (H//),**

$$n_2 \left[ \frac{\partial F_1}{\partial y} - \dot{b}(x) \frac{\partial F_1}{\partial x} \right]_{y=b(x)} - \left[ \frac{\partial F_2}{\partial y} - \dot{b}(x) \frac{\partial F_2}{\partial x} \right]_{y=b(x)} = -n_2 \left[ \frac{\partial F_0}{\partial y} - \dot{b}(x) \frac{\partial F_0}{\partial x} \right]_{y=b(x)} \quad (\text{II.13})$$

$$[F_1(x, y)]_{y=b(x)} - n_2 [F_2(x, y)]_{y=b(x)} = -[F_0(x, y)]_{y=b(x)} \quad (\text{II.14})$$

La continuité des composantes tangentielles à l'interface inférieure  $y = a(x) - u_0$  conduit aux relations suivantes :

**En polarisation TE ( $E_{//}$ ),**

$$[F_{2z}(x, y)]_{y=a(x)-u_0} = [F_{3z}(x, y)]_{y=a(x)-u_0} \quad (\text{II.15})$$

$$\left[ \frac{\partial F_2}{\partial y} - \dot{a}(x) \frac{\partial F_2}{\partial x} \right]_{y=a(x)-u_0} = \left[ \frac{\partial F_3}{\partial y} - \dot{a}(x) \frac{\partial F_3}{\partial x} \right]_{y=a(x)-u_0} \quad (\text{II.16})$$

**En polarisation TM ( $H_{//}$ ),**

$$n_3 \left[ \frac{\partial F_2}{\partial y} - \dot{a}(x) \frac{\partial F_2}{\partial x} \right]_{y=a(x)-u_0} = n_2 \left[ \frac{\partial F_3}{\partial y} - \dot{a}(x) \frac{\partial F_3}{\partial x} \right]_{y=a(x)-u_0} \quad (\text{II.17})$$

$$n_3 [F_3(x, y)]_{y=a(x)-u_0} = n_2 [F_2(x, y)]_{y=a(x)-u_0} \quad (\text{II.18})$$

La résolution du problème de la diffraction un milieu stratifié constitué de deux interfaces rugueuses aléatoires consiste à déterminer les champs  $F_1$ ,  $F_2$  et  $F_3$ , en utilisant la méthode de perturbation (SPM).

#### **II.4. Méthode de perturbation**

La méthode des petites perturbations (à l'ordre 1) a été introduite par Rayleigh pour la diffraction des ondes acoustiques par une surface rugueuse. Elle est valable pour des surfaces rugueuses dont la hauteur est petite devant la longueur d'onde. Elle a été adaptée par Fano[14] pour les réseaux optiques puis par Rice [15] pour des surfaces parfaitement conductrices unidimensionnelles. Cette méthode peut s'obtenir grâce à la décomposition en ondes planes du champ diffracté au dessus de la surface. Cette décomposition est supposée valable aussi



sur la surface rugueuse. À partir du développement perturbatif du champ diffracté sur la surface rugueuse et des conditions de continuité du champ électrique et magnétique, il est possible de déterminer l'amplitude diffractée.

Pour des faibles hauteurs quadratiques moyennes des interfaces devant la longueur d'onde  $\lambda$ , une bonne approximation consiste à représenter les amplitudes de diffraction et les fonctions exponentielles par leur développement en séries entières.

$$A(\alpha) = \sum_{pq} A^{(pq)}(\alpha) \quad (\text{II.19})$$

Le terme  $A^{(pq)}(\alpha)$  est proportionnel au produit  $h_a^p h_b^q$  où  $h_a$  est une amplitude caractéristique de  $a(x)$  et  $h_b$ , de  $b(x)$ .

$$\exp(\pm j\beta a(x)) = \sum_q \frac{(\pm j\beta a(x))^q}{q!}; \quad \exp(\pm j\beta b(x)) = \sum_q \frac{(\pm j\beta b(x))^q}{q!} \quad (\text{II.20})$$

Pour chaque ordre de perturbation ( $pq$ ), on sera donc amené à écrire les conditions aux limites afin de trouver les termes  $A^{(pq)}(\alpha)$  qui permettent par la suite de trouver la répartition angulaire de l'intensité d'énergie diffractée correspondante à cet ordre. Ceci fera l'objet du chapitre III avec l'étude statistique (densité de probabilité, moyenne et variance) de l'intensité de diffraction.

#### **II.4.1. Résolution à l'ordre zéro**

A l'ordre zéro, les deux interfaces sont parfaitement lisses. A partir des conditions aux limites, on obtient un système d'équations dans les deux modes, chaque système est formé par quatre équations à quatre inconnus. La résolution de ce système permet de trouver l'amplitude de diffraction à l'ordre zéro dans les trois milieux.

- En polarisation E//, on a:

$$\begin{aligned}
 A_1^{(00)}(\alpha) - A_2^{(+,00)}(\alpha) - A_2^{(-,00)}(\alpha) &= -\delta(\alpha - \alpha_0) \\
 -\beta_1 A_1^{(00)}(\alpha) + \beta_2 A_2^{(+,00)}(\alpha) - \beta_2 A_2^{(-,00)}(\alpha) &= -\beta_0 \delta(\alpha - \alpha_0) \\
 A_2^{(+,00)}(\alpha) \exp(+j\beta_2 u_0) + A_2^{(-,00)}(\alpha) \exp(-j\beta_2 u_0) - A_3^{(-,00)}(\alpha) \exp(-j\beta_3 u_0) &= 0 \\
 \beta_2 A_2^{(+,00)}(\alpha) \exp(+j\beta_2 u_0) - \beta_2 A_2^{(-,00)}(\alpha) \exp(-j\beta_2 u_0) + \beta_3 A_3^{(-,00)}(\alpha) \exp(-j\beta_3 u_0) &= 0
 \end{aligned} \tag{II.21}$$

La résolution de ce système donne les résultats suivants:

$$\begin{aligned}
 A_{1,E//}^{(00)}(\alpha) &= \frac{j(\beta_{10}\beta_{30} - \beta_{20}^2) \sin \beta_{20} u_0 + \beta_{20} (\beta_{10} - \beta_{30}) \cos \beta_{20} u_0}{\sqrt{L} r_{0E}} \delta(\alpha - \alpha_0) \\
 A_{2,E//}^{(+,00)}(\alpha) &= \frac{\beta_{10} (\beta_{20} - \beta_{30}) \exp(-j\beta_{20} u_0) \delta(\alpha - \alpha_0)}{\sqrt{L} r_{0E}} \\
 A_{2,E//}^{(-,00)}(\alpha) &= \frac{\beta_{10} (\beta_{20} + \beta_{30}) \exp(+j\beta_{20} u_0) \delta(\alpha - \alpha_0)}{\sqrt{L} r_{0E}} \\
 A_{3,E//}^{(00)}(\alpha) &= \frac{2\beta_{20}\beta_{10} \exp(+j\beta_{30} u_0) \delta(\alpha - \alpha_0)}{\sqrt{L} r_{0E}}
 \end{aligned} \tag{II.22}$$

Avec

$$r_{0E} = \beta_{20} (\beta_{30} + \beta_{10}) \cos \beta_{20} u_0 + j(\beta_{10}\beta_{30} + \beta_{20}^2) \sin \beta_{20} u_0 \tag{II.23}$$

• En polarisation H//,

$$\begin{aligned}
 A_1^{(00)}(\alpha) - n_2 A_2^{(+,00)}(\alpha) - n_2 A_2^{(-,00)}(\alpha) &= -\delta(\alpha - \alpha_0) \\
 -n_2 \beta_1 A_1^{(00)}(\alpha) + \beta_2 A_2^{(+,00)}(\alpha) - \beta_2 A_2^{(-,00)}(\alpha) &= -n_2 \beta_0 \delta(\alpha - \alpha_0) \\
 n_2 (A_2^{(+,00)}(\alpha) \exp(+j\beta_2 u_0) + A_2^{(-,00)}(\alpha) \exp(-j\beta_2 u_0)) &= n_3 A_3^{(-,00)}(\alpha) \exp(-j\beta_3 u_0) \\
 n_3 \beta_2 (A_2^{(+,00)}(\alpha) \exp(+j\beta_2 u_0) - A_2^{(-,00)}(\alpha) \exp(-j\beta_2 u_0)) &= -n_2 \beta_3 A_3^{(-,00)}(\alpha) \exp(-j\beta_3 u_0)
 \end{aligned} \tag{II.24}$$

Les amplitudes sont données par:

$$\begin{aligned}
 A_1^{(00)}(\alpha) &= \frac{j(n_2^4 \beta_{10} \beta_{30} - n_3^2 \beta_{20}^2) \sin \beta_{20} u_0 + n_2^2 \beta_{20} (n_3^2 \beta_{10} - \beta_{30}) \cos \beta_{20} u_0}{\sqrt{L} r_{0H}} \delta(\alpha - \alpha_0) \\
 A_{2,H//}^{(+,00)}(\alpha) &= \frac{(-n_2^2 \beta_{30} + n_3^2 \beta_{20}) n_2 \beta_0 \exp(-j \beta_{20} u_0)}{\sqrt{L} r_{0H}} \delta(\alpha - \alpha_0) \\
 A_{2,H//}^{(-,00)}(\alpha) &= \frac{(n_2^2 \beta_{30} + n_3^2 \beta_{20}) n_2 \beta_{10} \exp(+j \beta_{20} u_0)}{\sqrt{L} r_{0H}} \delta(\alpha - \alpha_0) \\
 A_{3,H//}^{(00)}(\alpha) &= \frac{2n_3 n_2^2 \beta_{10} \beta_{20} \exp(+j \beta_{30} u_0)}{\sqrt{L} r_{0H}} \delta(\alpha - \alpha_0)
 \end{aligned} \tag{II.25}$$

Avec :

$$r_{0H} = n_2^2 \beta_{20} (n_3^2 \beta_{10} + \beta_{30}) \cos \beta_{20} u_0 + j (n_3^2 \beta_{20}^2 + n_2^4 \beta_{10} \beta_{30}) \sin \beta_{20} u_0 \tag{II.26}$$

On suppose pour établir les relations des amplitudes que  $r_0 \neq 0$ .

#### II.4.2. Résolution à l'ordre un

Le phénomène de diffraction est analysé au premier ordre de la perturbation. On cherche la solution des conditions limites (II.11)-(II.18) au premier ordre de perturbation suivant les deux paramètres  $v_a$  et  $v_b$  caractérisant les deux interfaces. Tous calculs faits, nous trouvons pour l'amplitude de diffraction au dessus de la surface :

$$A_1^{(1)}(\alpha) = A_1^{(10)}(\alpha) + A_1^{(01)}(\alpha) \tag{II.27}$$

Avec

$$\begin{aligned}
 A_1^{(10)}(\alpha) &= K_a \hat{a}(\alpha - \alpha_0) \\
 A_1^{(01)}(\alpha) &= K_b \hat{b}(\alpha - \alpha_0)
 \end{aligned} \tag{II.28}$$

$\hat{a}(\alpha)$  et  $\hat{b}(\alpha)$  sont les transformées de Fourier des fonctions  $a(x)$  et  $b(x)$  divisées par  $\sqrt{L}$  :

$$\hat{a}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_{-L/2}^{+L/2} a(x) \exp(j\alpha x) dx \tag{II.29}$$

$$\hat{b}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_{-L/2}^{+L/2} b(x) \exp(j\alpha x) dx \quad (\text{II.30})$$

Les coefficients  $K_a$  et  $K_b$  dépendent de la polarisation. En polarisation E//, on obtient les expressions suivantes:

$$K_a = j2\beta_{10} \frac{\beta_2\beta_{20}(k_2^2 - k_3^2)}{r_E(\alpha)r_{0E}} \quad (\text{II.31})$$

$$K_b = j2\beta_{10} \frac{(\beta_2 \cos \beta_2 u_0 + j\beta_3 \sin \beta_2 u_0)(\beta_{20} \cos \beta_{20} u_0 + j\beta_{30} \sin \beta_{20} u_0)(k_1^2 - k_2^2)}{r_E(\alpha)r_{0E}} \quad (\text{II.32})$$

Et :

$$r_E(\alpha) = \beta_2(\beta_3 + \beta_1) \cos \beta_2 u_0 + j(\beta_1\beta_3 + \beta_2^2) \sin \beta_2 u_0 \quad (\text{II.33})$$

En polarisation H//, nous trouvons :

$$K_a = j2\beta_{10} \frac{\beta_2\beta_{20}n_2^2(n_3^2 - n_2^2)(\beta_3\beta_{30}n_2^2 - n_3^2\alpha\alpha_0)}{r_H(\alpha)r_{0H}} \quad (\text{II.34})$$

$$K_b = \frac{2\beta_{10}(1-n_2^2)}{r_H(\alpha)r_{0H}} \left\{ \begin{array}{l} n_2^2 n_3^2 \left[ \begin{array}{l} \beta_2(\beta_{20}^2\beta_3 - n_2^2\beta_{30}\alpha\alpha_0) \sin \beta_{20} u_0 \cos \beta_2 u_0 \\ -\beta_{20}(n_2^2\beta_3\alpha\alpha_0 - \beta_{30}\beta_2^2) \cos \beta_{20} u_0 \sin \beta_2 u_0 \end{array} \right] \\ +j \left[ \begin{array}{l} (n_3^4\beta_{20}^2\beta_2^2 - n_2^6\beta_3\beta_{30}\alpha\alpha_0) \sin \beta_{20} u_0 \sin \beta_2 u_0 \\ +n_2^2\beta_{20}\beta_2(n_3^4\alpha\alpha_0 - n_2^2\beta_{30}\beta_3) \cos \beta_{20} u_0 \cos \beta_2 u_0 \end{array} \right] \end{array} \right\} \quad (\text{II.35})$$

et

$$r_H(\alpha) = n_2^2\beta_2(n_3^2\beta_1 + \beta_3) \cos \beta_2 u_0 + j(n_3^2\beta_2^2 + n_2^4\beta_1\beta_3) \sin \beta_2 u_0 \quad (\text{II.36})$$

Nous trouvons dans le milieu 2 les expressions suivantes :

$$A_{2,E//}^{(+,10)}(\alpha) = -j \frac{\beta_{20}\beta_{10}(\beta_2 + \beta_1)}{r_{0E}r_E(\alpha)} \hat{a}(\alpha - \alpha_0) \quad (\text{II.37})$$

$$A_{2,E//}^{(-,10)}(\alpha) = -j \frac{\beta_{20}\beta_{10}(\beta_2 - \beta_1)}{r_{0E}r_E(\alpha)} \hat{a}(\alpha - \alpha_0) \quad (\text{II.38})$$

$$A_{2,H//}^{(+,10)}(\alpha) = \frac{jn_2\beta_{10}(k_2^2 - \alpha\alpha_0)(n_2^2\beta_1 + \beta_2)}{\beta_2 r_{0H}r_H(\alpha)} \hat{a}(\alpha - \alpha_0) \quad (\text{II.39})$$

$$A_{2,H//}^{(-,10)}(\alpha) = \frac{jn_2\beta_{10}(k_2^2 - \alpha\alpha_0)(-n_2^2\beta_1 + \beta_2)}{\beta_2 r_{0E}r_H(\alpha)} \hat{a}(\alpha - \alpha_0) \quad (\text{II.40})$$

et dans le milieu 3, nous trouvons :

$$A_{3,E//}^{(10)}(\alpha) = 2j \frac{\beta_{10}\beta_{20}k^2(n_2^2 - n_3^2)(\beta_2 \cos \beta_2 u_0 + j\beta_1 \sin \beta_2 u_0)}{r_E(\alpha)r_{0E}} \exp(j\beta_3 u_0) \hat{a}(\alpha - \alpha_0) \quad (\text{II.41})$$

$$A_{3,H//}^{(10)}(\alpha) = 2j \frac{n_3 n_2^2 \beta_{10} \beta_{20} (n_3^2 - n_2^2) \left[ \begin{array}{l} \beta_2 (\alpha\alpha_0 + n_2^2 \beta_1 \beta_{30}) \cos \beta_2 u_0 \\ + j (n_2^2 \beta_1 \alpha\alpha_0 + \beta_2^2 \beta_{30}) \sin \beta_2 u_0 \end{array} \right]}{r_H(\alpha)r_{0H}} \exp(j\beta_3 u_0) \hat{a}(\alpha - \alpha_0) \quad (\text{II.42})$$

où  $\hat{a}(\alpha)$  est la TF de  $a(x)$  divisé par  $\sqrt{L}$  (II.29). Les termes au dénominateur  $r_E(\alpha)$  et  $r_H(\alpha)$  sont donnés par les relations (II.33) et (II.36). A l'ordre  $v_a^0 v_b^1$ , tous calculs faits, nous trouvons dans le milieu 2 les expressions suivantes :

$$A_{2,E//}^{(+,01)}(\alpha) = j\beta_{10} \frac{(\beta_2 - \beta_3)(\beta_{20} \cos \beta_{20} u_0 + j\beta_{30} \sin \beta_{20} u_0)(k_1^2 - k_2^2)}{r_E(\alpha)r_{0E}} \exp(-j\beta_2 u_0) \hat{b}(\alpha - \alpha_0) \quad (\text{II.43})$$

$$A_{2,E//}^{(-,01)}(\alpha) = - \frac{\beta_{10}(\beta_3 + \beta_2)(\beta_{30} \sin \beta_{20} u_0 - j\beta_{20} \cos \beta_{20} u_0)(k_1^2 - k_2^2)}{r_E(\alpha)r_{0E}} \exp(+j\beta_2 u_0) \hat{b}(\alpha - \alpha_0) \quad (\text{II.44})$$

$$A_{2,H//}^{(+,01)}(\alpha) = j\beta_{10} \frac{(1 - n_2^2)(n_3^2 \beta_2 - n_2^2 \beta_3)}{r_H(\alpha)r_{0H}} \quad (\text{II.45})$$

$$\times (n_2 \beta_{20} (n_2^2 \beta_{30} \beta_1 + n_3^2 \alpha\alpha_0) \cos \beta_{20} u_0 + j (n_3^2 \beta_{20}^2 n_2 \beta_1 + n_2^3 \beta_{30} \alpha\alpha_0) \sin \beta_{20} u_0) \exp(-j\beta_2 u_0) \hat{b}(\alpha - \alpha_0)$$

$$A_{2,H//}^{(-,01)}(\alpha) = \frac{\beta_{10}(1 - n_2^2)(n_3^2 \beta_2 + n_2^2 \beta_3)}{r_H(\alpha)r_{0H}} \quad (\text{II.46})$$

$$\times (- (n_3^2 \beta_{20}^2 n_2 \beta_1 + n_2^3 \beta_{30} \alpha\alpha_0) \sin \beta_{20} u_0 + j n_2 \beta_{20} (\beta_{30} n_2^2 \beta_1 + n_3^2 \alpha\alpha_0) \cos \beta_{20} u_0) \exp(+j\beta_2 u_0) \hat{b}(\alpha - \alpha_0)$$

Dans le milieu 3, nous obtenons :

$$A_{3,E//}^{(01)}(\alpha) = -\frac{2\beta_{10}\beta_2(\beta_{30}\sin\beta_{20}u_0 - j\beta_{20}\cos\beta_{20}u_0)(k_1^2 - k_2^2)}{r_E(\alpha)r_{0E}} \exp(+j\beta_3u_0)\hat{b}(\alpha - \alpha_0) \quad (\text{II.47})$$

$$A_{3,H//}^{(01)}(\alpha) = \frac{2\beta_{10}\beta_2n_3n_2^2(1-n_2^2)}{r_H(\alpha)r_{0H}} \times \left( -(n_2^2\beta_{30}\alpha\alpha_0 + n_3^2\beta_{20}^2\beta_1)\sin\beta_{20}u_0 + j\beta_{20}(n_3^2\alpha\alpha_0 + jn_2^2\beta_{30}\beta_1)\cos\beta_{20}u_0 \right) \exp(+j\beta_3u_0)\hat{b}(\alpha - \alpha_0) \quad (\text{II.48})$$

où  $\hat{b}(\alpha)$  est la TF de  $b(x)$  divisé par  $\sqrt{L}$  (II.30). Au final, les amplitudes de diffraction à l'ordre 1 sont données par la sommes de terme en  $v_a^1v_b^0$  et  $v_a^0v_b^1$  :

$$\begin{aligned} A_2^{(\pm,1)}(\alpha) &= A_2^{(\pm,10)}(\alpha) + A_2^{(\pm,01)}(\alpha) \\ A_3^{(1)}(\alpha) &= A_3^{(10)}(\alpha) + A_3^{(01)}(\alpha) \end{aligned} \quad (\text{II.49})$$

Si les deux milieux sont identiques, les amplitudes  $A_2^{(+,1)}(\alpha)$  sont égales à zéro. La fonction  $A_2^{(-,1)}(\alpha)$  s'identifié à la fonction  $A_3(\alpha)$ . Nous retrouvons les amplitudes de diffraction d'une simple interface [16].

Dans le cas où les milieux 2 et 3 sont identiques, le coefficient  $K_a$  est égal à zéro et nous obtenons les amplitudes de diffraction d'une simple interface. On peut noter que  $K_{a,b}^{(E//)} = -K_{a,b}^{(H//)}$  pour  $\alpha = \alpha_0 = 0$ .

## II.5. Intensité diffractée

Nous considérons que l'onde plane a une amplitude de  $1/\sqrt{L}$  de manière à avoir une puissance apportée à la déformation indépendante de la longueur  $L$  avec :

$$P_i = \frac{k \cos\theta_0}{2kZ_1} = \frac{\beta_0}{2kZ_1} \quad (\text{II.50})$$

La puissance diffractée est calculée à partir de la composante  $N^y$  du vecteur de Poynting :

$$N^y = E_z H_x = -F(x, y) \frac{\partial F(x, y)}{jkZ \partial y}. \quad E// \quad (\text{II.51})$$

$$N^y = -E_x H_z = -F(x, y) \frac{\partial F(x, y)}{jkZ \partial y}. \quad H// \quad (\text{II.52})$$

Donc, pour les deux types de polarisation, l'expression de la composante  $N^y$  du vecteur de Poynting est la même. Elle est donnée par:

$$N^y(x, y) = jF(x, y) \frac{\partial F(x, y)}{kZ \partial y} \quad (\text{II.53})$$

Sa valeur moyenne est :

$$\bar{N}^y(x, y) = \frac{1}{2kZ} \operatorname{Re} \left( jF(x, y) \frac{\partial F(x, y)^*}{\partial y} \right) \quad (\text{II.54})$$

La puissance totale diffractée par unité de largeur est:

$$P^d = \int_0^1 \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{N}^y(x, y) dx dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{N}^u(x, u) dx \quad (\text{II.55})$$

Suivant le théorème de Perceval, la relation de la puissance diffractée s'écrit:

$$P^d = \frac{1}{2kZ} \operatorname{Re} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \beta |A_1(\alpha)|^2 d\alpha \right] \quad (\text{II.56})$$

Loin de la surface de séparation des deux milieux, l'énergie est transportée uniquement par des ondes planes. Dans l'air pour les ondes planes, on a:  $\beta^2 \geq 0 \Rightarrow |\alpha| \leq k$  ce qui permet de réduire l'intervalle d'intégration à  $[-k, +k]$ :

$$P^d = \frac{1}{2kZ} \operatorname{Re} \left[ \int_{-k}^{+k} \beta |A_1(\alpha)|^2 d\alpha \right] = \frac{1}{2kZ} \operatorname{Re} \left[ \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} k^2 \cos^2 \theta |A_1(k \sin \theta)|^2 d\theta \right] \quad (\text{II.57})$$

L'intégrand de l'intégrale représente la densité angulaire de puissance diffractée  $p^d(k \sin \theta)$  pour  $-\pi/2 \leq \theta \leq +\pi/2$ . Dans une direction  $\theta$  donnée ( $\alpha = k \sin \theta$ ), la puissance diffractée est donnée par:

$$p^d(k \sin \theta) = \frac{k^2 \cos^2 \theta |A_1(k \sin \theta)|^2}{2kZ} = \frac{k^2 \cos^2 \theta |A_1(k \sin \theta)|^2}{2kZ} \quad (\text{II.58})$$

Comme nous nous intéressons particulièrement à la répartition angulaire de l'énergie diffractée, nous définissons une quantité dite "intensité diffractée" ou intensité lumineuse par le rapport de la puissance diffractée par la partie rugueuse dans la direction  $\theta$  ( $\alpha = k \sin \theta$ ) à la puissance incidente:

$$I^d(k \sin \theta) = \frac{p^d(k \sin \theta)}{2\pi P^i} = \frac{k^2 \cos^2 \theta |A_1(k \sin \theta)|^2}{2\pi k \cos \theta_0} \quad (\text{II.59})$$

D'où :

$$I^d(k \sin \theta) = \frac{\cos^2 \theta \{ \text{Re}^2 [A_1(k \sin \theta)] + \text{Im}^2 [A_1(k \sin \theta)] \}}{\lambda \cos \theta_0} \quad (\text{II.60})$$

A grande distance, la dépendance angulaire du champ diffracté est donnée par le produit  $A_1^{(1)}(\alpha = k_1 \sin \theta) \cos \theta$ . Cette dépendance conduit au coefficient de diffusion bistatique  $I_{d1}^{(2)}(\theta)$  qui est défini comme la densité angulaire de puissance diffractée sous la direction  $\theta$  divisée par la puissance incidente  $P_0$  [16]. A l'ordre 1 de la méthode des petites perturbations, nous obtenons :

$$I_{d1}^{(2)}(\theta) = \frac{\cos^2 \theta}{\lambda \cos \theta_i} |A_1^{(1)}(k_1 \sin \theta)|^2 \quad (\text{II.61})$$

$A_1^{(1)}(k_1 \sin \theta)$  est une fonction aléatoire de l'angle d'observation  $\theta$ .

Puisque  $\langle a(x) \rangle = \langle b(x) \rangle = 0$ , nous déduisons que le champ cohérent est égal à zéro et que l'amplitude de diffraction est une variable aléatoire centrée ( $\langle A_1^{(1)}(k_1 \sin \theta) \rangle = 0$ ) et que le champ cohérent et l'intensité cohérente sont nuls. L'intensité cohérente étant nulle. Le coefficient bistatique moyen s'identifie donc à l'intensité incohérente avec:

$$\langle I_{d1}^{(2)}(\theta) \rangle = I_{f1}^{(2)}(\theta) = \frac{\langle \text{Re}^2 (A_1^{(1)}(k_1 \sin \theta)) \rangle + \langle \text{Im}^2 (A_1^{(1)}(k_1 \sin \theta)) \rangle}{\lambda \cos \theta_i} \cos^2 \theta \quad (\text{II.62})$$



Où :  $-\pi/2 \leq \theta \leq +\pi/2$ .

## **CHAPITRE III**

# **Statistique des champs diffractés et de la différence de phase**

### **III.1. Introduction**

### **III.2. Variances et covariance des parties réelle et imaginaire de l'amplitude de diffraction**

### **III.3. Densités de probabilité**

### **III.4. Caractéristiques statistiques de la différence de phase**

#### **III.4.1. Densité de probabilité conjointe des amplitudes de diffraction dans les deux polarisations**

#### **III.4.2. Densité de probabilité de la différence de phase**

#### **III.4.3. Moyenne et variance de la différence de phase**

#### **III.4.4. Fonction de répartition de la différence de phase**

### **III.5. Bilan**

## CHAPITRE III

### Statistique des champs diffractés, de l'intensité de diffraction et de la différence de phase

#### III.1. Introduction:

L'étude de la diffraction des ondes électromagnétiques par des surfaces rugueuses nécessite la modélisation de ces surfaces. Pour cela, une approche probabiliste est utilisée. La surface est un processus aléatoire vérifiant certaines propriétés statistiques. Pour les surfaces que nous utilisons, la distribution des hauteurs est supposée gaussienne. De plus les surfaces sont stationnaires spatialement, c'est à dire que les propriétés statistiques de la surface sont invariantes par translation des coordonnées spatiales. Bien que les surfaces rugueuses ne soient pas nécessairement gaussiennes, l'utilisation de statistiques gaussiennes permet de réduire la complexité associée au processus aléatoire. La description d'un processus aléatoire gaussien est donnée par sa moyenne et sa fonction de corrélation.

#### Le but de ce chapitre est:

L'étude statistique (densité de probabilité, moyenne et variance) des champs diffractés (amplitude, intensité et phase) et de la différence de phase des champs en polarisation directe (horizontale et verticale).

#### III.2. Variances et covariance des parties réelle et imaginaire de l'amplitude de diffraction :

D'après les relations (II.29), les parties réelle et imaginaire de l'amplitude de diffraction sont données sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[A_1^{(1)}(\alpha)] &= \operatorname{Re}(K_a) \operatorname{Re}[\hat{a}(\gamma)] - \operatorname{Im}(K_a) \operatorname{Im}[\hat{a}(\gamma)] + \operatorname{Re}(K_b) \operatorname{Re}[\hat{b}(\gamma)] - \operatorname{Im}(K_b) \operatorname{Im}[\hat{b}(\gamma)] \\ \operatorname{Im}[A_1^{(1)}(\alpha)] &= \operatorname{Im}(K_a) \operatorname{Re}[\hat{a}(\gamma)] + \operatorname{Re}(K_a) \operatorname{Im}[\hat{a}(\gamma)] + \operatorname{Im}(K_b) \operatorname{Re}[\hat{b}(\gamma)] + \operatorname{Re}(K_b) \operatorname{Im}[\hat{b}(\gamma)] \end{aligned} \quad (\text{III.1})$$

A partir de l'expression (III.1), nous obtenons les variances  $\sigma_R^2$  et  $\sigma_I^2$  et la covariance  $\Gamma_{RI}$  des parties réelle et imaginaire de l'amplitude de diffraction sous les formes suivantes :

$$\begin{aligned}\sigma_R^2 = & \langle \text{Re}^2[A_1^{(1)}(\alpha)] \rangle = \text{Re}^2(K_a) \langle \text{Re}^2(\hat{a}(\gamma)) \rangle + \text{Im}^2(K_a) \langle \text{Im}^2(\hat{a}(\gamma)) \rangle \\ & + \text{Re}^2(K_b) \langle \text{Re}^2(\hat{b}(\gamma)) \rangle + \text{Im}^2(K_b) \langle \text{Im}^2(\hat{b}(\gamma)) \rangle \\ & + 2 \text{Re}(K_a) \text{Re}(K_b) \langle \text{Re}(\hat{a}(\gamma)) \text{Re}(\hat{b}(\gamma)) \rangle \\ & + 2 \text{Im}(K_a) \text{Im}(K_b) \langle \text{Im}(\hat{a}(\gamma)) \text{Im}(\hat{b}(\gamma)) \rangle \\ & + 2 \text{Im}(K_a K_b^*) \langle \text{Re}(\hat{a}(\gamma)) \text{Im}(\hat{b}(\gamma)) \rangle\end{aligned}\quad (\text{III.4})$$

$$\begin{aligned}\sigma_I^2 = & \langle \text{Im}^2[A_1^{(1)}(\alpha)] \rangle = \text{Re}^2(K_a) \langle \text{Im}^2(\hat{a}(\gamma)) \rangle + \text{Im}^2(K_a) \langle \text{Re}^2(\hat{a}(\gamma)) \rangle \\ & + \text{Re}^2(K_b) \langle \text{Im}^2(\hat{b}(\gamma)) \rangle + \text{Im}^2(K_b) \langle \text{Re}^2(\hat{b}(\gamma)) \rangle \\ & + 2 \text{Im}(K_a) \text{Im}(K_b) \langle \text{Re}(\hat{a}(\gamma)) \text{Re}(\hat{b}(\gamma)) \rangle \\ & + 2 \text{Re}(K_a) \text{Re}(K_b) \langle \text{Im}(\hat{a}(\gamma)) \text{Im}(\hat{b}(\gamma)) \rangle \\ & + 2 \text{Im}(K_a K_b^*) \langle \text{Re}(\hat{a}(\gamma)) \text{Im}(\hat{b}(\gamma)) \rangle\end{aligned}\quad (\text{III.5})$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{RI} = & \langle \text{Re}[A_1^{(1)}(\alpha)] \text{Im}[A_1^{(1)}(\alpha)] \rangle = \text{Re}(K_a) \text{Im}(K_a) (\langle \text{Re}^2(\hat{a}(\gamma)) \rangle - \langle \text{Im}^2(\hat{a}(\gamma)) \rangle) \\ & + \text{Re}(K_b) \text{Im}(K_b) (\langle \text{Re}^2(\hat{b}(\gamma)) \rangle - \langle \text{Im}^2(\hat{b}(\gamma)) \rangle) \\ & + \text{Im}(K_a K_b^*) (\langle \text{Re}(\hat{a}(\gamma)) \text{Re}(\hat{b}(\gamma)) \rangle - \langle \text{Im}(\hat{a}(\gamma)) \text{Im}(\hat{b}(\gamma)) \rangle)\end{aligned}\quad (\text{III.6})$$

D'après les calculs présentés dans la référence [17-18], les variances des parties réelle et imaginaire des transformées de Fourier  $\hat{a}(\gamma)$  et  $\hat{b}(\gamma)$  se mettent sous la forme suivante :

### Calcul des variances :

On a :

$$\begin{aligned}\sigma_{Ra}^2 = & \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left(1 - \frac{|\kappa|}{L}\right) R_{aa}(\kappa) \cos \gamma \kappa d\kappa + \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left(1 - \frac{|\kappa|}{L}\right) \sin c \gamma (L - |\kappa|) R_{aa}(\kappa) d\kappa \\ \sigma_{Ia}^2 = & \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left(1 - \frac{|\kappa|}{L}\right) R_{aa}(\kappa) \cos \gamma \kappa d\kappa - \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left(1 - \frac{|\kappa|}{L}\right) \sin c \gamma (L - |\kappa|) R_{aa}(\kappa) d\kappa\end{aligned}\quad (\text{III.7})$$

où  $\text{sinc} x = \sin x / x$ . Nous pouvons par ailleurs montrer que  $\text{Re}[\hat{c}(\gamma)]$  et  $\text{Im}[\hat{c}(\gamma)]$  sont non corrélés :

$$\langle \text{Re}(\hat{c}(\gamma)) \text{Im}(\hat{c}(\gamma)) \rangle = 0 \quad (\text{III.8})$$

Si les surfaces sont corrélées, les covariances associées à  $\hat{a}(\gamma)$  et  $\hat{b}(\gamma)$  sont non nulles avec :

$$\begin{aligned}
\langle \text{Re}(\hat{a}(\gamma)) \text{Re}(\hat{b}(\gamma)) \rangle &= \frac{1}{2} \int_{-L}^{+L} \left(1 - \frac{|x|}{L}\right) \cos \gamma x R_{ab}(x) dx + \frac{1}{2} \int_{-L}^{+L} \left(1 - \frac{|x|}{L}\right) \text{sinc}(\gamma(L - |x|)) R_{ab}(x) dx \\
\langle \text{Im}(\hat{a}(\gamma)) \text{Im}(\hat{b}(\gamma)) \rangle &= \frac{1}{2} \int_{-L}^{+L} \left(1 - \frac{|x|}{L}\right) \cos \gamma x R_{ab}(x) dx - \frac{1}{2} \int_{-L}^{+L} \left(1 - \frac{|x|}{L}\right) \text{sinc}(\gamma(L - |x|)) R_{ab}(x) dx \\
\langle \text{Re}(\hat{a}(\gamma)) \text{Im}(\hat{b}(\gamma)) \rangle &= - \langle \text{Im}(\hat{a}(\gamma)) \text{Re}(\hat{b}(\gamma)) \rangle = \frac{1}{2} \int_{-L}^{+L} \left(1 - \frac{|x|}{L}\right) \sin(\gamma x) R_{ab}(x) dx
\end{aligned}
\tag{III.9}$$

Pour une valeur de  $\alpha$  donnée, les relations (III.4) à (III.5) montrent que les variables aléatoires  $\text{Re}[A_1^{(1)}(\alpha)]$  et  $\text{Im}[A_1^{(1)}(\alpha)]$  présentent, dans le cas général, des variances différentes. La relation (III.6) indique que ces variables aléatoires sont corrélées quelle que soit l'état corrélé ou non corrélé des deux interfaces. En remplaçant (III.4), (III.5), (III.6), (III.8) dans (II.60), nous montrons que l'intensité incohérente dépend aussi de la longueur  $L$  [11] et des fonctions d'autocorrélation et d'intercorrélation :

$$\begin{aligned}
I_f^{(2)}(\theta) &= \frac{\cos^2 \theta}{\lambda \cos \theta_0} \int_{-L}^{+L} \left(1 - \frac{|x|}{L}\right) \left( |K_a|^2 R_{aa}(x) + |K_b|^2 R_{bb}(x) \right) \cos(\gamma x) dx \\
&+ \frac{\cos^2 \theta}{\lambda \cos \theta_0} \int_{-L}^{+L} \left(1 - \frac{|x|}{L}\right) 2 \text{Re}[K_a K_b^* \exp(-j\gamma x)] R_{ab}(x) dx
\end{aligned}
\tag{III.10}$$

Sachant que  $K_{a,b}^{(E//)} = -K_{a,b}^{(H//)}$  pour  $\alpha = \alpha_0 = 0$ , l'intensité incohérente rétrodiffusée en incidence normale présente la même valeur en polarisation E// et H//. Dans le cas de surfaces non corrélées, la fonction d'intercorrélation est nulle et l'expression (III.10) de l'intensité incohérente se simplifie avec  $R_{ab}(x) = 0$ .

### Comportements asymptotiques des variances, de la covariance et de l'intensité incohérente :

D'après (III.9), on démontre qu'en dehors de la réflexion spéculaire  $\gamma \neq 0$  et pour  $L \rightarrow +\infty$ ,

$$\langle \text{Re}^2(\hat{c}(\gamma)) \rangle = \langle \text{Im}^2(\hat{c}(\gamma)) \rangle = \frac{\hat{R}_{cc}(\gamma)}{2}
\tag{III.11}$$

$$\begin{aligned}
\langle \text{Re}(\hat{a}(\gamma)) \text{Re}(\hat{b}(\gamma)) \rangle &= \langle \text{Im}(\hat{a}(\gamma)) \text{Im}(\hat{b}(\gamma)) \rangle = \frac{\hat{R}_{ab}(\gamma) + \hat{R}_{ab}(-\gamma)}{4} \\
\langle \text{Re}(\hat{a}(\gamma)) \text{Im}(\hat{b}(\gamma)) \rangle &= - \langle \text{Im}(\hat{a}(\gamma)) \text{Re}(\hat{b}(\gamma)) \rangle = \frac{\hat{R}_{ab}(\gamma) - \hat{R}_{ab}(-\gamma)}{4j}
\end{aligned}
\tag{III.12}$$

En substituant (III.11) et (III.12) dans (III.4), (III.5) et (III.6), nous démontrons que pour des interfaces corrélées ou non corrélées, les variables aléatoires  $\text{Re}[A_1^{(1)}(\alpha)]$  et  $\text{Im}[A_1^{(1)}(\alpha)]$  sont non corrélées ( $\Gamma_{RI} = 0$ ) pour  $L \rightarrow +\infty$  et présente la même variance :

$$\sigma_R^2 = \sigma_I^2 = \frac{|K_a|^2 \hat{R}_{aa}(\gamma) + |K_b|^2 \hat{R}_{bb}(\gamma)}{2} + \frac{K_a^* K_b \hat{R}_{ab}(\gamma) + K_a K_b^* \hat{R}_{ab}(-\gamma)}{2} \quad (\text{III.13})$$

A partir de (III.11) et compte tenu de la symétrie hermitienne de la fonction  $\hat{R}_{ab}(\alpha)$ , nous montrons que l'intensité incohérente s'exprime sous la forme suivante :

$$I_f^{(2)}(\theta) = \frac{|K_a|^2 \hat{R}_{aa}(\gamma) + |K_b|^2 \hat{R}_{bb}(\gamma)}{\lambda \cos \theta_0} \cos^2 \theta + \frac{\text{Re}(K_a^* K_b \hat{R}_{ab}(\gamma))}{\lambda \cos \theta_0} \cos^2 \theta \quad (\text{III.14})$$

### III.3. Densités de probabilité :

Nous supposons que les densités de probabilité des hauteurs des deux interfaces sont des gaussiennes. Le caractère gaussien est conservé par opération linéaire. La transformée de Fourier est une opération linéaire donc les transformées de Fourier des fonctions aléatoires  $a(x)$  et  $b(x)$  sont aussi des processus gaussiens. La somme de deux processus gaussiens est un processus gaussien. En conséquence, les amplitudes de diffraction sont des processus gaussiens de la variable  $\alpha$ . Les deux variables aléatoires centrées  $\text{Re}[A_1^{(1)}(\alpha)]$  et  $\text{Im}[A_1^{(1)}(\alpha)]$  sont, dans le cas général, corrélées et présentent des variances différentes. La densité de probabilité conjointe est donc donnée par l'expression suivante.

$$p_{RI}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_R\sigma_I\sqrt{(1-\rho^2)}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{x^2}{\sigma_R^2} - 2\rho\frac{xy}{\sigma_R\sigma_I} + \frac{y^2}{\sigma_I^2}\right)\right) \quad (\text{III.15})$$

où  $\rho$  est le coefficient de corrélation entre partie réelle et imaginaire:

$$\rho = \frac{\Gamma}{\sigma_R\sigma_I} \quad (\text{III.16})$$

En passant en coordonnées polaires, nous obtenons la densité de probabilité conjointe des variables aléatoires  $M$  et  $\Psi$  :

$$\begin{aligned} \text{Re}[A_1(\alpha)] &= M \cos \Psi \\ \text{Im}[A_1(\alpha)] &= M \sin \Psi \end{aligned} \quad (\text{III.17})$$

$$p_{M\Psi}(m, \phi) = m p_{RI}(m \cos \phi, m \sin \phi) \quad (\text{III.18})$$

En intégrant par rapport à  $\phi$ , on obtient la densité de probabilité du module de l'amplitude définie pour  $m \geq 0$  :

$$p_M(m) = \frac{m}{\sigma_R \sigma_I \sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{m^2}{4(1-\rho^2)} \left(\frac{1}{\sigma_R^2} + \frac{1}{\sigma_I^2}\right)\right) \times I_0\left(\frac{m^2}{4(1-\rho^2)} \sqrt{\left(\frac{1}{\sigma_R^2} - \frac{1}{\sigma_I^2}\right)^2 + 4\frac{\rho^2}{\sigma_R^2 \sigma_I^2}}\right) \quad (\text{III.19})$$

où  $I_0$  la fonction de Bessel modifiée d'ordre zéro. Pour des surfaces corrélées ou non corrélées, le module de l'amplitude de diffraction obéit donc à une loi de Hoyt [16]. La densité de probabilité  $p_{I_d}(w)$  de l'intensité diffractée se déduit de la densité de probabilité du module  $p_M(m)$  par la relation suivante :

$$p_{I_d}(w) = \frac{1}{2\sqrt{w} \cos^2 \theta / \lambda \cos \theta_0} p_M(\sqrt{w} \lambda \cos \theta_0 / \cos^2 \theta) \quad \text{avec } w \geq 0 \quad (\text{III.20})$$

La densité de probabilité de la phase est obtenue par intégration de  $p_{M\psi}(m, \phi)$  par rapport à  $m$  de 0 à  $+\infty$ .

$$p_\phi(\phi) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\frac{\sigma_I}{\sigma_R} \cos^2 \phi - \rho \sin 2\phi + \frac{\sigma_R}{\sigma_I} \sin^2 \phi} \quad (\text{III.21})$$

### Comportements asymptotiques des densités de probabilité :

Si  $L \rightarrow +\infty$ , la covariance et le coefficient de corrélation sont nuls et les variances  $\sigma_R^2$  et  $\sigma_I^2$  sont égales. En conséquence, le module du champ diffracté à grande distance suit une loi de Rayleigh, l'intensité de diffraction suit une loi exponentielle et la phase est uniforme sur  $[-\pi; \pi]$ . Ce résultat est établi pour des interfaces corrélées ou non corrélées. La forme des densités de probabilité ne permet donc pas de différencier l'état corrélé de l'état non corrélé. De plus, dans la référence [21], le champ diffracté par une simple interface obéit aux mêmes lois de probabilité que le champ diffracté par deux interfaces (seuls changent les paramètres de ces lois). La forme des densités de probabilité ne permet pas non plus de différencier la simple surface du milieu stratifié.

$$p_M(m) = \frac{m}{\sigma_R^2} \exp\left(-\frac{m^2}{2\sigma_R^2}\right) \quad \text{Pour } m \geq 0 \quad (\text{III.22})$$

$$p_{I_d}(w) = \frac{\lambda \cos \theta_0}{2\sigma_R^2 \cos^2 \theta} \exp\left(-\frac{w \lambda \cos \theta_0}{2\sigma_R^2 \cos^2 \theta}\right) \text{ Pour } w \geq 0 \quad (\text{III.23})$$

$$p_\phi(\phi) = \frac{1}{2\pi} \text{ pour } \phi \in [-\pi; \pi] \quad (\text{III.24})$$

### III.3. Caractéristiques statistiques de la différence de phase

#### III.3.1. Densité de probabilité conjointe des amplitudes de diffraction dans les deux polarisations

Comme dans le sous chapitre III.2, nous supposons que les densités de probabilité des hauteurs des deux interfaces sont des gaussiennes. Le caractère gaussien est conservé par opération linéaire. La transformée de Fourier est une opération linéaire donc les transformées de Fourier des fonctions aléatoires  $a(x)$  et  $b(x)$  sont aussi des processus gaussiens. La somme de deux processus gaussiens est un processus gaussien. En conséquence, les amplitudes de diffraction  $\hat{A}_1^{(1)}(\alpha)$  sont des processus gaussiens de la variable  $\alpha$ . D'après les parties réelle et imaginaire de l'amplitude de diffraction à l'ordre 1 pour les deux cas de polarisation (horizontale et verticale) sont données sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \text{Re}[\hat{A}_1^{(1)}(\alpha)] &= \text{Re}(K_a) \text{Re}[\hat{a}(\gamma)] - \text{Im}(K_a) \text{Im}[\hat{a}(\gamma)] + \text{Re}(K_b) \text{Re}[\hat{b}(\gamma)] - \text{Im}(K_b) \text{Im}[\hat{b}(\gamma)] \\ \text{Im}[\hat{A}_1^{(1)}(\alpha)] &= \text{Im}(K_a) \text{Re}[\hat{a}(\gamma)] + \text{Re}(K_a) \text{Im}[\hat{a}(\gamma)] + \text{Im}(K_b) \text{Re}[\hat{b}(\gamma)] + \text{Re}(K_b) \text{Im}[\hat{b}(\gamma)] \end{aligned} \quad (\text{III.25})$$

Où

$$\gamma = \alpha - \alpha_0 = k_1 (\sin \theta - \sin \theta_0) \quad (\text{III.26})$$

Pour la suite, nous posons :

$$R_E(\alpha) = \text{Re}[\hat{A}_{1,E}^{(1)}(\alpha)] ; I_E(\alpha) = \text{Im}[\hat{A}_{1,E}^{(1)}(\alpha)] ; R_H(\alpha) = \text{Re}[\hat{A}_{1,H}^{(1)}(\alpha)] ; I_H(\alpha) = \text{Im}[\hat{A}_{1,H}^{(1)}(\alpha)] \quad (\text{III.27})$$

Puisque  $\langle a(x) \rangle = \langle b(x) \rangle = 0$ , nous déduisons que les variables aléatoires  $R_{E,H}(\alpha)$  et  $I_{E,H}(\alpha)$  sont centrées :

$$\langle R_{E,H}(\alpha) \rangle = \langle I_{E,H}(\alpha) \rangle = 0 \quad (\text{III.28})$$

Pour  $\alpha$  fixée, les variables  $R_E(\alpha)$ ,  $R_H(\alpha)$ ,  $I_E(\alpha)$  et  $I_H(\alpha)$  obéissent à une densité de probabilité conjointe gaussienne :



$$p_{R_E I_E R_H I_H}(a, b, c, d) = \frac{1}{4\pi^2 \sqrt{\det(\Gamma)}} \exp\left(-\frac{1}{2}(a, b, c, d) \Gamma^{-1} (a, b, c, d)^T\right) \quad (\text{III.29})$$

où  $\Gamma$  est la matrice de covariance :

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \sigma_{R_E}^2 & \Gamma_{R_E I_E} & \Gamma_{R_E R_H} & \Gamma_{R_E I_H} \\ \Gamma_{R_E I_E} & \sigma_{I_E}^2 & \Gamma_{I_E R_H} & \Gamma_{I_E I_H} \\ \Gamma_{R_E R_H} & \Gamma_{I_E R_H} & \sigma_{R_H}^2 & \Gamma_{R_H I_H} \\ \Gamma_{R_E I_H} & \Gamma_{I_E I_H} & \Gamma_{R_H I_H} & \sigma_{I_H}^2 \end{pmatrix} \quad (\text{III.30})$$

Pour une longueur de déformation finie, d'après la référence [20], la partie réelle et la partie imaginaire de l'amplitude dans une polarisation donnée sont des variables aléatoires gaussiennes centrées, corrélées et de variances différentes. Le module de l'amplitude de diffraction suit une loi de Hoyt et la phase n'est pas uniforme sur  $[-\pi, +\pi[$ . Mais, pour une longueur infinie et dans une polarisation donnée, les parties réelle et imaginaire de l'amplitude de diffraction sont non corrélées et de mêmes variances. Le module obéit alors à une loi de Rayleigh et la phase est uniforme quel que soit l'état corrélé ou non corrélé deux fonctions  $a(x)$  et  $b(x)$ .

Afin de déterminer l'expression analytique de la distribution de la différence de phase des amplitudes de diffraction associées aux deux polarisations, nous considérons une longueur de déformation infinie et nous avons, d'après les références [20] et [21] :

$$\sigma_{R_E}^2(\alpha) = \sigma_{I_E}^2(\alpha) = \frac{|K_{a,E}(\alpha)|^2 \hat{R}_{aa}(\alpha - \alpha_0) + |K_{b,E}(\alpha)|^2 \hat{R}_{bb}(\alpha - \alpha_0)}{2} + \text{Re}\left[K_{a,E}^*(\alpha) K_{b,E}(\alpha) \hat{R}_{ab}(\alpha - \alpha_0)\right] \quad (\text{III.31})$$

$$\sigma_{R_H}^2(\alpha) = \sigma_{I_H}^2(\alpha) = \frac{|K_{a,H}(\alpha)|^2 \hat{R}_{aa}(\alpha - \alpha_0) + |K_{b,H}(\alpha)|^2 \hat{R}_{bb}(\alpha - \alpha_0)}{2} + \text{Re}\left[K_{a,H}^*(\alpha) K_{b,H}(\alpha) \hat{R}_{ab}(\alpha - \alpha_0)\right] \quad (\text{III.32})$$

$$\Gamma_{R_E I_E} = \Gamma_{R_H I_H} = 0 \quad (\text{III.33})$$

En s'appuyant sur les calculs présentés dans la référence [20], nous dérivons les expressions des covariances  $\Gamma_{R_E R_H}$ ,  $\Gamma_{R_E I_H}$ ,  $\Gamma_{I_E R_H}$  et  $\Gamma_{I_E I_H}$  et démontrons que pour une longueur infinie les variables aléatoires  $R_E(\alpha)$  et  $I_E(\alpha)$  sont corrélées avec les variables  $R_H(\alpha)$  et  $I_H(\alpha)$ :

$$\begin{aligned} \Gamma_{R_E R_H} &= \frac{1}{4} \left( \operatorname{Re} \left( K_{A,E}^*(\alpha) K_{A,H}(\alpha) \right) \hat{R}_{aa}(\alpha - \alpha_0) + \operatorname{Re} \left( K_{B,E}^*(\alpha) K_{B,H}(\alpha) \right) \hat{R}_{bb}(\alpha - \alpha_0) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \left( K_{A,E}^*(\alpha) K_{B,H}(\alpha) + K_{A,H}^*(\alpha) K_{B,E}(\alpha) \right) \hat{R}_{ab}(\alpha - \alpha_0) \right) \end{aligned} \quad (\text{III.34})$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{R_E I_H} &= \frac{1}{4} \left( \operatorname{Im} \left( K_{A,E}^*(\alpha) K_{A,H}(\alpha) \right) \hat{R}_{aa}(\alpha - \alpha_0) + \operatorname{Im} \left( K_{B,E}^*(\alpha) K_{B,H}(\alpha) \right) \hat{R}_{bb}(\alpha - \alpha_0) \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left( \left( K_{A,E}^*(\alpha) K_{B,H}(\alpha) - K_{A,H}^*(\alpha) K_{B,E}(\alpha) \right) \hat{R}_{ab}(\alpha - \alpha_0) \right) \end{aligned} \quad (\text{III.35})$$

$$\Gamma_{I_E I_H} = \Gamma_{R_E R_H} \quad (\text{III.36})$$

$$\Gamma_{I_E R_H} = -\Gamma_{R_E I_H} \quad (\text{III.37})$$

Dans le cas  $L \rightarrow +\infty$ , la matrice de covariance présente donc une expression simplifiée et s'écrit :

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \sigma_{R_E}^2 & 0 & \Gamma_{R_E R_H} & \Gamma_{R_E I_H} \\ 0 & \sigma_{R_E}^2 & -\Gamma_{R_E I_H} & \Gamma_{R_E R_H} \\ \Gamma_{R_E R_H} & -\Gamma_{R_E I_H} & \sigma_{R_H}^2 & 0 \\ \Gamma_{R_E I_H} & \Gamma_{R_E R_H} & 0 & \sigma_{R_H}^2 \end{pmatrix} \quad (\text{III.38})$$

On en déduit l'expression de l'inverse de la matrice de covariance :

$$\Gamma^{-1} = \frac{1}{\sqrt{\det(\Gamma)}} \begin{pmatrix} \sigma_{R_H}^2 & 0 & -\Gamma_{R_E R_H} & -\Gamma_{R_E I_H} \\ 0 & \sigma_{R_H}^2 & \Gamma_{R_E I_H} & -\Gamma_{R_E R_H} \\ -\Gamma_{R_E R_H} & \Gamma_{R_E I_H} & \sigma_{R_E}^2 & 0 \\ -\Gamma_{R_E I_H} & -\Gamma_{R_E R_H} & 0 & \sigma_{R_E}^2 \end{pmatrix} \quad (\text{III.39})$$

Où

$$\sqrt{\det(\Gamma)} = \left| \sigma_{R_E}^2 \sigma_{R_H}^2 - (\Gamma_{R_E R_H})^2 - (\Gamma_{R_E I_H})^2 \right| = \sigma_{R_E}^2 \sigma_{R_H}^2 |1 - r^2| \quad (\text{III.40})$$

et

$$r = \sqrt{\frac{\Gamma_{R_E R_H}^2 + \Gamma_{R_E I_H}^2}{\sigma_{R_E}^2 \sigma_{R_H}^2}} \quad (\text{III.41})$$

En passant en coordonnées polaires,

$$R_E = M_E \cos \Phi_E; I_E = M_E \sin \Phi_E \quad (\text{III.42})$$

$$R_H = M_H \cos \Phi_H; I_H = M_H \sin \Phi_H \quad (\text{III.43})$$

où  $M_H, \Phi_H$  représentent le module et la phase de  $\hat{A}_{1,E}^{(1)}(\alpha)$  et  $M_H, \Phi_H$  représentent le module et la phase de  $\hat{A}_{1,H}^{(1)}(\alpha)$  respectivement.

Nous obtenons la densité de probabilité conjointe des variables aléatoires  $M_E, \Phi_E, M_H$  et  $\Phi_H$  :

$$p_{M_E \Phi_E M_H \Phi_H} (m_E, \phi_E, m_H, \phi_H) = m_E m_H p_{R_E I_E R_H I_H} (m_E \cos \phi_E, m_E \sin \phi_E, m_H \cos \phi_H, m_H \sin \phi_H) \quad (\text{III.44})$$

### III.3.2. Densité de probabilité de la différence de phase

Pour déterminer la densité conjointe des phases, on intègre la loi de probabilité  $p_{M_E \Phi_E M_H \Phi_H}$  sur les variables  $m_E$  et  $m_H$  de 0 à l'infini :

$$p_{\phi_E \phi_H} (\phi_E, \phi_H) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{m_E m_H}{4\pi^2 \sqrt{\det(\Gamma)}} \exp \left( -\frac{\sigma_{R_H}^2 \sigma_{R_E}^2}{2\sqrt{\det(\Gamma)}} \left( \frac{m_E^2}{\sigma_{R_E}^2} + 2\zeta m_E m_H + \frac{m_H^2}{\sigma_{R_H}^2} \right) \right) dm_E dm_H \quad (\text{III.45})$$

où

$$\zeta = \frac{\Gamma_{R_E I_H} \sin(\phi_E - \phi_H) - \Gamma_{R_E R_H} \cos(\phi_E - \phi_H)}{\sigma_{R_H}^2 \sigma_{R_E}^2}$$

La densité de probabilité de la différence de phase  $p_{\Delta\phi}(\Delta\Phi = \Phi_E - \Phi_H)$  se déduit de la densité de probabilité conjointe des phases  $p_{\phi_E \phi_H}(\phi_E, \phi_H)$  par la relation suivante :

$$p_{\Delta\phi}(\Delta\phi) = \int_{-\pi}^{+\pi} p_{\phi_E \phi_H}(\Delta\Phi + \phi_H, \phi_H) d\phi_H \quad (\text{III.46})$$

Tous calculs faits, nous obtenons :

$$p_{\Delta\phi}(\Delta\phi) = \frac{1}{2\pi} \frac{1-r^2}{1-r^2 \cos^2(\Delta\phi + \psi)} \left( 1 + \frac{r \cos(\Delta\phi + \psi)}{\sqrt{1-r^2 \cos^2(\Delta\phi + \psi)}} \left( \frac{\pi}{2} + \arctan \frac{r \cos(\Delta\phi + \psi)}{\sqrt{1-r^2 \cos^2(\Delta\phi + \psi)}} \right) \right) \quad (\text{III.47})$$

où

$$\psi = \text{tg}^{-1} \left( \frac{\Gamma_{R_E I_H}}{\Gamma_{R_E R_H}} \right) \quad (\text{III.48})$$

### III.3.3. Moyenne et variance de la différence de phase

Après plusieurs manipulations mathématiques, nous démontrons que la valeur moyenne de la différence de phase est donnée par l'expression suivante :

$$\langle \Delta\phi \rangle = \int_{-\pi}^{+\pi} u p_{\Delta\phi}(u) du = \frac{r \sin(\psi)}{\sqrt{1-r^2 \cos^2(\psi)}} \left( \arcsin(r \cos(\psi)) - \frac{\pi}{2} \right) \quad (\text{III.49})$$

Nous n'avons pas établi la formule analytique donnant la variance  $\sigma_{\Delta\phi}^2$  de la différence de phase. Cette variance est calculée numériquement par la relation suivante :

$$\sigma_{\Delta\phi}^2 = \int_{-\pi}^{+\pi} u^2 p_{\Delta\phi}(u) du - \langle \Delta\phi \rangle^2 \quad (\text{III.50})$$

### III.3.4. Fonction de répartition de la différence de phase

La fonction de répartition est définie par :

$$F_{\Delta\Phi}(\Delta\phi) = \text{Pr ob} \{ \Delta\Phi \leq \Delta\phi \} = \int_{-\pi}^{\Delta\phi} P_{\Delta\Phi}(u) du \quad (\text{III.51})$$

Tous calculs faits, nous obtenons :

$$F_{\Delta\Phi}(\Delta\phi) = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{r \sin(\Delta\phi + \psi)}{\sqrt{1 - r^2 \cos^2(\Delta\phi + \psi)}} \left( \frac{\pi}{2} + \arcsin(r \cos(\Delta\phi + \psi)) \right) + \frac{r \sin(\psi)}{\sqrt{1 - r^2 \cos^2(\psi)}} \left( \frac{\pi}{2} - \arcsin(r \cos(\psi)) \right) + (\Delta\phi + \pi) \right] \quad (\text{III.52})$$

Nous pouvons vérifier que :  $F_{\Delta\Phi}(\pi) = 1$  et  $F_{\Delta\Phi}(-\pi) = 0$ .

### III.5. Bilan

La forme de la densité de probabilité est définie par le coefficient  $r$  qui est compris entre 0 et 1. Pour  $r = 0$ , la différence de phase est une variable aléatoire uniforme et cette configuration se produit si les covariances  $\Gamma_{R_E R_H}$  et  $\Gamma_{R_E I_H}$  sont nulles. Pour  $r = 1$ , la différence de phase n'est plus une variable aléatoire et est égale à l'angle  $-\psi$ . Le cas  $r = 1$  peut se produire pour des fonctions aléatoires  $a(x)$  et  $b(x)$  corrélées ou non corrélées. Pour des interfaces proportionnelles en tout point ou des surfaces présentant un paramètre  $q$  égal à 1, la différence de phase est constante quels que soient les angles d'incidence et d'observation. Dans la mesure où la différence de phase pour une seule interface est une constante, la relation  $r = 1$  ne permet pas de conclure sur la présence de plusieurs couches. Par contre, dans le cadre de la méthode des petites perturbations, si  $r \neq 1$ , nous pouvons conclure sur la présence de plusieurs couches.

## **CHAPITRE IV :**

### **Simulations**

#### **IV.1. Introduction**

##### **IV.1. Coefficient $r$ et phase $\psi$**

#### **IV.2. Caractéristiques statistiques de la différence de phase**

##### **IV.2.1. Distribution de la différence de phase**

##### **IV.2.2. Moyenne et variance de la différence de phase**

## CHAPITRE IV :

### Simulations

#### IV.1. Introduction

Pour toutes les simulations, l'étude est faite en rétrodiffusion ( $\theta = -\theta_0$ ), la fréquence est en bande L et la longueur d'onde  $\lambda$  est égale à 20 cm. Les deux interfaces sont caractérisées par des hauteurs quadratiques moyennes  $\sigma_a = 0.7$  cm et  $\sigma_b = 1$  cm, des longueurs de corrélation  $l_a = 5$  cm et  $l_b = 4$  cm. D'une simulation à une autre, nous modifions les permittivités relatives  $\varepsilon_{r2}$  et  $\varepsilon_{r3}$  des deux milieux, le paramètre de mélange  $q$ , l'angle d'incidence  $\theta_0$  et l'épaisseur  $u_0$  entre les interfaces. Les configurations étudiées représentent, en première approche, un sol agricole où le milieu 2 définit l'humidité en surface du sol, un sol recouvert de neige et une surface de granit recouvert de sédiment [22-24].

Nous considérons donc trois configurations différentes :

- Un sol agricole où les permittivités relatives  $\varepsilon_{r2}$  et  $\varepsilon_{r3}$  des deux milieux sont fixées à  $6.26 - 0.52j$  et  $11.3 - 1.27j$ . Ces permittivités correspondent à des sols agricoles présentant des taux d'humidité de 15% et 25% [22].
- Un sol recouvert de neige où les permittivités relatives  $\varepsilon_{r2}$  et  $\varepsilon_{r3}$  des deux milieux sont fixées à  $2 - 0.02j$  et  $19.2 - 2.41j$  présentant un taux d'humidité de 35% pour la neige [22].
- Une surface de granite recouvert de sédiment où les permittivités relatives  $\varepsilon_{r2}$  et  $\varepsilon_{r3}$  des deux milieux sont fixées à  $2.5 - 0.01j$  et 8 [23-24].

#### IV.1. Coefficient $r$ et phase $\psi$

Les figures IV.1a et IV.1b représentent les variations du coefficient  $r$  et de la phase  $\psi$  en fonction de l'épaisseur  $u_0$  pour l'angle d'incidence  $\theta_0 = 70^\circ$ . Comme les milieux 2 et 3 sont des milieux à pertes, les courbes du coefficient  $r$  et de la phase  $\psi$  sont des fonctions oscillantes présentant un certain amortissement. En remarque que la valeur de  $r$  est proche de 1 pour le cas d'un sol agricole et loin de 1 pour le cas d'un sol recouvert de neige. En peut conclure que la valeur  $r$  est proche de 1 lorsque les permittivités relatives  $\varepsilon_{r2}$  et  $\varepsilon_{r3}$  des deux

milieux sont très proche et est s'éloigne de 1 dans le cas contraire. En accord avec la théorie, les oscillations diminuent lorsque l'épaisseur augmente et le coefficient  $r$  tend vers la valeur 1 plus rapidement pour un milieu 2 avec pertes et la phase  $\psi$  vers la valeur 0 pour  $u_0 \gg \lambda$ , on s'approche du cas d'une seule interface.

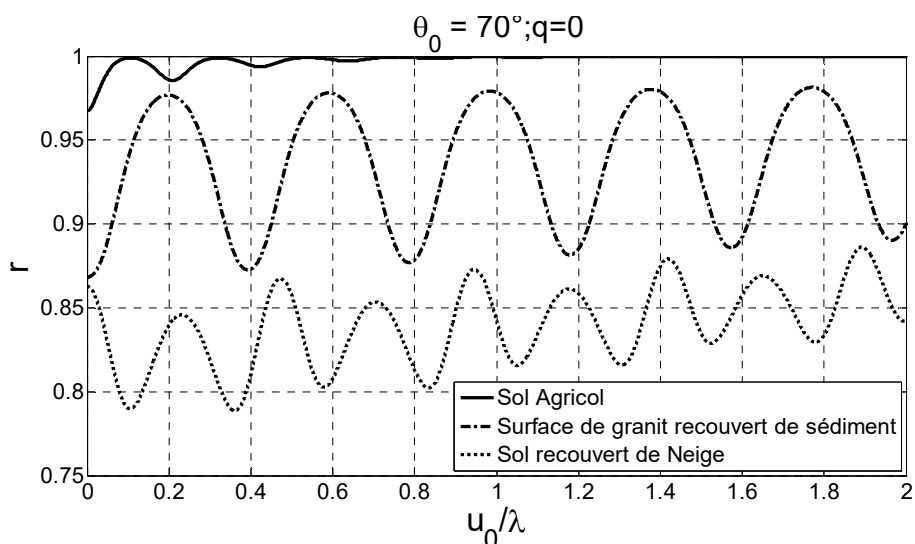


Figure IV.1a. Le coefficient  $r$  en fonction de  $u_0$

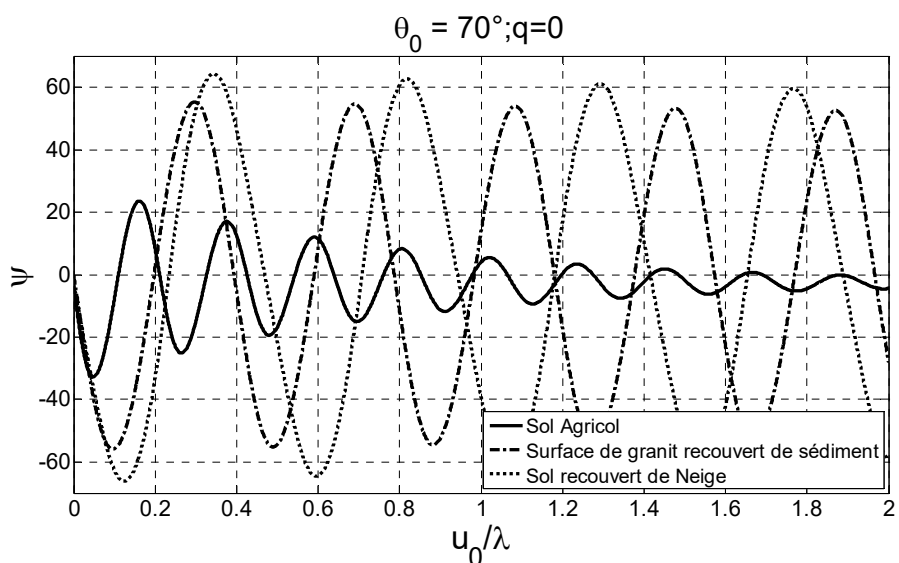


Figure IV.1b. La phase  $\psi$  en fonction  $u_0$

Les figures IV.2a et IV.2b représentent les variations du coefficient  $r$  et de la phase  $\psi$  en fonction du paramètre de corrélation  $q$ . Pour les trois configurations, la valeur de  $r$  augmente avec  $q$  pour atteindre la valeur limite 1 qui correspond à deux interfaces totalement

corrélées. La phase  $\psi$  est moins sensible aux variations du paramètre du mélange  $q$  sauf dans le cas d'un sol recouvert de neige.

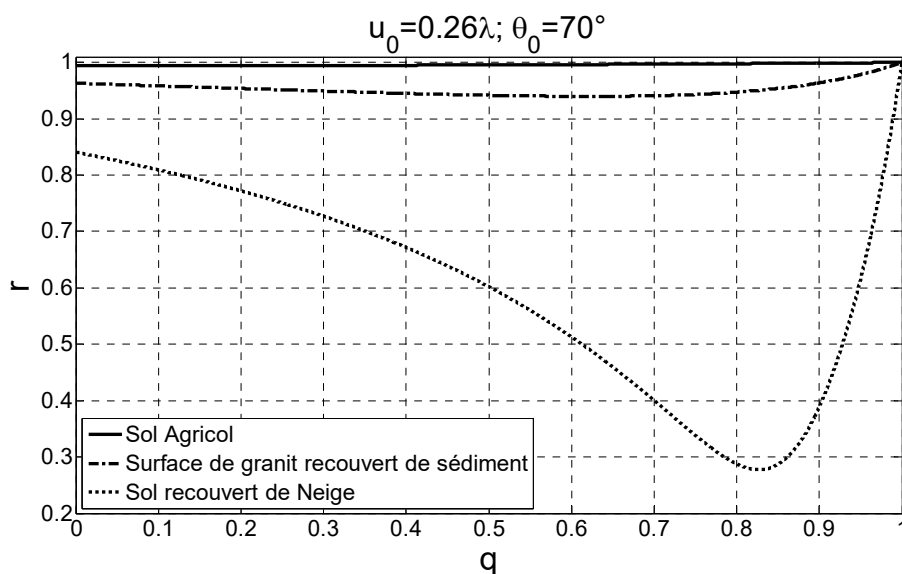


Figure IV.2a. Le coefficient  $r$  en fonction de  $q$

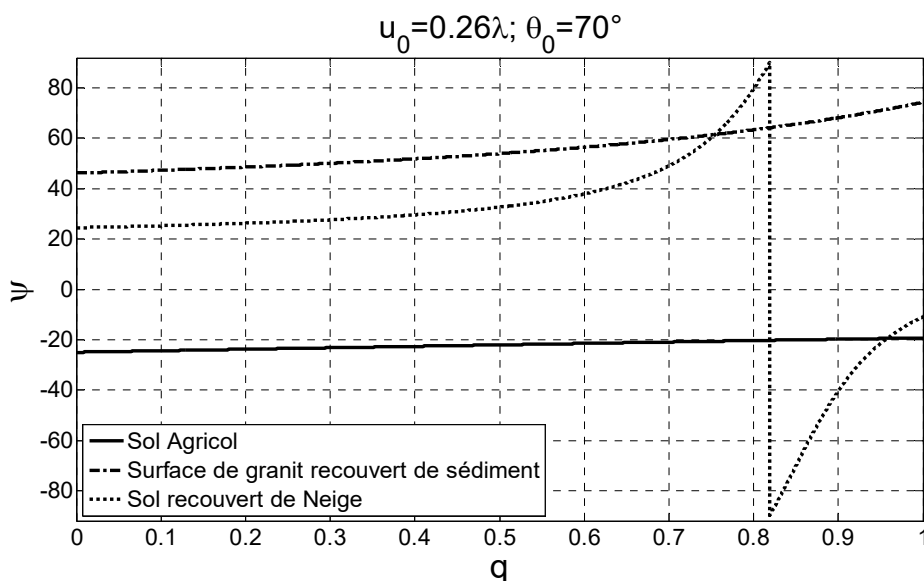


Figure IV.2b. La phase  $\psi$  en fonction  $q$

Les figures IV.3a et IV.3b représentent les variations du coefficient  $r$  et de la phase  $\psi$  en fonction de l'angle d'incidence  $\theta_0$  pour les trois configurations considérées. Pour une configuration donnée,  $r$  diminue lorsque l'angle d'incidence  $\theta_0$  augmente. La valeur de  $r$  est proche de 1 pour le cas d'un sol agricole et loin de 1 pour le cas d'un sol recouvert de neige. Pour les trois configurations, la phase  $\psi$  est nulle pour une incidence normale et elle



augmente pour les deux cas d'un sol recouvert de neige et le cas d'une surface de granit recouvert de sédiment par contre elle diminue dans le d'un sol agricole.

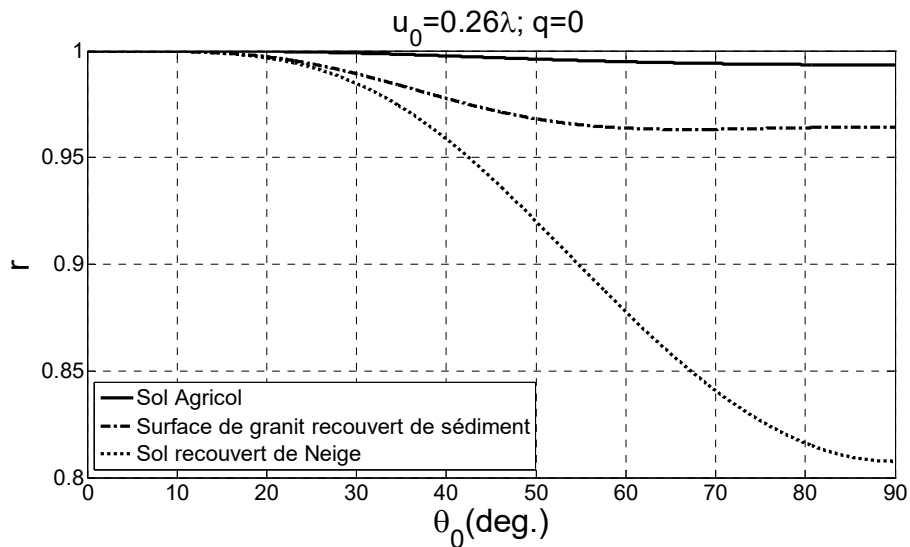


Figure IV.3a. Le coefficient  $r$  en fonction de  $\theta_0$

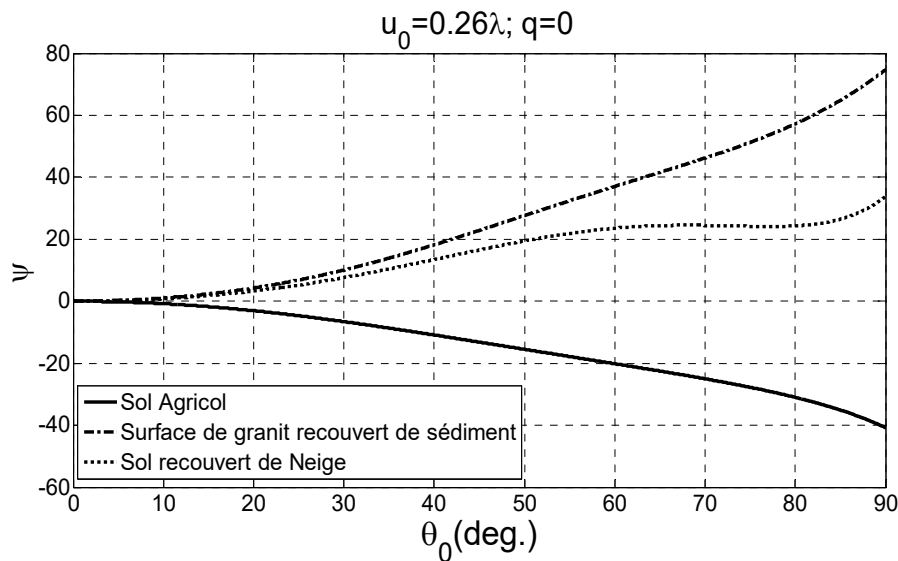


Figure IV.3b. La phase  $\psi$  en fonction  $\theta_0$

## IV.2. Caractéristiques statistiques de la différence de phase

### IV.2.1. Distribution de la différence de phase

Les figures IV.4a et IV.4b représentent la densité de probabilité et la fonction de répartition de la différence de phase pour les trois configurations avec,  $u_0 = 0.26\lambda$ ,  $\theta_0 = 70^\circ$  et  $q = 0$ . On remarque que la densité de probabilité passe par un maximum pour les trois configurations à la valeur de  $\Delta\phi = -\psi$ . Ce maximum est nettement supérieur dans le cas d'un

sol agricole par rapport aux deux autres configurations ce qui correspond à un écart type inférieur. La fonction de répartition tend vers à un, plus rapide pour surface de granite recouvert de neige par rapport aux autres cas.

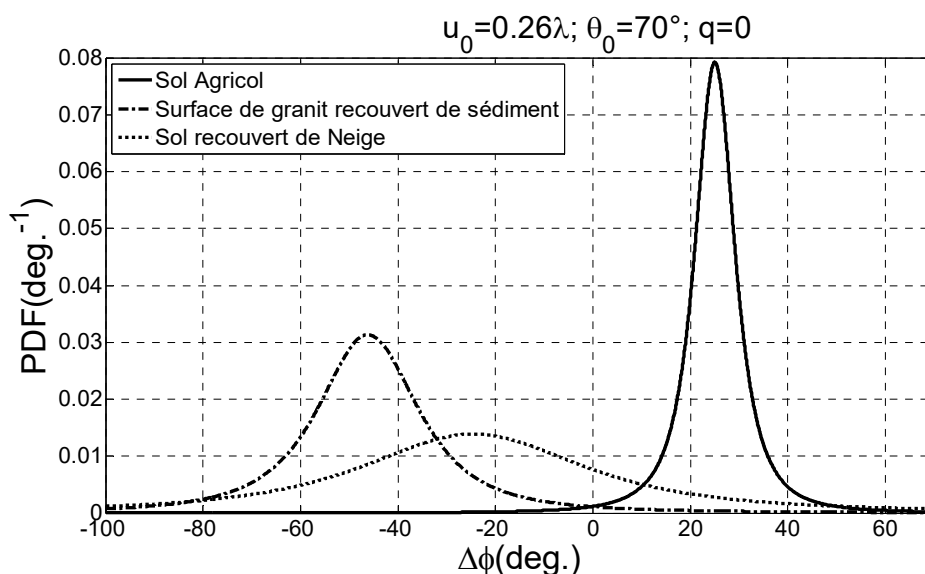


Figure IV.4a. Densité de probabilité

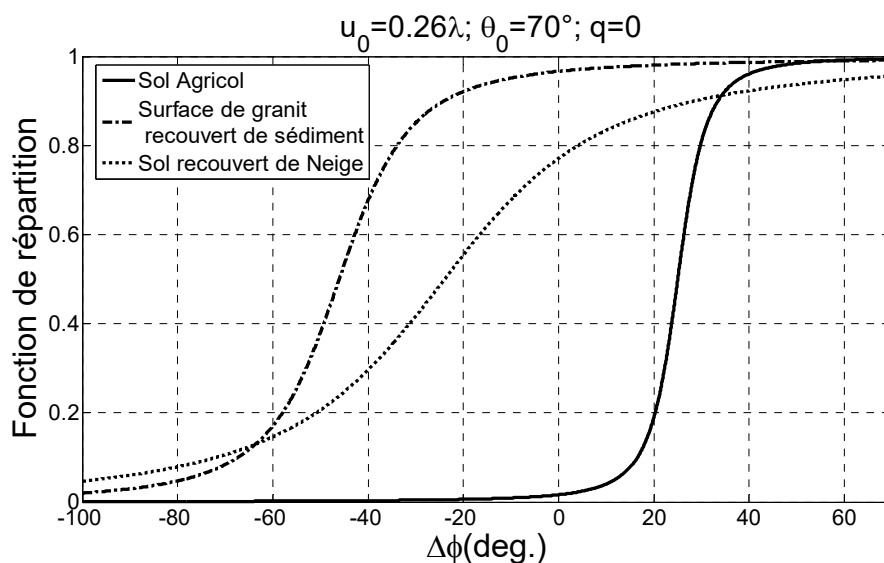


Figure IV.4b. Fonction de répartition

#### IV.2.2. Moyenne et variance de la différence de phase

Les courbes de la figure IV.5a et IV.5b représentent les variations de la moyenne et de l'écart type de la différence de phase en fonction du paramètre de mélange  $q$ , pour les trois

configurations avec,  $u_0 = 0.26\lambda$  et  $\theta_0 = 70^\circ$ . Les courbes de la moyennes sont similaires au signe près au courbes de la phase  $\psi$  (figure IV.2b). On constate que l'écart type tend vers 0 pour les trois configurations avec  $q = 1$  qui représente des interface totalement corrélés.

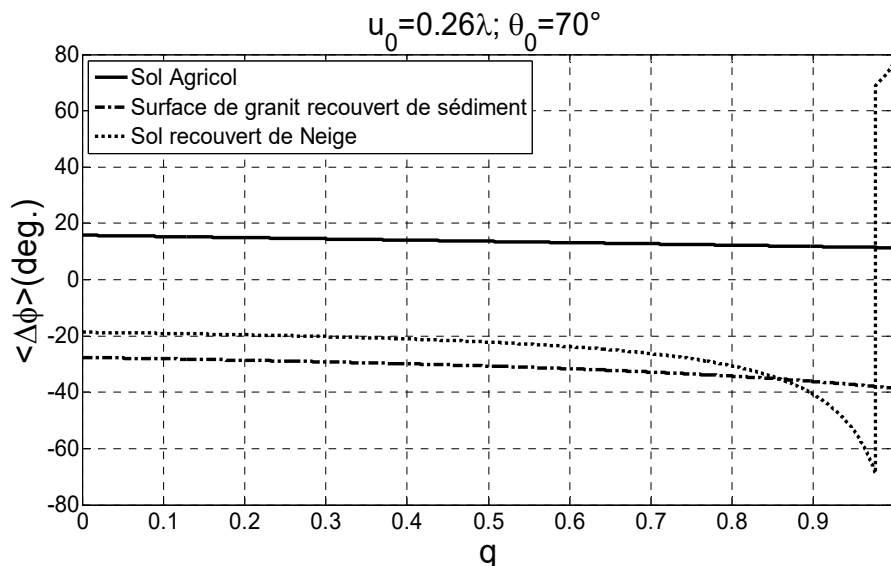


Figure IV.5a. La moyenne en fonction de  $q$

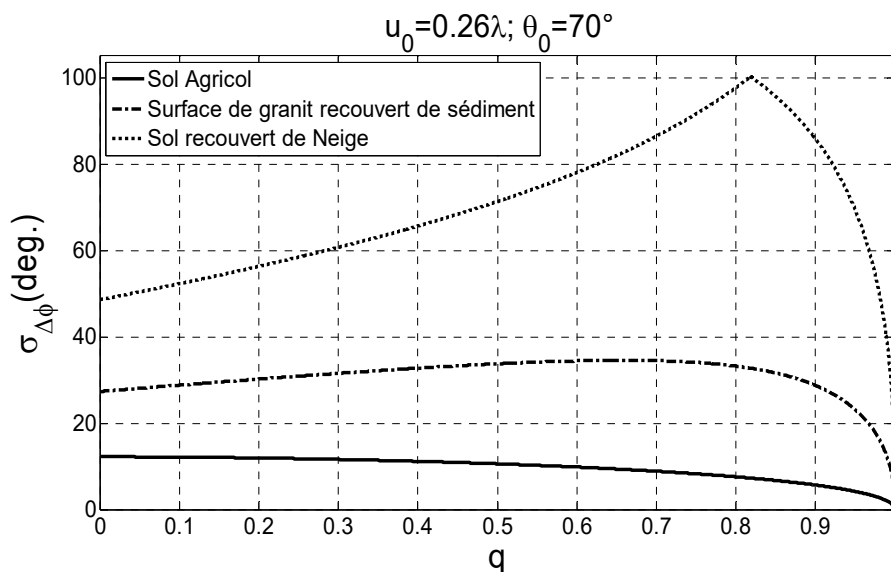


Figure IV.5b. L'écart type en fonction de  $q$

Les courbes de la figure IV.6a et IV.6b représentent les variations de la moyenne et de l'écart type de la différence de phase en fonction de l'angle d'observation  $\theta_0$  pour les trois configurations avec,  $u_0 = 0.26\lambda$  et  $q = 0$ . On constate que les valeurs de la moyenne et de

l'écart type sont nulles pour  $\theta_0 = 0$ . Les courbes de la moyennes sont similaires au signe près au courbes de la phase  $\psi$  (figure IV.3b).

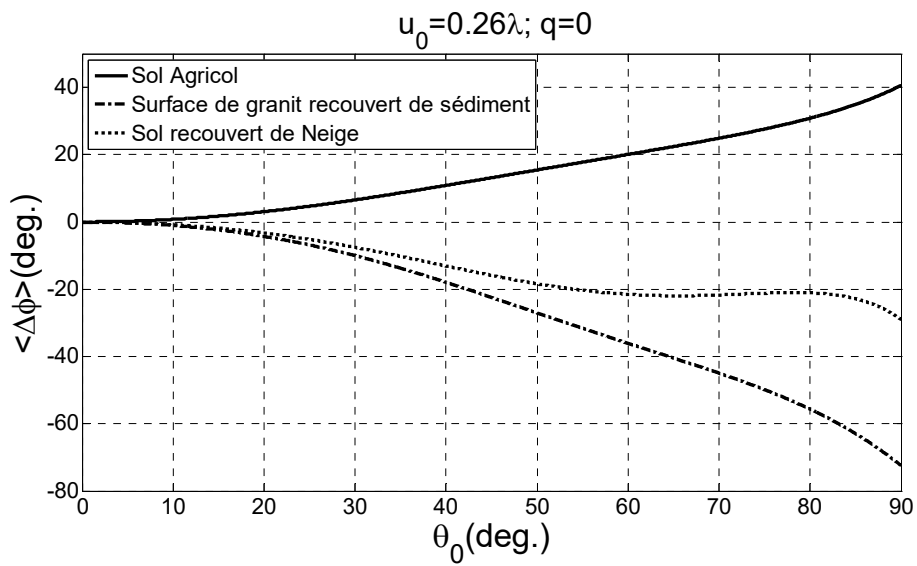


Figure IV.6a. La moyenne en fonction de  $\theta_0$

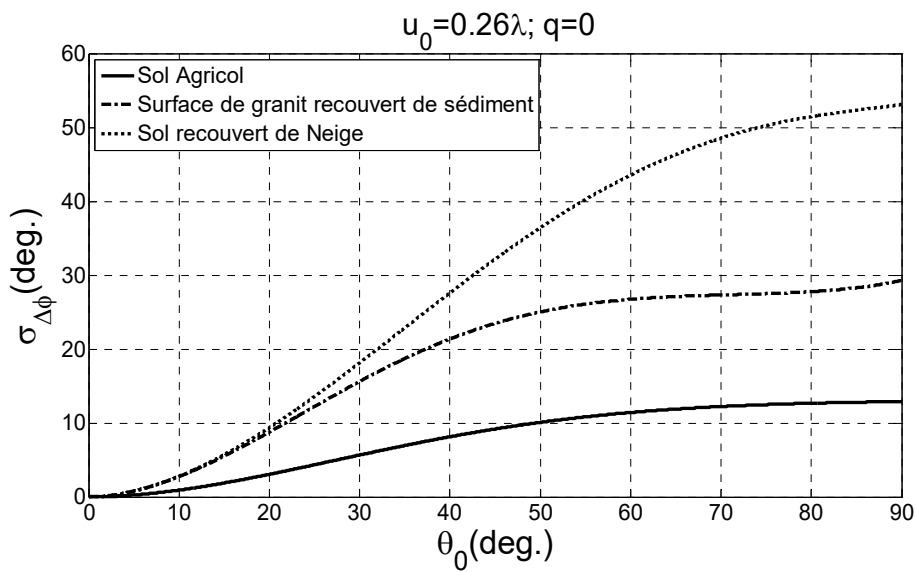


Figure IV.6b. L'écart type en fonction de  $\theta_0$

## Conclusion générale

Dans le but d'étudier d'une façon précise les caractéristiques statistiques et en particulier la densité de probabilité de la différence de phase des amplitudes des champs diffractés en polarisation direct  $E_{//}$  et  $H_{//}$  par une double interface éclairée depuis l'air par une onde plane, nous avons utilisé le développement de Rayleigh et une méthode de perturbation.

En considérant les fonctions qui décrivent les deux interfaces comme fonctions perturbatrices, nous avons pu rechercher les solutions par une méthode de perturbation. Cette étude possède l'avantage d'être analytique. Elle permet ainsi de passer de manière continue du cas non perturbé (double interface lisse) au cas perturbé (double interface rugueuse).

Les résultats, au premier ordre de perturbations, sont d'autant plus exacts que les hauteurs moyennes des déformations sont faibles devant la longueur d'onde. L'originalité du travail réside du fait que des fonctions qui décrivent les rugosités sont aléatoires et qui représente des cas réelles (surface agricole, surface de granit recouvert de sédiment, un sol recouvert de neige). Ces trois configurations, sont étudiées dans la partie simulation.

Nous avons considéré le cas de surfaces non corrélées et corrélées de distribution gaussienne centrée et de longueur infinie. Au premier ordre de perturbation, nous avons obtenu des expressions analytiques des caractéristiques statistiques de la différence de phase (densité de probabilité, fonction de répartition et la moyenne). Nous avons constaté que ces caractéristiques statistiques dépendent de deux paramètres  $r$  et  $\psi$  analogues à l'écart type et la moyenne pour le cas d'une distribution gaussienne. Ces deux paramètres dépendent d'une part des caractéristiques statistiques de la double interface et d'autre part des configurations électromagnétiques. Nous avons constaté aussi que certaine valeur de  $r$  détermine les caractéristiques de la double interface.

Grâce à son efficacité, la méthode analytique présentée dans ce mémoire peut être généralisée pour le cas tridimensionnel.

## Références Bibliographiques

- [1] C. Amra, G. Albrand, and P. Roche, "Theory and application of antiscattering single layers: antiscattering antireflection coatings," *Applied Optics*, vol. 25, pp. 2695-2702, 1986.
- [2] T. Germer, "Polarized light scattering by microroughness and small defects in dielectric layers," *J. Opt. Soc. Am. A.*, vol. 18, pp. 1279-1288, 2001.
- [3] V. Wismann, M. Gade, W. Alpers, and H. Hauhnerfuss, "Radar signature of marine mineral oil spills measured by an airborne multi-radar," *International Journal of Remote Sensing*, Vol. 19, pp. 3607-23, 1998.
- [4] M. Saillard and G. Toso, "Electromagnetic scattering from bounded or infinite subsurface bodies," *Radio Science*, vol. 32, no. 4, pp. 1347-1360, 1997.
- [5] M.Hulin, N.Hulin, D.Perrin, *Equations de Maxwell, ondes électromagnétiques : cours et problème résolu. 3<sup>ème</sup> édition.*
- [6] Michel Hulin, *Electromagnétisme du cours aux applications. Collection fondée par Pierre Louquet. Paris-1978.*
- [7] L. Rayleigh "*Theory of Sound*" Vol II, Dover, New York, 1945.
- [8] Berrouk abla . « Étude statistique de la diffraction des ondes électromagnétiques par des surfaces rugueuses naturelles ». Thèse de Doctorat, Université \_annaba.2014.
- [9] M. KOUALI, "La diffusion d'une onde électromagnétique par un objet au-dessus d'une surfacerugueuse", Thèse de Doctorat, Université de Nantes, 2012.
- [10] N. DÉCHAMPS, "Méthodes numériques appliquées au calcul de la diffusion d'une onde électromagnétique par des interfaces rugueuses monodimensionnelles", Thèse de doctorat, Université de Nantes, 2004.
- [11] K. AIT BRAHIM, "Diffusion des ondes électromagnétique par des surfaces rugueuses aléatoires naturelles: Méthode exacte en coordonnées curvilignes et Principe du faiblecouplage", Thèse de doctorat, Université de Versailles, 2007.
- [12] N. PINEL, "Étude de modèles asymptotiques de la diffusion des ondes électromagnétiques pardes interfaces naturelles: Application à une mer recouverte de pétrole", Thèse de doctorat, Université de Nantes, 2006.
- [13] D. COURJON and C. BAINIER, "*Le champ proche optique: Théorie et applications*", Springer -Verlag France et France Télécom R&D, Paris, 2001.
- [14] C. Baudier and R. Dusséaux, "Scattering of an E// - polarized plane wave by onedimensional rough surfaces: Numerical applicability domain of a Rayleigh method inthe far-field zone," *PIER 34*, pp 1-27, 2001
- [15] I. Ohlidal and F. Vizda, "Optical quantities of multilayer systems with correlated randomly rough boundaries," *Journal of Modern Optics*, vol. 46, pp. 2043-2062, 1999.

- [16] C. Carniglia, "Scalar scattering theory for multilayer optical coatings," *Optical Engineering*, vol. 18, pp. 104-115, 1979.
- [17] R. Dusséaux, R. de Oliveira, "Effect of the illumination length on the statistical distribution of the field scattered from one-dimensional random rough surfaces: analytical formulae derived from the small perturbation method" *Waves in Random and Complex Media*, Vol.17, No3, 305-320, 2007
- [18] S. Afifi, R. Dusséaux, R. de Oliveira, "Statistical distribution of the field scattered by rough layered interfaces: Formulae derived from the small perturbation method," *Waves in Random and Complex Media*, Vol. 20, No. 1, February 2010, 1–20
- [19] S. Afifi and M. Diaf, "Scattering by random rough surfaces: Study of direct and inverse problem" *Optics communications* 265, (2006), 11-17
- [20] S. Afifi, R. Dusséaux and R. de Oliveira, "Statistical distribution of the field scattered by rough layered interfaces: Formulae derived from the small perturbation method," *Waves in Random and Complex Media*, Vol.20, No1, 1-22, 2010.
- [21] R. Dusséaux R. de Oliveira, "Statistical Distribution of Field Scattered by 1 dimensional Random Slightly Rough Surfaces," *PIERS online*, Vol 2, No3, 227-231, 2006.
- [22] Tsang, L., Kong, J.A. Ding, K.H., and Ao, C.O., 2001, *Scattering of Electromagnetic Waves – Numerical Simulations*, (John Wiley & Sons, New-York).
- [23] M. Saillard and G. Toso, "Electromagnetic scattering from bounded or infinite subsurface bodies," *Radio Science*, vol. 32, pp. 1347-1359, 1997.
- [24] N. Déchamps, N. De Beaucoudrey, C. Bourlier and S. Toutain, "Fast numerical method for electromagnetic scattering by rough layered interfaces: Propagation inside-layer expansion method", *J. Opt. Soc. Am. A*, Vol. 23, No. 2, pp. 359-369, 2006.