

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

UNIVERSITÉ BADJI MOKHTAR-ANNABA
BADJI MOKHTAR- ANNABAUNIVERSITY



جامعة باجي مختار - عنابة

Faculté : sciences de l'ingénierat
Département : Electronique
Domaine : Electronique
Filière : Automatique
Spécialité : Automatique et système

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du Diplôme de Master

Thème :

Commande robuste d'un triple pendule inversé

Présenté par : *Abbes Abd el Hakim*

Encadrant : *Chaker Karima Docteur Université Badji Mokhtar Annaba*

Jury de Soutenance :

BENMOUSSA SAMIR	Maitre de conférence	Université <i>Badji Mokhtar Annaba</i>	Président
Chaker Karima	Docteur	<i>Université Badji Mokhtar Annaba</i>	Encadrant
Gharbi Soufiane	Docteur	<i>Université Badji Mokhtar Annaba</i>	Examineur

Année Universitaire : 2019/2020

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier tout d'abord "الله" , seigneur de l'univers, pour la volonté, la santé, qu'il nous a donné durant toutes ces longues années d'études. A lui toutes louanges.

Je ne pourrai jamais remercier à leurs justes valeurs mes parents, ainsi que toute ma famille pour avoir été pour moi source de soutien, et réconfort.

*Je tiens aussi à exprimer tout mon respect et toute ma reconnaissance à mon encadreur Madame : **Karima Chaker**, Docteur à l'Université de Badji Mokhtar Annaba, pour sa bienveillance, sa gentillesse, ses encouragements et ses conseils.*

Je remercie vivement les membres du jury pour avoir accepté d'évaluer ce modeste mémoire, et pour m'avoir fait l'honneur de l'enrichir par leurs remarques et critiques.

Je ne manquerai pas de remercier pour terminer, tous les enseignants du département d'électrotechnique qui ont contribué à notre formation.

Enfin, je tiens à remercier tous ceux qui ont contribué à ce travail de près ou de loin.

HAKIM ABBES

DÉDICACES

Je dédie ce modeste travail à

*Ceux qui sont les plus chers au monde, mes parents, auxquels
je n'arriverai jamais à exprimer ma gratitude et ma
reconnaissance, pour leur amour, leur soutien tout au long
de mes études.*

A mes frères.

A toute ma famille.

A tous mes amis.

A tous ceux qui se donnent à fond dans leurs études

HAKIM ABBES

Table des matières

Introduction générale.....	10
Chapitre I Description détaillée du système du pendule inversé.....	13
I.1. Introduction.....	14
I.2. Pendule inversé : objectifs d'étude.....	14
I.3. Equations mathématiques du mouvement du pendule inversé	17
I.3.1 Energie cinétique du système du pendule	17
I.3.2 Energie potentielle du système du pendule	18
I.4 Description du système de pendules à étudier.....	19
I.4.1 Modèle d'état du système.....	22
I.5 Conclusion.....	25
Chapitre II Commande robuste et technique de commande H_∞	23
II.1 Introduction.....	27
II.2 Commande robuste : principe et théorie associée	27
II.2.1 Principe	27
II.3 Notions sur la théorie associées à la commande robuste.....	28
II.3.1 Valeurs singulières et normes des systèmes.....	28
II.3.2 Théorème du petit gain.....	28
II.3.3 Conditions de robustesse des systèmes.....	29
II.4 Principe de la commande robuste H_∞	32
II.5 Concepts de base de la commande H_∞	33
II.5.1. Fonctions de sensibilité.....	33
II.6 Synthèse de loi de commande par l'approche H_∞	34
II.6.1 Problème H_∞ standard	34
II.6.2 Formulation du problème standard	38
II.7. Résolution du problème H_∞	39
II.7.1 Représentation d'état du système.....	39
II.8 Résolution du problème H_∞ standard par équations de Riccati	40
II.8.1 Problème de sensibilité mixte.....	41
II.8.2 Algorithme d'optimisation par H_∞	42
Chapitre III Résultat et Simulation	45
III.1 Introduction	46
III. 2 Application de la commande LQ sur le système de pendule	46

III.2.1	Résultats de simulation par l'application du contrôleur LQR.....	49
III.2.2	Interprétation des résultats de simulation	51
III.2.3	Conclusions	51
III.3	Application de la commande H^∞ sur le système de pendule triple inversé.....	52
III.3.1	Description des objectifs de contrôle	52
III.3.2	Choix des pondérations W_t et W_p	54
III.3.3	Modèle de simulation du système de pendule triple à contrôler	55
III. 4	Synthèse de contrôleur robuste par H^∞	56
III.4.1	Résultats de simulation	57
III.4. 2	Discussions des résultats	59
	Références bibliographique.....	60
	Annexes	

TABLE DES FIGURES

Chapitre 1

Figure (1.1) : Robot EMIEW	12
Figure (1.2) : Robot Segway	13
Figure (1.3) : Robot a basse de pendule inversé.....	13
Figure (1.4) : Système du pendule triple inversé à étudier.....	17
Figure(1.5) : Diagramme block du système de pendule.....	20

Chapitre 2

Figure (2.1) : Schéma block d'un système asservi multivariable.....	31
Figure (2.2) : Schéma synoptique du problème standard.....	33
Figure (2.3) :Formulation de problème standard en boucle fermé avec les différentsspécifications.....	34
Figure (2.4) : Problème H^∞ standard sous la forme LFT	34
Figure (2.5) :Problèmes de sensibilité mixte sous forme standard.....	39
Figure (2.6) : Organigramme de la procédure d'optimisation par H^∞	41

Chapitre 3

Figure (3.1) : Pendule triple inversé avant et après contrôle par LQR.....	47
Figure (3.2) : Réponse impulsionnelles du système de pendule après contrôle par LQR.....	47
Figure (3.3) : Problème présenté sous la forme de la sensibilité mixte.....	50
Figure (3.4) : Condition sur les performances et stabilité.....	52
Figure (3.5) :Système du pendule inversé avant et après contrôle H^∞	54
Figure (3.6) : Vérification de la condition de robustesse sur la stabilité contrôleur H^∞	55
Figure (3.7) :Vérification de la condition de robustesse sur les performances contrôleur H^∞	56
Figure (3.8) :Vérification des condition de robustesse sur la stabilité et les performances contrôleur H^∞	56

TABLE DES NOTATIONS

s Variable de Laplace

$I_{n \times n}$ Matrice Identité de dimensions n

A^T Transposée de la matrice A

A^* Transposée conjuguée de la matrice A

A^{-1} Inverse de la matrice A

$\lambda_{\max}(G(s))$ Valeur propre maximale d'une matrice de transfert $G(s)$

$\lambda_{\min}(G(s))$ Valeur propre minimale d'une matrice de transfert $G(s)$

$\bar{\sigma}(G(s))$ Valeur singulière maximale d'une matrice de transfert $G(s)$

$\underline{\sigma}(G(s))$ Valeur singulière minimale d'une matrice de transfert $G(s)$

$\|G(s)\|_{\infty}$ Norme H_{∞} d'une matrice de transfert $G(s)$

Résumé

Ce document représente un travail de fin d'étude pour l'obtention de diplôme de Master en automatique et système sous le thème : Commande Robuste d'un Pendule Triple Inversé, que nous avons organisé en trois chapitres.

Dans ce travail nous nous sommes intéressés à l'étude et l'analyse des performances de la commande robuste H_∞ appliquée sur un système de pendule multivariable difficile à stabiliser, représenté par son modèle mathématique linéarisé.

Ce mémoire présente en particulier le schéma de commande d'un pendule triple inversé constituée d'un contrôleur H_∞ ou il a fallu ajuster les pondérations jusqu'à ce que nous obtenions des résultats acceptables par rapport à notre cahier des charges. Les résultats obtenus par simulation numérique montrent l'efficacité de la méthode de commande proposée.

Summary

This document represents an end-of-study work for the graduation of a Master's degree in automatic and system under the theme: Robust Control of a triple inverted pendulum, which we studied in three chapters.

In this work, we were interested by studying and analyzing the performance of the H_∞ robust control applied on a triple inverted pendulum represented by its linearized mathematical model.

We present in particular the H_∞ control scheme of a triple inverted pendulum, where the work consists on weights that have been adjusted until we obtain acceptable results against our specifications. The results obtained by numerical simulation show the effectiveness of the proposed control method.

ملخص

تمثل هذه الوثيقة مذكرة تخرج درجة ماستر في تخصص انظمة اوتوماتيكية وتحت عنوان القيادة القوية لنواس ثلاثي مقلوب اين درسنا اجزاءه المختلفة.

في هذا العمل ركزنا على دراسة وتحليل اداء السيطرة القوية المطبقة على النواس المقلوب الثلاثي الممثل بنموذجه الرياضي.

يقدم هذا العمل على وجه الخصوص مخطط تحكم للنواس المقلوب الثلاثي ويتكون هذا الامر من وحدة تحكم حيث قمنا بتعديل المترجمات حتى نحصل على نتائج مقبولة مقارنة بدفتر الشروط تظهر النتائج التي تم الحصول عليها بواسطة المحاكاة الرقمية فعالية اسلوب التحكم المقترح.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Dans le domaine de l'automatique, en particulier celui dédié à l'enseignement, il est très fréquent de faire recours à des cas d'études particuliers, qui sont bien représentatifs de grandes classes d'applications. La connaissance de ces cas s'est affinée au fil du temps permettant l'acquisition d'une assez grande expérience et fournissant aujourd'hui une base idéale pour comparer de façon très efficace les avantages et les inconvénients d'approches différentes de commande susceptible d'être appliquées.

Le pendule inversé est justement l'un de ces cas typiques dont il est question, du fait qu'il occupe une place plus qu'importante dans l'industrie étant donné qu'il représente un outil qui a fait l'objet de plusieurs études tout au long de ces dernières décennies. Cet intérêt est fondamentalement dû au fait que le problème de la commande du pendule inversé est fondamentalement le même que ceux impliqués dans plusieurs autres systèmes tels que par exemple le lancement des fusées, la propulsion des missiles et la stabilisation des satellites, etc.

Ainsi, le pendule inversé a toujours été utilisé pour tester les nouvelles méthodes de commande, car il possède plusieurs caractéristiques attrayantes. En effet, c'est un système non linéaire, couplé et intrinsèquement instable possédant plusieurs implications pratiques. Pour cette raison notre choix s'est porté sur ce type de système pour appliquer la commande que l'on a choisi d'étudier dans ce travail.

Dès la fin des années 70, un grand nombre de chercheurs ont commencé à se pencher sur un problème de commande aussi intrigant qu'important qui est de pouvoir garantir la stabilité et les performances des systèmes commandés en toutes circonstances. Ce qui représentait en fait les premières ébauches de travaux qui ont donné par la suite naissance à une nouvelle tendance en automatique, l'*automatique avancée* permettant l'émergence de ce qui sera appelée par la suite la *commande robuste*.

La commande robuste est apparue au début des années 1990, en toute simplicité on peut la définir comme étant une commande qui vise à garantir les performances et la stabilité d'un système face à des perturbations du milieu et les incertitudes du modèle.

Peu à peu, la commande robuste s'est imposée comme étant une branche incontournable de l'automatique qui a concentré beaucoup d'intérêt et d'effort autour d'elle, dès lors que les chercheurs ont rendu compte que la commande adaptative, la commande linéaire quadratique optimale (commande optimale **H2**), le retour d'état à travers des observateurs, et bien d'autres méthodes populaires pour la synthèse de contrôleurs, manquaient des garanties de stabilité et de performances lorsque le système est soumis à des incertitudes.

Pour faire simple et éviter les définitions trop longues, concrètement le principe de la commande robuste consiste en la conception d'une loi de commande sur la base d'un modèle imparfait, pour assurer stabilité, marges de stabilité, précision, performances dynamiques pour toutes les familles de modèles construits autour d'un modèle central (modèle sans incertitudes). Notons quand même qu'il est rare que tous les objectifs d'un cahier des charges puissent être pris en compte explicitement lors de la synthèse d'une commande. Ceux-ci seront donc vérifiés a posteriori, en utilisant en général un modèle plus précis que celui utilisé pour calculer la loi de commande.

Ceci étant, l'objectif de ce travail est l'étude et l'application de **la commande H^∞** , réputé par sa robustesse, pour la stabilisation d'un **pendule triple inversé**. La stabilisation d'un tel pendule est un problème de contrôle classique qui est souvent utilisé pour évaluer la qualité d'un contrôleur. Tout le travail réside dans l'équilibrage du pendule, ce qui est en soit un problème très important en robotique. En effet, il permet la maîtrise des mécanismes qui régissent le mouvement de robots humanoïdes, de sorte à se rapprocher au maximum du mouvement d'un humain réel. Grâce à des commandes de plus en plus efficaces, énormément de progrès ont été réalisés dans la conception de ce type de robots. Très apprécié dans les applications militaires, les soins en médecine, et même dans les utilisations domestiques.

Pour cela, Le présent mémoire est organisé comme suit :

- 1- Le premier chapitre est consacré à la description détaillée du système du pendule inversé que l'on cherche à commander.
- 2- Dans le deuxième chapitre, on s'intéresse au principe de base de la commande **H^∞** et toute la théorie qui va avec pour pouvoir l'appliquer sur le modèle du système en question.
- 3- Dans le troisième et dernier chapitre, on présente les résultats de simulation obtenus sous la forme de représentation temporelle et fréquentielle de la réponse du système.
- 4- On clôture le travail par des conclusions et perspectives.

Chapitre I :
Description détaillée du
système du pendule inversé

I.1. Introduction

On s'intéresse dans ce premier chapitre à la modélisation du système utilisé dans ce mémoire pour illustrer la commande que nous développerons pour le contrôler. Le système en question est constitué d'un système de pendule inversé à 3 degrés de liberté, dont les équations de mouvement sont dérivées à partir du formalisme d'Euler-Lagrange. Nous présentons le modèle dynamique non linéaire du pendule ainsi que le modèle d'état qui permet de faciliter l'étude du système et à lui appliquer des commandes qui utilisent les modèles d'état.

I.2. Pendule inversé : objectifs d'étude

Le pendule inversé est un système très utilisé en automatique, il est particulièrement apprécié car c'est un système dynamique multi variable, représentant un très bon exemple d'étude pour tous les systèmes instables et non linéaires. Il permet également de tester les performances des techniques de commande, en l'occurrence pour des constantes de temps très rapides.

L'étude du pendule inversé peut cibler de multiples objectifs puisqu'il concerne plusieurs domaines d'application le plus prépondérant étant le domaine de la robotique, particulièrement humanoïde.

En effet, de nos jours on retrouve les robots humanoïdes dans diverses applications très variées telles que les applications militaires, de la médecine et des soins voire même dans le domaine ménager. Dans cet ordre d'idée, il faut savoir que l'utilisation de ce genre de système revêt une assez grande importance car son concept est à la base de la modélisation de la dynamique complexe qui compose le mouvement et le déplacement humain.

Prenons à titre d'exemple la marche humaine, cette dernière peut être modélisée par un pendule double inversé dont les deux axes de rotation principaux sont les chevilles et les hanches. Quand nous sommes en position debout, nos articulations travaillent sans arrêt pour nous y maintenir. Les spécialistes qui travaillent à la réalisation de prothèses pour les hanches

sont amenés à utiliser le modèle du pendule double inversé pour calculer l'ensemble des contraintes auxquelles la prothèse est soumise.

On a également vu apparaître des applications très utiles telles que les moyens de locomotion dotés de deux roues montées sur un même axe sur lequel on est en position debout. On accélère en se penchant en avant et on ralentit en se penchant en arrière. Le système est le même que le pendule inversé ou la stabilité est assurée par des gyroscopes.

Les figures I.1, I.2 et I.3 donnent quelques exemples de robots qui ont fait l'objet de bons nombres d'études, à base de modèle développés sur des pendules inversés.



Figure I.1

Robot

EMIEW



Figure I.2 Robot Segway

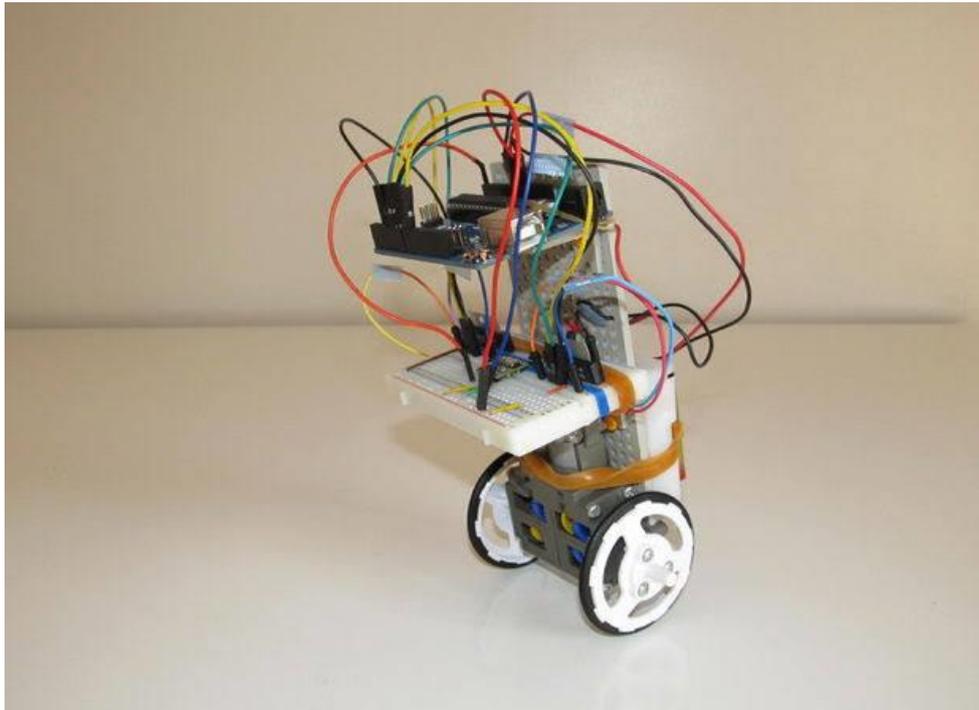


Figure I.3 Robot à basse du pendule inversé

Dans ce qui suit, on s'intéresse à la description détaillée du modèle d'un pendule triple inversé, qui fera l'objet de notre étude. C'est un système multivariables parfaitement adapté à la mise en œuvre et à l'étude des performances et de la stabilité par des techniques de commandes multivariables tel que la commande LQR et la commande Hinfini. Il a été tiré du travail de chercheurs ayant étudié la stabilisation d'un tel système en employant deux méthodes de contrôle différentes pour évaluer les performances de chacune d'entre elle. [1]

Dans cet ordre d'idée, nous reprenons le modèle du pendule étudié par [1] et nous allons lui appliquer en simulation deux contrôleurs différents à visée comparative. Le premier n'est autre que le contrôleur LQR développé par [1] et le second le contrôleur Hinfini qu'on va synthétiser dans le prochain chapitre.

I.3. Equations mathématiques du mouvement du pendule inversé :

Pour pouvoir décrire les équations mathématiques qui régissent le mouvement du pendule triple inversé que l'on va commander, il est impératif de passer d'abord par la détermination des équations du mouvement d'un pendule simple inversé. Il existe deux méthodes de détermination des équations du mouvement du pendule inversé.

Celle de la Loi Fondamentale de la Dynamique (LFD) de Newton, qui est basée sur le concept de force, et celle du formalisme d'Euler-Lagrange[5] [6], qui est basée sur le principe de la conservation de l'énergie mécanique.

Dans ce travail on s'intéresse au formalisme de Lagrange-Euler pour tirer le modèle mathématique d'un tel système, qui se définit comme étant la différence entre l'énergie cinétique E_{cm} et l'énergie potentielle E_p du système.

$$L = E_{cm} - E_p \quad (I.1)$$

I.3.1 Energie cinétique du système du pendule :

Seul le pendule en mouvement possède une énergie cinétique exprimée par l'équation :

$$E_{cm} = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \quad (I.2)$$

v_c : La vitesse de centre de gravité du pendule

θ : La vitesse angulaire du pendule

J : Le moment d'inertie du pendule

m : La masse du pendule

La position du centre de gravité du pendule, notée \vec{r}_c , est donnée par :

$$\vec{r}_c = (x + l \sin \theta) \vec{i} + l \cos \theta \vec{j} \quad (\text{I.3})$$

\vec{i} et \vec{j} étant les vecteurs unitaires du repère,

à partir de ces coordonnées, la vitesse du centre de gravité du pendule est donc :

$$\vec{v}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = (\dot{x} + l \cos \theta \dot{\theta}) \vec{i} - l \dot{\theta} \sin \theta \vec{j} \quad (\text{I.4})$$

En substituant l'équation (I.4) dans l'équation (I.2), l'expression de l'énergie cinétique du pendule devient :

$$E_{cm} = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + 2\dot{x}l\dot{\theta} \cos \theta + l^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + l^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \quad (\text{I.5})$$

A des fins de linéarisation de l'équation I.5, on procède à la suppression de tous les termes non linéaires et ce en considérant de faibles mouvements et donc de faibles variations d'angle. Il est donc possible de procéder à une petite approximation de l'angle à la fonction sinus.

Ainsi, (I.5) s'écrit après simplification du terme $l^2 \dot{\theta}^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = l^2 \dot{\theta}^2$

$$E_{cm} = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + 2\dot{x}l\dot{\theta} \cos \theta + l^2 \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} J \quad (\text{I.6})$$

I.3.2 Energie potentielle du système du pendule :

En supposant que le pendule est posé sur un chariot étant en mouvement sur un rail horizontal, l'énergie potentielle du centre de gravité du pendule est donnée par :

$$E_p = mgl \cos \theta \quad (\text{I.7})$$

Une fois que les expressions de l'énergie cinétique E_{cm} du pendule inversé (I.6) et l'énergie potentielle du système E_p (I.7) sont établies, on utilise l'équation générale d'Euler-Lagrange pour déterminer les équations du mouvement du pendule inversé.

En substituant les équations (I.6) et (I.7) dans l'équation (I.1) on trouve :

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + 2\dot{x}l\dot{\theta}\cos\theta + l^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}J - mgl\cos\theta \quad (I.8)$$

L'équation générale d'Euler-Lagrange est donnée par

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L}{\delta \dot{\varepsilon}_j}\right) - \frac{\delta L}{\delta \varepsilon_j} + \frac{\delta D_f}{\delta \dot{\varepsilon}_j} = F_j \quad (I.9)$$

où :

$\varepsilon_j(t)$: désigne les degrés de liberté.

D_f : désigne l'énergie dissipée par frottement,

F : la force généralisée,

L : représente le Lagrangien, donné par l'équation (I.1)

L'équation générale de Lagrange pour le pendule inversé peut être réécrite, en supposant les frottements nuls, comme suit :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L}{\delta \dot{\varepsilon}_j}\right) - \frac{\delta L}{\delta \varepsilon_j} = F_j \quad (I.10)$$

I.4 Description du système de pendules à étudier :

Le système de pendule à étudier se compose de trois bras, le premier bras est fixé à la base tandis que les deux autres sont articulés par des charnières (roulements à billes) et pouvant tourner dans le plan vertical. Les couples T_{m1} et T_{m2} (rotation) fournis par les moteurs, représentent les entrées du système de pendule, placés au niveau de la charnière centrale et celle du troisième bras libre, comme c'est représenté à la figure I.4 ci-dessous. En contrôlant

les angles des bras autour de valeurs spécifiques, le pendule peut être stabilisé inversement avec les positions d'angles souhaitées.

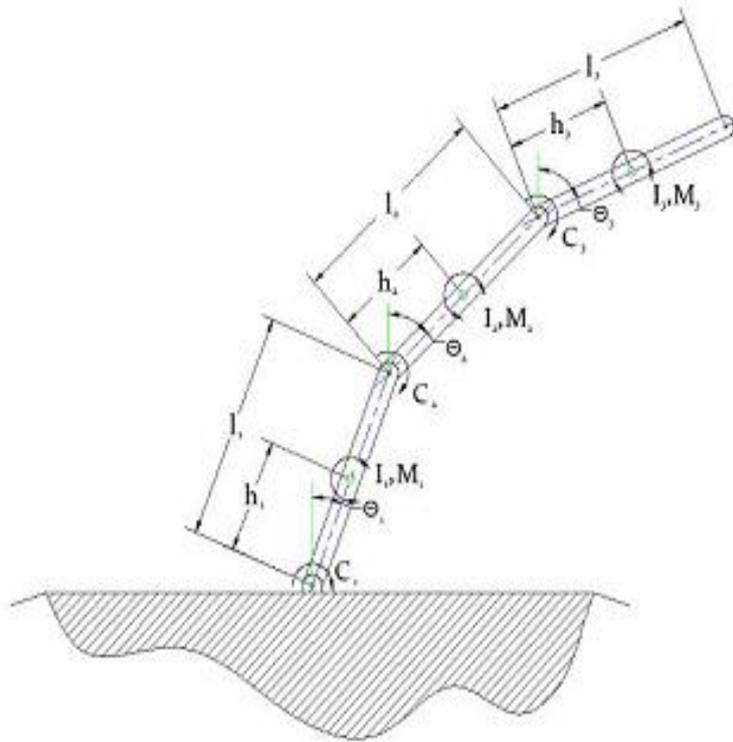


Figure I.4 **Système** du pendule triple inversé à étudier

La modélisation mathématique du pendule triple inversé est dérivée sous hypothèse que chaque bras est un corps rigide. Les équations différentielles de Lagrange de chaque bras sont utilisées pour construire le modèle du pendule triple aboutissant à un système d'équation différentielle non linéaire du second ordre, de matrice vectorielle ayant la forme:

$$M(\theta)\ddot{\theta}_i + N\dot{\theta}_i + q_i = GT_j \quad (\text{I.11})$$

$$i = 1, 2, 3$$

avec, $j = 1, 2$

$$M = (\theta) \begin{pmatrix} J_1 & l_1 M_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) & l_3 M_3 \cos(\theta_1 - \theta_3) \\ l_1 M_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) & J_2 & l_2 M_3 \cos(\theta_2 - \theta_3) \\ l_1 M_3 \cos(\theta_1 - \theta_3) & l_2 M_3 \cos(\theta_2 - \theta_3) & J_3 \end{pmatrix} \quad (\text{I.12})$$

Où

$$\begin{aligned}
M_1 &= m_1 h_1 + m_2 l_1 + m_3 l_1 \\
M_2 &= m_2 h_2 + m_3 l_2 \\
M_3 &= m_3 h_3 \\
J_1 &= I_1 + m_1 h_1^2 + m_2 l_1^2 + m_3 l_1^2 \\
J_2 &= I_2 + m_2 h_2^2 + m_3 l_2^2 \\
J_3 &= I_3 + m_3 h_3^2
\end{aligned} \quad (\text{I.13})$$

$$N = \begin{pmatrix} C_1 + C_2 & -C_2 & 0 \\ -C_2 & C_2 + C_3 & -C_3 \\ 0 & -C_3 & C_3 \end{pmatrix} \quad (\text{I.14})$$

$$q_1 = l_1 M_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2^2 + l_1 M_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) \dot{\theta}_3^2 - M_1 g \sin(\theta_1)$$

$$q_2 = l_1 M_3 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1^2 + l_2 M_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) \dot{\theta}_3^2 - M_2 g \sin(\theta_2) \quad (\text{I.15})$$

$$q_2 = l_1 M_3 \sin(\theta_1 - \theta_2) (\dot{\theta}_1^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3) + l_2 M_3 \sin(\theta_2 - \theta_3) (\dot{\theta}_2^2 - 2\dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3) - M_2 g \sin(\theta_3)$$

Pour faciliter l'étude du système décrit par les équations du mouvement d'un pendule triple inversé dans l'espace d'état, la représentation matricielle est utilisée.

$$\begin{pmatrix} J_1 & l_1 M_2 & l_3 M_3 \\ l_1 M_2 & J_2 & l_2 M_3 \\ l_1 M_3 & l_2 M_3 & J_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_1 + C_2 & -C_2 & 0 \\ -C_2 & C_2 + C_3 & -C_3 \\ 0 & -C_3 & C_3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} M_1 g \theta_1 \\ M_2 g \theta_2 \\ M_3 g \theta_3 \end{pmatrix} \quad (\text{I.16})$$

Notons, que (I.16) représente la partie droite de (I.11), quand à la partie gauche de (I.11) on y trouve G^*T , où

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$T = [T1T2]^T$$

La description de tous les paramètres du système, est indiquée dans le Tableau 1 ci-dessous.

	symbole	description
1	l_i	longueur du bras
2	h_i	la distance par rapport au centre de gravité du bras
3	m_i	masse du bras
4	θ_i	angle du bras deligne verticale
5	C_i	coefficient de visqueux friction de la charnière
6	I_i	moment d'inertie du bras autour de centre de gravité
7	T_j	couple de commande de la charnière

Tableau1. Description du système

I.4.1 Modèle d'état du système :

La modélisation la plus riche des systèmes dynamiques est incontestablement celle qui utilise la notion d'état puisqu'elle représente un ensemble de variables plus grand que celui constitué par les entrées et sorties. En effet, cette représentation d'état est un outil puissant permettant de modéliser le fonctionnement de systèmes linéaires et non linéaires, en temps continu ou en temps discret avec l'avantage de conserver la représentation temporelle des phénomènes.

Le diagramme bloc du système du pendule est indiqué à la figure I.5 et les valeurs nominales des paramètres sont données au tableau 2.

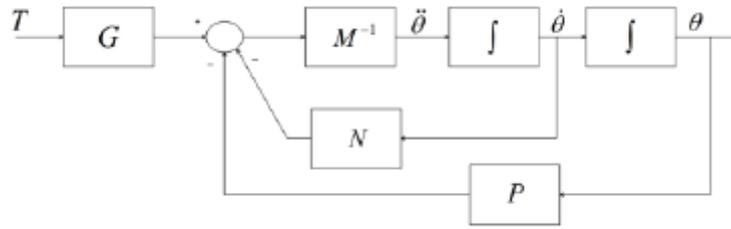


Figure I.5 Diagramme bloc du système de pendule

Ainsi, les variables d'état représentent à chaque instant, l'ensemble minimal d'informations nécessaires pour déterminer l'évolution ultérieure d'un système et ce dans le domainetemporel. Ce qui facilite le développement de programmes qui permettent l'analyse et la synthèse des systèmes dynamiques.

Ainsi, les équations différentielles du système du pendule triple inversé, seront repris sous la forme du modèle d'état d écrit par :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \quad (\text{I.17})$$

Le modèle non linéaire, décrit par(I.11), est d'abord linéariséautour de la position verticale non nulle en appliquant des approximations d'angle de faibles variations, puis on pourra le représenter sous la forme (I.17).

On obtient donc, les équations après linéarisation :

$$M(\theta) = \begin{pmatrix} J_1 & l_1 M_2 & l_3 M_3 \\ l_1 M_2 & J_2 & l_2 M_3 \\ l_1 M_3 & l_2 M_3 & J_3 \end{pmatrix} \quad (\text{I.18})$$

$$P = \begin{pmatrix} M_1 g & 0 & 0 \\ 0 & -M_2 g & 0 \\ 0 & 0 & -M_3 g \end{pmatrix} \quad (\text{I.19})$$

en définissant le vecteur d'état comme suit

$$X = (\theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3 \quad \dot{\theta}_1 \quad \dot{\theta}_2 \quad \dot{\theta}_3)^T \quad (\text{I.20})$$

et en posant:

$$(\theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3 \quad \dot{\theta}_1 \quad \dot{\theta}_2 \quad \dot{\theta}_3)^T = (X_1 \quad X_2 \quad X_3 \quad X_4 \quad X_5 \quad X_6)^T \quad (\text{I.21})$$

Le modèle du système du pendule triple linéarisé, est obtenu sous forme d'espace d'état comme suit:

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 0 & I_{3 \times 3} \\ M^{-1}P & E^{-1}N \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ E^{-1}h_0 \end{pmatrix} U \quad (\text{I.22})$$

avec

$$h_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le Tableau 2, ci dessous, affiche les valeurs prises par chacune des variables du modèle du pendule triple inversé qui a été conçu puis commandé par les auteurs de [1], il est très aisé de s'en référer pour plus de détails sur le système.

Description et Symbole	Valeur
Longueur du bras l_1	110 (mm)
l_2	170 (mm)
l_2	160 (mm)
h_1	70 (mm)
h_2	90 (mm)

h_3	80 (mm)
m_1	1,9 (kg)
m_2	0,467 (kg)
m_3	0,292 (kg)
I_1	$9,6 \times 10^{-4}$ (kg - m ²)
I_2	$6,8 \times 10^{-4}$ (kg - m ²)
I_3	$4,1 \times 10^{-4}$ (kg - m ²)

Tableau 2. Paramètres du modèle du pendule triple inversé

En remplaçant les valeurs numériques des paramètres du système physique dans (I.22), la représentation dans l'espace d'état du système dynamique devient :

$$\begin{pmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{X}_3 \\ \dot{X}_4 \\ \dot{X}_5 \\ \dot{X}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 187,9 & -74,6 & 10,3 & -29,9 & 34,4 & -14,7 \\ -176,1 & 220,3 & -76,4 & 47,2 & -104,2 & 66,5 \\ 95,0 & -299,7 & 221,1 & -48,6 & 193,3 & -149,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -171,4 & 12,7 \\ 327,8 & -578,2 \\ -378,0 & 1302,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{m_1} \\ t_{m_2} \end{pmatrix} \quad (I.23)$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \end{pmatrix}$$

I.5 Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons présenté les équations mathématiques qui régissent le mouvement du système formé par le pendule triple inversé, puis nous avons réalisé le passage vers la représentation d'état qui permet de simplifier l'application de la commande robuste sur ce système.

Chapitre II :
Commande robuste et
technique de commande
H infini

II.1 Introduction :

Dans ce chapitre, on présente tout d'abord quelques outils nécessaires à la conception d'un régulateur robuste par l'approche H_∞ à savoir : les fonctions de sensibilité, les valeurs singulières d'une matrice de transfert, la norme H_∞ d'un système linéaire et les propriétés importantes de cette norme, puis la notion de *problème H_∞ standard* et de sa résolution par l'algorithme de *Glover-Doyle* qui utilise les équations de Riccati. Ensuite, on présente le problème de la *sensibilité mixte* qui est un *cas particulier* du problème H_∞ standard puis on l'appliquera à la conception d'un régulateur pour le système du triple pendule triple inversé.

II.2 Commande robuste : principe et théorie associée :

La *commande robuste* appelée également *commande fréquentielle avancée* ou encore *commande H_∞* , est l'extension de l'automatique fréquentielle classique où l'incertitude est explicitement prise en compte et procure une solution parfois imparfaite mais présentant néanmoins des avantages très intéressants :

1. Formalisation des objectifs de contrôle par un critère mathématique.
2. Exécution d'un algorithme numérique efficace permettant de tester l'existence d'un correcteur qui répond au critère en un temps raisonnable (quelques secondes), si ce correcteur existe alors il sera fourni automatiquement à la sortie de l'algorithme.
3. Possibilité de traiter naturellement les systèmes à plusieurs entrées et plusieurs sorties, systèmes multivariables MIMO.

II.2.1 Principe :

Cette commande a pris naissance suite à l'avancée récente de la théorie de l'automatique fréquentielle, à l'optimisation numérique et à la puissance de calcul disponible actuellement, lui valant d'être classée parmi les méthodes de Conception Assistée par Ordinateur (CAO).

En fait, le travail de l'automaticien se résume au choix judicieux du critère mathématique qui reflète au mieux le cahier des charges et d'en régler les différents paramètres. En d'autres termes, le principal est de réussir à traduire convenablement les objectifs de performance et de robustesse dictés par le cahier des charges en des pondérations fréquentielles qui se transformeront en des conditions à respecter. La synthèse effective du correcteur vérifiant le critère est alors effectuée par un ordinateur.

II.3 Notions sur la théorie associées à la commande robuste :

II.3.1 Valeurs singulières et normes des systèmes :

a- Valeurs singulières :

Les valeurs singulières quantifient les énergies des sorties, elles mesurent les gains principaux dans le plan fréquentiel [6]. Les gains principaux sont définis par les formules suivantes :

Soit A une matrice de transfert, ses gains principaux maximum et minimum sont données par:

$$\bar{\sigma}(A) = \max_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sqrt{\lambda_{\max}(A^*A)} \quad (\text{II.1}) \quad \underline{\sigma}(A) = \min_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sqrt{\lambda_{\min}(A^*A)} \quad (\text{II.2})$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme Euclidienne, les σ sont les valeurs propres et $[\]^*$ est le conjugué.

Pour un système mono variable représenté par sa fonction de transfert $G(j\omega)$, on définit le gain du système à la pulsation ω par le module $|G(j\omega)|$.

Dans le cas multivariable, on utilise la notion des valeurs singulières, définies comme les racines carrées des valeurs propres de $G(j\omega)$ multipliée par sa trans-conjuguée:

$$\sigma_i(j\omega) = \sqrt{\lambda_i(G(j\omega) * G(-j\omega)^T)} = \sqrt{\lambda_i(G(j\omega)^T * G(j\omega))} \quad (\text{II.3})$$

avec $i = \min(m,p)$, m est le nombre de lignes et p le nombre de colonnes.

b- Normes H_∞ :

Il est possible de définir la norme H_∞ d'une matrice de transfert stable, Multi Input Multi Output (MIMO) $H(p)$ comme étant :

$$\|H\|_\infty = \sup_{\text{Re}(p) > 0} \bar{\sigma}(H(p)) = \sup_{\omega \in [0, +\infty]} \bar{\sigma}(H(j\omega))$$

On rappelle que pour un système monovariabla la norme H_∞ est le maximum de $|G(j\omega)|$.

$$\|G(s)\|_\infty = \max_w |G(j\omega)| = \sigma(G(j\omega))$$

II.3.2 Théorème du petit gain :

Le théorème du petit gain présente un résultat extrêmement important pour étudier la stabilité en boucle fermée des systèmes multivariables, il se base sur la notion de norme des

systèmes. C'est une méthode qui donne une condition suffisante facile à tester qui permet de conclure à la stabilité interne du type de la Figure (II.1)

Définition du théorème du petit gain :

Etant donné un asservissement à retour unitaire stable en boucle ouverte alors le système en boucle fermée est stable si :

$$\|L\|_{\infty} + \max_w \bar{\sigma}(L(jw)) < 1 \quad \forall w \quad (\text{II.4})$$

où $\bar{\sigma}$ est la valeur singulière maximale de $L(jw) = K * G$ calculée à la pulsation w

Définitions de la stabilité :

Pour appliquer le théorème du petit gain, il est nécessaire de définir la stabilité plus précisément.

Stabilité nominale :

Nous distinguons deux définitions pour la stabilité nominale, la première est la *stabilité externe* qui exige que toute entrée bornée u doit produire une sortie bornée y . La deuxième définition est plus large et exige que tout signal injecté en n'importe quel point de la boucle génère une réponse bornée en tout autre point, elle s'appelle *stabilité interne*.

Stabilité robuste :

La stabilité est dite robuste si, en plus d'être nominale, la stabilité de tous les systèmes atteignables par les perturbations est garantie.

Performances nominales :

Un asservissement est performant s'il réagit rapidement, rejette les perturbations et suit avec précision la consigne.

Performances robustes :

Un système bouclé satisfait le critère de robustesse en performances si les conditions de performances nominales sont vérifiées pour toute une classe de modèles de procédés caractérisés par des incertitudes structurées ou non.

II.3.3 Conditions de robustesse des systèmes :

Un système asservi est robuste s'il reste stable, tout en assurant de bonnes performances, en présence des différents types d'incertitudes. En effet, la stabilité et les bonnes performances des systèmes multivariables en boucle fermée sont les grandes priorités de la commande robuste. Afin de connaître si une loi de commandes est robuste, des contraintes sur la stabilité et sur les performances doivent être imposées [15] :

- a. poursuite des grandeurs de sorties
- b. rejet de l'effet des perturbations
- c. désensibilisation aux incertitudes de modèles
- d. bonnes marges de stabilité
- e. désensibilisation aux bruits de mesures

Ceci engendre la vérification de conditions, dites de *robustesse sur la stabilité* et de *robustesse sur les performances*.

a- Condition de robustesse sur la stabilité :

Un système multivariable est considéré comme stable s'il possède de bonnes marges de Stabilité (marges de gain et de phase). C'est le principal objectif de tout type de commande des systèmes multivariables. Toutefois, la synthèse pour l'obtention des contrôleurs s'effectue sur un modèle nominal, il ne décrit pas toujours le procédé réel avec exactitudes et précisions, d'où le recours à la notion d'incertitudes.

Définition : ([6], [19]) Supposons que le modèle nominal $G(s)$ soit stable (avec $\Delta_m(s) = 0$), alors le régime perturbé est également stable si et seulement si :

$$\sigma_{\max} [T(j\omega)] < \frac{1}{\sigma_{\max} [W_t(j\omega)]} \quad \forall \omega \geq 0 \quad (\text{II.5})$$

Avec,

$W_t(s)$ est la matrice des spécifications sur la stabilité.

$\Delta_m(s)$ est la fonction qui renferme les incertitudes.

$\sigma_{\max}[T(j\omega)]$ est la valeur singulière maximale de $T(j\omega)$.

L'expression (II.5) indique la condition de robustesse sur la stabilité. Il reste à définir la matrice des spécifications sur la stabilité. Généralement, le choix de cette matrice est effectué de telle sorte à ce que [6] :

$$\sigma_{\max} [\Delta_m(s)] \leq \sigma_{\max} [W_t(s)] \quad (\text{II.6})$$

Il est important de noter, que les incertitudes qui sont traités dans ce qui suit sont uniquement les incertitudes de type non structurées.

Chaque régime perturbé lui correspond un modèle de perturbations, le rôle de l'expression (II.6) est de prendre en compte de tous les régimes perturbés tolérés. Si les gains principaux du transfert $T(j\omega)$ sont inférieurs à la valeur singulière maximale de la spécification sur la stabilité $W_t(j\omega)$, les régimes perturbés seront donc stables et la stabilisation du système en boucle fermée est satisfaite. On parlera alors de robustesse du contrôleur $K(j\omega)$.

b- Condition de Robustesse sur les performances :

Ayant abordé la robustesse sur la stabilité, il est aussi important de l'appliquer sur les performances. Parmi les performances que doit satisfaire le contrôleur $K(j\omega)$ on cite [1] :

- La régulation face aux effets des perturbations : insensibilités des sorties face aux perturbations agissant sur le système
- Le découplage des entrées / sorties du système
- La limitation des signaux critiques, c'est-à-dire délivrer aux actionneurs des signaux acceptables et surtout tolérables.

Concrètement, la robustesse sur les performances signifie que les performances désirées sont garanties pour tous les modèles perturbés compris dans la synthèse. Le raisonnement pour l'obtention de la robustesse sur les performances est similaire à celui pour la robustesse sur la stabilité, où l'on utilise une matrice d'incertitudes fictives (fixée par le cahier des charges). A ce stade de l'étude, il est important de noter, que les incertitudes qui sont traités dans ce qui suit sont uniquement les incertitudes de type non structurées.

En résumé on peut dire que pour avoir de bonnes performances passe par la minimisation de certains signaux, particulièrement le signal d'erreurs $e(s)$. Sachant que le signal d'erreur est défini par l'expression $e(s) = r(s) - y(s)$, minimiser le signal d'erreurs revient à minimiser la norme de la matrice de sensibilité $S(s)$.

Définition :

Si la robustesse sur la stabilité est respectée, alors le régime perturbé assure les performances désirées si et seulement si ([6], [19]) :

$$\sigma_{\max} [S(jw)] < \frac{1}{\sigma_{\max} [W_p(jw)]} \quad \forall w \geq 0 \quad (\text{II.7})$$

Où $W_p(jw)$ désigne la matrice des spécifications sur les performances.

L'expression (II.7) représente la **condition de robustesse sur les performances**.

II.4 Principe de la commande robuste H_∞ :

La commande robuste ou **commande H_∞** apporte une solution (si elle existe) au problème de contrôle, représenté dans la figure (2.1), avec un certain nombre de contraintes [15]. Elle permet de prendre en compte des spécifications données par le cahier de charge qui peut contenir quatre classes de spécifications [15], [25].

- **Suivi de trajectoires de référence (consignes)** : il s'agit d'étudier l'influence du signal de référence $r(t)$ sur le signal d'erreur $\varepsilon(t)$
- **Rejet/ atténuation de signaux de perturbation** : il s'agit d'étudier l'influence du signal de perturbation $b(t)$ sur le signal d'erreur $\varepsilon(t)$
- **Atténuation des bruits de mesure** : il s'agit d'étudier l'influence des signaux de bruit $w(t)$ sur le signal de commande $u(t)$ et sur le signal de sortie $y(t)$
- **Commande modérée** : il s'agit d'étudier l'influence des signaux de référence $r(t)$ et du signal de perturbation $b(t)$ sur le signal de commande $u(t)$

Une notion incontournable dans l'étude de la commande des systèmes multivariables est la **stabilité interne** du système en boucle fermée. Dans un premier temps, il faut convertir les spécifications exprimées dans le domaine temporel (temps de réponse, erreur statique, etc.) vers le domaine fréquentiel et ce pour pouvoir définir des gabarits fréquentiels.

La formulation du problème de la synthèse H_∞ , prend en compte de ces gabarits fréquentiels sous forme de pondérations (i.e. les objectifs de commande) ainsi que du modèle du système à contrôler.

D'autres méthodes de contrôle traitent également des critères mathématiques qui permettent une traduction plus fidèle du cahier des charges, cependant il est important de s'assurer que:

1. Le critère ne doit pas être trop complexe et difficile à manipuler et à comprendre
2. Les algorithmes de synthèse de correcteurs ne sont pas "efficaces" à cause du temps de calcul qui est parfois trop
3. La classe des systèmes considérés est assez réduite
4. Le niveau d'automatisation de la méthode de synthèse est assez faible.

II.5 Concepts de base de la commande H_∞ :

II.5.1. Fonctions de sensibilité :

Considérons le schéma typique de la configuration d'un système en boucle fermée représenté par la (Figure 2.1) [01], [07], [25], où $G(s)$ représente le modèle du système à commander et $K(s)$ le contrôleur dont le rôle est de générer les commandes à appliquer à partir des sorties observées et des signaux de référence

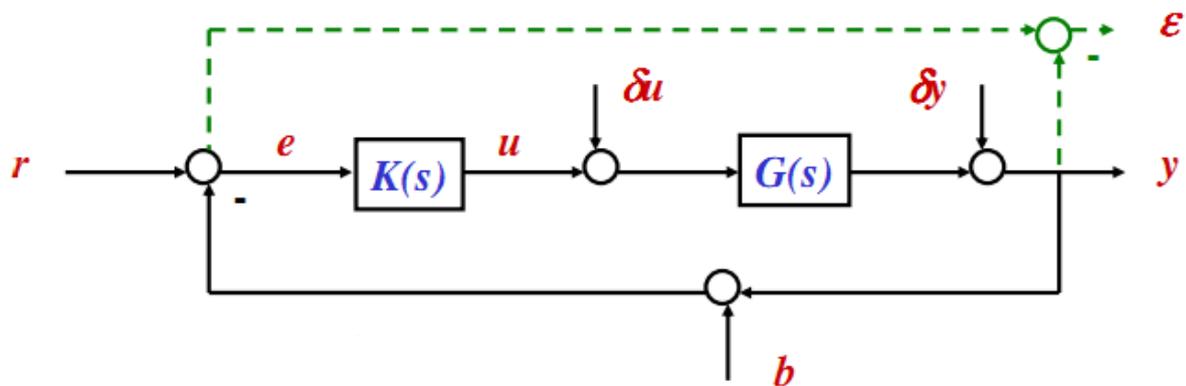


Figure (II.1) : schéma bloc d'un système asservi multivariable

$r(t)$ Signal de consigne ou de référence

$\varepsilon(t)$ L'erreur réelle de suivi de référence

$u(t)$ Signal de commande

$y(t)$ La sortie à asservir

δ_u Perturbations sur la commande

δ_y Perturbations sur la sortie

$b(t)$ Bruits de mesure

Ce schéma fonctionnel, permet de mettre en évidence un certain nombre de transfert en boucle fermée, qui peuvent se à considérer. Ce sont des transferts entre les signaux exogènes d'entrées et les signaux de commande et de sortie. Pour ce la, nous écrivons les relations entre les différents signaux [1]

$$\varepsilon(s) = T_{r\varepsilon} \cdot r(t) + T_{\delta u\varepsilon} \cdot \delta u(s) + T_{\delta y\varepsilon} \cdot \delta y(s) + T_{b\varepsilon} b(s) \quad (\text{II.8})$$

$$y(s) = T_{ry} r(s) + T_{\delta uy} \cdot \delta u(s) + T_{\delta yy} \cdot \delta y(s) + T_{by} \cdot b \quad (\text{II.9})$$

$$U(s) = T_{ru} \cdot r(s) + T_{\delta uu} \delta u(s) + T_{\delta yu} \delta y(s) + T_{bu} b(s) \quad (\text{II.10})$$

La fonction T_{ij} indique le transfert entre le signal d'entrée et le signal de sortie.

Dans le cas d'un système SISO, quatre transferts différents sont nécessaires pour d'écrire complètement le système bouclé. Ils s'écrivent en fonction de K et G de la façon suivante [25] :

$$T_{r\varepsilon}(s) = [1 + K(s)G(s)]^{-1} \quad (\text{II.11})$$

$T_{r\varepsilon}(s)$: est souvent notée $S(s)$ et est appelée *fonction de sensibilité*

$$T_{ry}(s) = K(s)G(s)[1 + K(s)G(s)]^{-1} \quad (\text{I.12})$$

$T_{ry}(s)$ est souvent notée $T(s)$ et appelée *fonction de transmission*, car elle relie l'entrée de consigne r à la sortie. Elle est aussi nommée fonction de *sensibilité complémentaire* car on a la relation :

$$S(s) + T(s) = \frac{1}{1 + G(s)K(s)} + \frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)} = 1 \quad (\text{II.13})$$

$$T_{ru}(s) = K(s)[1 + K(s)G(s)]^{-1} \quad (\text{II.14})$$

$$T_{\delta uy}(s) = K(s)[1 + K(s)G(s)]^{-1} \quad (\text{II.15})$$

II.6 Synthèse de loi de commande par l'approche H_∞ :

II.6.1 Problème H_∞ standard :

Pour calculer au mieux une loi de commandes pour un procédé, dans le but de contrôler des sorties qui sont éventuellement soumis à des perturbations, il est bien sûr évident d'utiliser un *modèle du procédé*, mais aussi prévoir *un modèle pour les perturbations* et un *modèle pour les performances*. Il existe plusieurs représentations susceptibles d'être employées pour les problèmes de commandes des systèmes multivariables en boucle fermée, cependant il est courant d'utiliser une *formulation générale* pour les problèmes d'optimisation par H_2 et H_∞ , permettant de réunir tous ces modèles à la fois dans la même représentation.

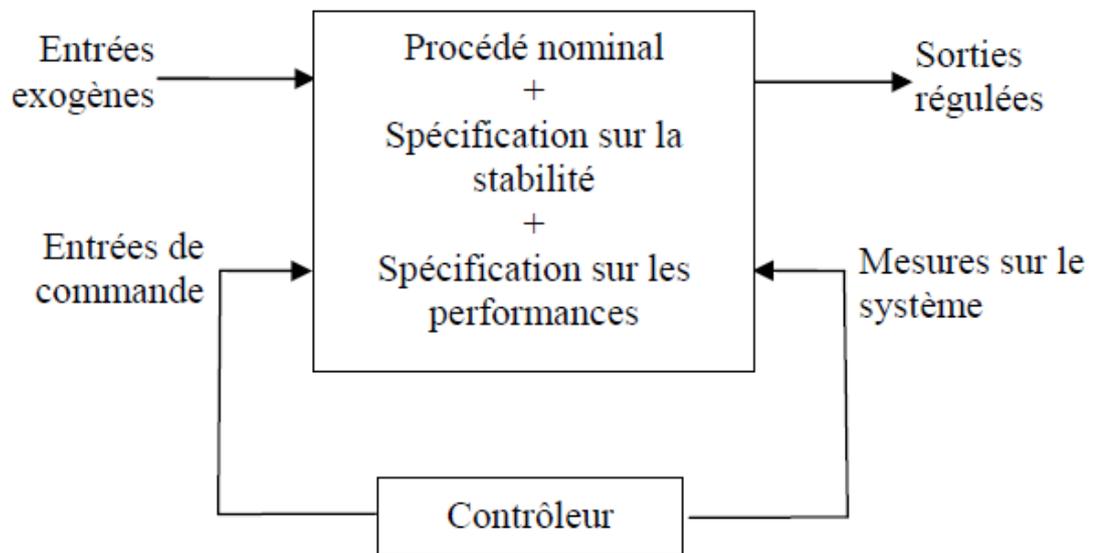


Figure (II.2) : Schéma synoptique du problème standard

La figure (II.2) montre le *schéma synoptique* de la configuration du *problème standard*, tant dis que la configuration du système multivariable en boucle fermée avec les différentes spécifications (ou fonctions de pondérations) est illustrée dans la figure (II.3).

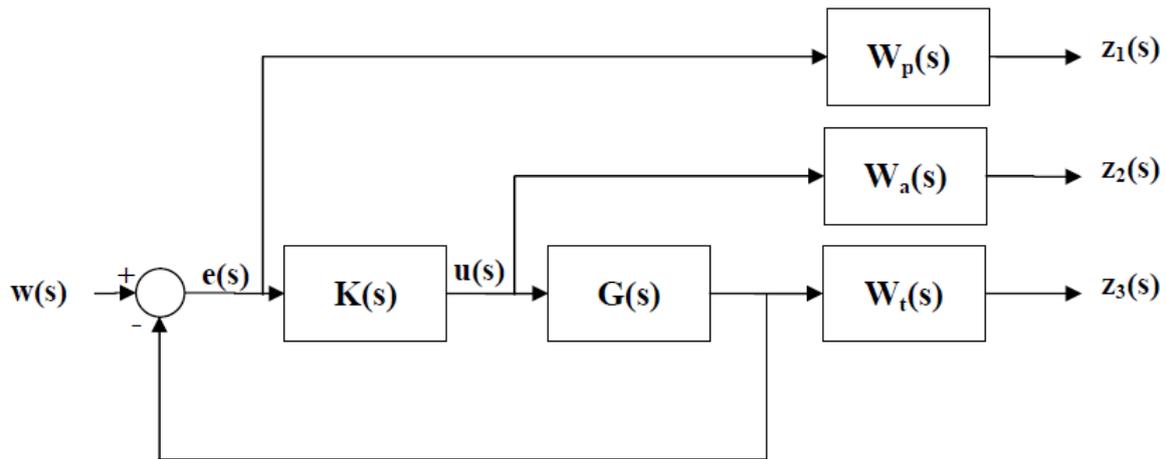


Figure (II.3) Formulation du problème standard en boucle fermée avec les Différentes spécifications

Où : $s = j\omega$

et,

$W_t(s)$: matrice de transfert de la spécification sur la stabilité.

$W_a(s)$: matrice de transfert relative à l'erreur de type additive.

$W_p(s)$: matrice de transfert de la spécification sur les performances.

La configuration générale du problème standard, [5] est reprise dans la figure (II.4) en condensé, ou elle montre le problème sous la forme de la **représentation LFT** ou Linear Fractional Transformations ([7], [21])).

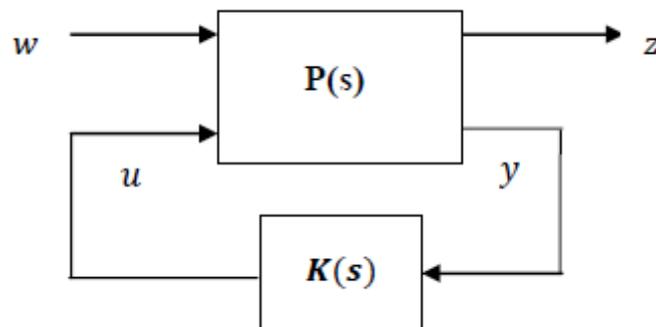


Figure (II.4) Problème H^∞ Standard sous la forme LFT

où

W représente des entrées extérieures : signaux de référence, perturbations et les bruits.

U représente le vecteur commande

Z vecteur sont choisis pour caractériser le bon fonctionnement de l'asservissement; enfin

Y représente les mesures disponibles pour élaborer la commande.

La matrice de transfert $P(s)$ qui est supposé linéaire invariant dans le temps, modélise les interactions dynamiques entre deux ensemble d'entrées et deux ensembles de sorties, tandis que $K(s)$ désigne le correcteur que l'on cherche à calculer. Le système P admet la représentation d'état suivante [63] :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t) \\ Z(t) &= C_1 x(t) + D_{11} w(t) + D_{12} u(t) \quad (\text{II.16}) \\ y(t) &= C_2 x(t) + D_{21} w(t) + D_{22} u(t) \\ w(t) &\in R^{m_2} \\ u(t) &\in R^{m_2} \\ z(t) &\in R^{p_1} \\ y(t) &\in R^{p_2} \\ x(t) &\in R^n \end{aligned}$$

avec,

m_1 représente le nombre d'entrées exogènes, p_1 le nombre de sorties régulées, m_2 le nombre de commandes, p_2 le nombre de mesures, n l'ordre de la représentation d'état.

Dans le domaine de Laplace, les équations du système se réécrivent :

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} (sI - A)^{-1} [B_1 \quad B_2] \quad (\text{II.17})$$

A partir de la figure (2.3) le système peut être défini par :

$$\begin{bmatrix} z(s) \\ y(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(s) \\ u(s) \end{bmatrix} \quad (\text{II.18})$$

Ainsi, on calcule aisément la matrice de transfert entre les entrées exogènes $w(t)$ et les sorties régulées $z(t)$ tel que $z = T_{zw}(s)$ du système bouclé.

Par ailleurs, pour une loi de commande $u(s) = K(s)y(s)$ connue T_{zw} , peut se calculer de la façon suivante :

De (2.18) nous pouvons écrire :

$$z = P_{11}(s)w(s) + P_{12}(s)K(s)y(s) \quad (\text{II.19})$$

Comme :

$$y = P_{21}(s)w(s) + P_{22}(s)u(s) = P_{21}(s)w(s) + P_{22}(s)k(s)y(s) \quad (\text{II.20})$$

Alors il vient

$$y(s) = (sI - P_{22}(s)K(s))^{-1} P_{21}(s)w(s) \quad (\text{II.21})$$

Finalement, le transfert entre les entrées exogènes et les sorties commandées est fourni par :

$$T_{zw}(s) = F_l(P, K) = P_{11}(s) + P_{12}(s).K(s)(sI - P_{22}(s).K(s))^{-1} P_{21}(s) \quad (\text{II.22})$$

Cette expression, généralement notée $F_l(P(s), K(s))$, est appelée **Transformation Fractionnaire Linéaire Inférieure, LFT_l**, ce qui mène à l'équation suivante $z = F_l(P, K).w$

II.6.2 Formulation du problème standard

Le problème H_∞ standard basé sur la minimisation d'un critère de type H_∞ , peut être formulé sous deux formes différentes : la forme optimale et la forme sous-optimal [18], [39].

• Problème H_∞ standard sous-optimal

Trouver $K(s)$ qui stabilise le système de la figure (2.4), c'est à dire tous les pôles du système en boucle fermée sont à partie réelle strictement négative et qui assurent : $\|F_l(P(s), k(s))\|_\infty < \gamma$ avec $\gamma > 0$, Les correcteurs satisfaisant ces deux conditions sont dits sous-optimaux

• Problème H_∞ standard optimal

$P(s)$ Étant donné, trouver $K(s)$ qui :

- Stabilise de manière interne le système bouclé de la figure (II.4)
- Minimise $\|F_l(P(s), k(s))\|_\infty$

En résumé, le problème H_∞ consiste à:

i) $F_l(P(s), k(s))$ soit stable,

Trouver le correcteur $K(s)$ tel que:

ii) $\|F_l(P(s), k(s))\|_\infty < \gamma$

Les correcteurs assurant la plus petite valeur de γ possible seront dits « optimaux ».

II.7. Résolution du problème H_∞

II.7.1 Représentation d'état du système

La formulation LFT et l'approche par variable d'état offrent un cadre méthodologique riche pour la résolution de problèmes de commande, notamment dans le cas de la synthèse H_∞ . Nous reprenons donc ici les notations usuelles pour la forme standard exprimée en espace d'état. La représentation d'état du système augmenté, figure (2.4), est donnée classiquement sous la forme suivante : [13], [14], [32].

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ z(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{II.21})$$

avec $\dim x = n, \dim w = m_1, \dim u = m_2, \dim z = p_1, \dim y = p_2$

L'approche H_∞ standard nécessite la vérification d'un certain nombre d'hypothèses :

- 1- La paire $(A; B_2)$ est stabilisable et la paire $(C_2; A)$ est détectable. Cette hypothèse classique, est commune à toute méthode utilisant les variables d'état. Elle garantit l'existence d'une loi de commande $K(s)$ qui stabilise le système en boucle fermée.

- 2- $\text{rang}(D_{12}) = m_2$ et $\text{rang}(D_{21}) = p_2$ (II.22)

Ce sont des conditions suffisantes pour assurer que la matrice de transfert du Correcteur soit propre.

- 3- $\forall w \in \mathbb{R}^m, \text{rang} \begin{bmatrix} A - jwI_n & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix} = n + m_2$ (II.23)

Cette hypothèse garantit que le transfert $p_{z \rightarrow u}(p_{12})$ n'a pas de zéro sur l'axe Imaginaire.

- 4- $\forall w \in \mathbb{R}^m, \text{rang} \begin{bmatrix} A - jwI_n & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix} = n + p_2$ (II.24)

Cette hypothèse garantit que le transfert n'a pas de zéro sur l'axe imaginaire.

Il faut noter que la première hypothèse est commune à toutes les méthodes de commande, les autres sont propres à la méthodologie H_∞ [39], et ces quatre hypothèses doivent être impérativement vérifiées. Pour simplifier les expressions précédentes, des conditions supplémentaires sont introduites [18],[25],[27],[32] :

$$D_{11} = D_{22} = 0 \text{ (II.25)}$$

$$D_{12}^T (C_1 \quad D_{12}) = (0 \quad I_{m_2}) \text{ (II.26)}$$

$$\begin{pmatrix} B_1 \\ D_{21} \end{pmatrix} D_{21}^T = \begin{pmatrix} 0 \\ I_{p_2} \end{pmatrix} \text{ (II.27)}$$

Rappels

1. Un système d'ordre n ayant pour équation $\dot{x} = Ax + B_2 u$ est **commandable**, donc **stabilisable**, si la matrice de commandabilité $\begin{bmatrix} B_2 & AB_2 & \dots & A^{n-1} B_2 \end{bmatrix}$ est de rang plein. Par conséquent (A, B_2) est dit observable.

2. Aussi, pour un système d'ordre n ayant pour équation $\begin{matrix} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = C_2 x + Du \end{matrix}$ est **observable**, donc

déTECTABLE, si la matrice d'observabilité $\begin{bmatrix} C_2 \\ C_2 A \\ \vdots \\ C_2 A^{n-1} \end{bmatrix}$ est de rang plein. Par conséquent, (C_2, A) est

dit observable.

3. Ces hypothèses là sont fondamentales, par contre les trois dernières sont purement techniques et permettent d'alléger les calculs et fournir une simplification des expressions analytiques [22], [32].

II.8 Résolution du problème H_∞ standard par équations de Riccati : Glover-Doyle

Cette méthode, aussi connue sous le nom d'**algorithme de Glover-Doyle**, est apparue à la fin des années 80 [GIDo, DGKF]. Elle reste aujourd'hui la méthode de résolution la plus utilisée.

Soient $P = P^T, Q = Q'$ des matrices de mêmes dimensions que A . On note:

$$X = Ric \begin{bmatrix} A & -P \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \text{ (II.28)}$$

$$XA + A^T X - XPX + Q = 0 \text{ (II.29)}$$

Quand elle existe, la solution symétrique de l'équation de Riccati (2.28) est telle que toutes les valeurs propres de $A - P X$ ont une partie réelle strictement négative.

Ainsi, pour résoudre le problème H_∞ standard, on suppose donc satisfaites (A, B_u) stabilisable et (C_y, A) est détectable, les hypothèses (2.22), (2.23), (2.24) peuvent être posées.

II.8.1 Problème de sensibilité mixte

Le problème de sensibilité mixte est un cas spécial du problème H_∞ standard. Il consiste à trouver un contrôleur robuste $K(s)$ capable de maintenir la stabilité en boucle fermée et d'assurer les performances requises ([3], [20]) tel que :

$$\|T_{zw}(s)\|_\infty < \gamma = \left\| \begin{array}{c} W_p S \\ W_u K S \\ W_t T \end{array} \right\| < \gamma \quad (\text{II.30})$$

Dans le problème de la sensibilité mixte, l'accent est mis sur W_t et W_p , qui sont respectivement les spécifications sur la *stabilité* et sur les *performances* pour garantir que la commande des systèmes multivariables en boucle fermée assure la dualité entre [11]:

- Atténuation et rejet des perturbations,
- et robustesse

En effet, l'association de la sensibilité $S(s)$ et de la sensibilité complémentaire dans la synthèse, aura pour conséquence l'atténuation de l'effet des perturbations, tandis que le problème de poursuite de la sortie z sur l'entrée w sera assuré [18],[12].

Dans ce cas, le problème H_∞ standard devient de la sorte :

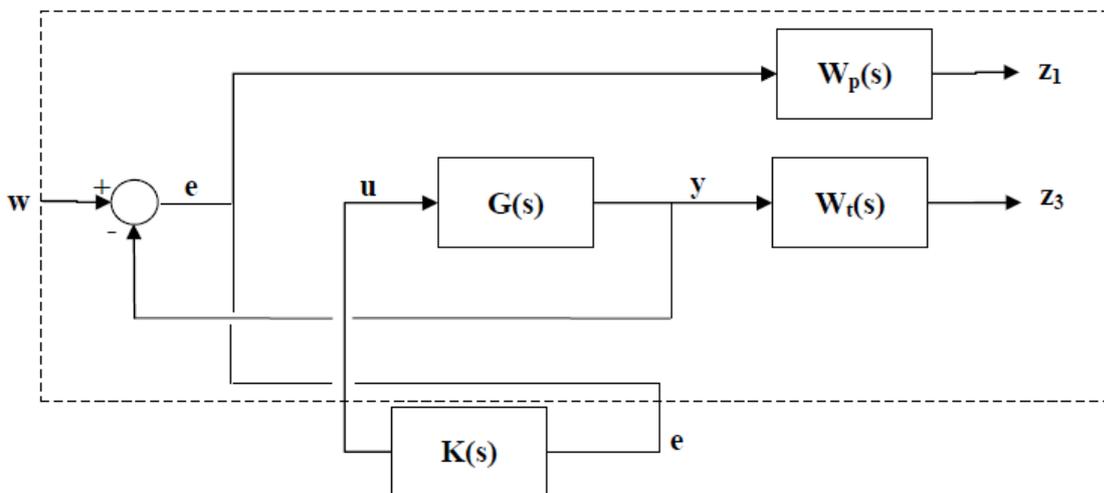


Figure (II.5) Problème de sensibilité mixte sous forme standard

D'après la configuration présentée sur la figure (II.5) on note que :

$$\begin{aligned} e &= w - G(s)u \\ z_1 &= w_p(s)e = w_p(s)(w - G(s)u) \quad (\text{II.31}) \\ z_3 &= w_t(s)G(s)u \end{aligned}$$

Sous forme matricielle, on écrit :

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_3 \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_p & -W_p G \\ 0 & W_t G \\ I & -G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \quad (\text{II.32})$$

Le système augmenté P utilisé pour la synthèse du contrôleur a pour expression :

$$P = \begin{bmatrix} W_p & -W_p G \\ 0 & W_t G \\ I & -G \end{bmatrix} \quad (\text{II.33})$$

tel que :

$$P_{11} = \begin{bmatrix} W_p \\ 0 \end{bmatrix} \quad P_{12} = \begin{bmatrix} -W_p G \\ W_t G \end{bmatrix} \quad (\text{II.34})$$

$$P_{21} = I \quad P_{22} = -G \quad (\text{II.35})$$

La solution au problème d'optimisation par H_∞ précédemment énoncé sera réalisée par l'itération sur le paramètre γ et le contrôleur robuste $K(s)$ optimal devra satisfaire la condition $\|T_{zw}(s)\|_\infty < \gamma$. Donc, le paramètre γ permettra de satisfaire le compromis **Stabilité / Performances**.

II.8.2 Algorithme d'optimisation par H_∞

Pour la détermination de contrôleurs robustes par la synthèse H_∞ avec les étapes que l'on a décrites dans les paragraphes précédents, il est préférable de recourir à un algorithme de calculs, qui permet l'obtention du contrôleur robuste de façon plus rapide et plus précise.

En effet, toutes ces étapes de calculs sont jugées longues et fastidieuses, car il faut les effectuer pour chaque valeur du paramètre γ . Il est donc préférable de recourir à un algorithme de calculs, ce qui permettra l'obtention du contrôleur robuste de façon plus rapide et plus précise.

On présente un algorithme de calcul pour la détermination du contrôleur robuste.

1. Choix des spécifications W_t , W_p et W_a .
2. Réalisation du système augmenté $P(s)$.
3. prendre $\gamma = 1$, faire la synthèse du contrôleur H_∞ .
4. Calcul de la fonction coût T_{zw} .
5. Si $\|T_{zw}(j\omega)\|_\infty < 1$ aller à 7.
6. Sinon ajuster γ et aller à 2.
7. Evaluation des résultats fréquentiels et temporels.
8. Si les résultats sont satisfaisants aller à 10.
9. Sinon ajuster γ et aller à 1.
10. Fin.

La figure (II.6), ci-dessous illustre l'algorithme d'optimisation par H_∞ , mis sous la forme d'un organigramme. Grâce à cet algorithme, il sera plus rapide d'aboutir à la structure des contrôleurs $K(s)$, en plus d'avoir la possibilité d'affiner les résultats de la synthèse avec paramètre d'ajustement γ , l'implémentation sera réalisée par les logiciels présents dans la bibliothèque Robust ControlToolbox de MATLAB [4].

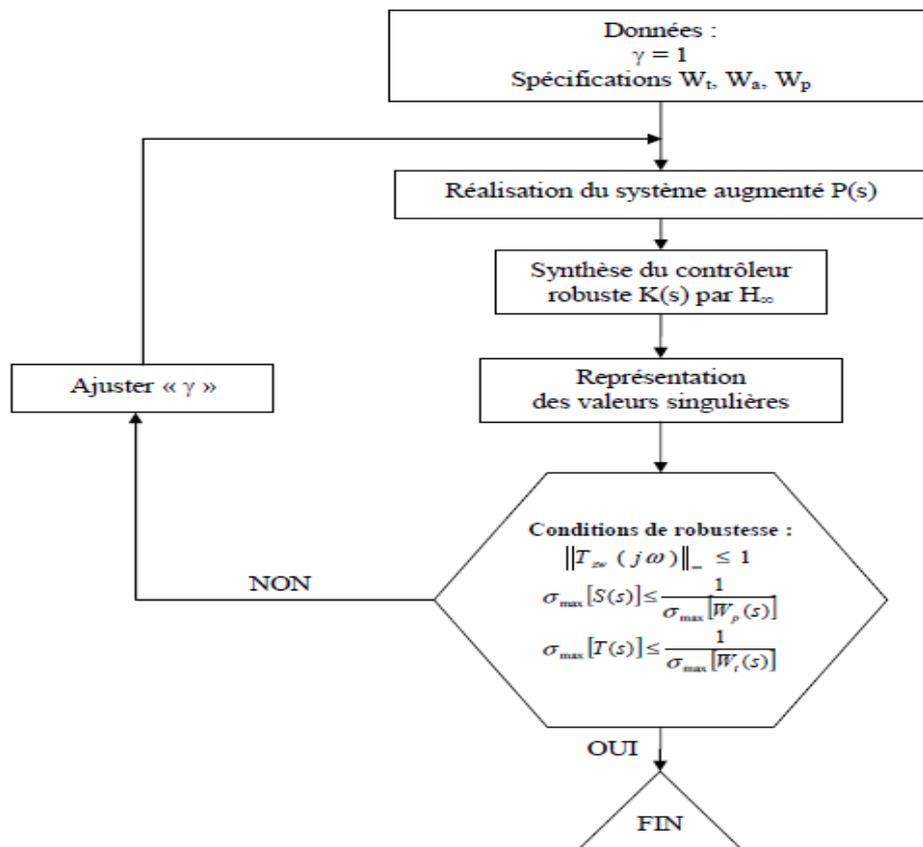


Figure (II.6) Organigramme de la procédure d'optimisation par H_∞

II.9 Conclusion

Dans ce chapitre on a essayé de présenter, aussi succinctement et aussi clairement que possible, la théorie de base qui entoure la commande robuste Hinf. Ceci implique toutes les notions et les outils qui permettent d'aboutir à la conception d'une commande robuste, ce qui nous sera utile pour l'application de cette commande au système du pendule triple inversé. L'idée principale à retenir de ce type de commande est de réussir à traduire convenablement les objectifs de contrôle dictés par le cahier des charges en des pondérations fréquentielles qui se transformeront en des conditions de robustesse en performance et en stabilité que l'on impose au système en boucle fermée.

Chapitre III :
Résultat et Simulation

III.1 Introduction :

De manière générale, les pendules inversés sont des systèmes très utilisés dans la modélisation et représentent un challenge pour les ingénieurs car ils sont par nature des systèmes instables très complexes et difficiles à contrôler. On présente dans ce chapitre les résultats de simulation obtenus par application de la commande Hinfini que l'on a développé pour la stabilisation robuste d'un pendule triple inversé tiré à partir de [1].

Ainsi, les auteurs de cet article ont tenté de stabiliser ce pendule, très difficile à contrôler du fait qu'il soit un système multivariable couplé, et ce en utilisant la technique de commande LQ. Il s'agit donc pour nous, dans un premier temps de reprendre les résultats de ces auteurs et les employer dans le domaine fréquentiel pour mieux apprécier leur comparaison avec les résultats que l'on a obtenus suite à l'application de la commande Hinfini, puisqu'elle est développée exclusivement dans le domaine fréquentiel.

III. 2 Application de la commande LQ sur le système de pendule :

Sans trop rentrer dans les détails de la synthèse linéaire quadratique dénommée LQ ou encore LQR (Linéaire Quadratique Régulateur) [13], car elle ne fait pas l'objet de notre étude, on rappelle qu'elle consiste en la recherche d'une matrice de gain K, telle que la commande par retour d'état $u(t) = -K z(t)$ stabilise le système et minimise le critère quadratique suivant :

$$\mathfrak{J} = \int_0^{\infty} (\dot{z}^T Q z + u^T R u) dt \quad \text{III.1}$$

$z(t)$ désigne le vecteur d'état, $u(t)$ le vecteur de commande, $y(t)$ le vecteur de sortie, avec les matrices de pondération Q et R satisfont

$$Q = Q^t \geq 0, R = R^T > 0 \quad \text{III.2}$$

La matrice de gain K optimale est donnée par :

$$k = -R^{-1}B^T \rho_0 \text{ III.3}$$

Où P_0 est la solution de l'équation algébrique de Riccati

$$\rho_0 A + A^T \rho_0 - \rho_0 B R^{-1} B^T \rho_0 + Q = 0 \text{ III.4}$$

L'obtention du gain K passe donc par la recherche de la solution P_0 symétrique définie positive de l'équation de Riccati qui est reportée dans 3.4, fournissant la matrice de gain K .

La synthèse des matrices de gain du contrôleur optimal, repose directement sur les matrices de pondération Q et R . On peut trouver dans la littérature deux méthodes pour les choisir. La première méthode est la règle de Bryson [16] qui suggère de choisir des matrices de pondération diagonales, dont les coefficients diagonaux sont égaux au carré de l'inverse de l'écart maximum souhaité sur la variable correspondante. Bryson [16] indique également que cette règle ne fournit que des valeurs initiales, que l'on peut ensuite améliorer par simulations successives.

$$Q = \text{diag} (q_1, q_2, \dots, q_n) \text{ et } R = \text{diag} (r_1, r_2, \dots, r_m) \quad \text{III.5}$$

Les matrices de pondération Q et R peuvent être choisies symétriques, diagonales :

- 1) Au départ, on choisit généralement des pondérations égales aux matrices d'identité.
- 2) Dans une seconde étape, on accélère ou on décélère globalement le système en multipliant la matrice Q par un scalaire p (accélération avec $p > 1$ et décélération avec $p < 1$), jusqu'à obtenir une dynamique moyenne adaptée.

- 3) Dans le cas où certains états auraient des dynamiques trop lentes par rapport à d'autres, on peut choisir d'augmenter la pondération de Q correspondant aux premiers.
- 4) Dans le cas où certains actionneurs seraient trop sollicités par rapport à d'autres, on peut choisir d'augmenter la pondération de R .

Le nombre d'état du modèle étant égale à 6 et le nombre d'entrées de commande étant $m=2$, et après application des règles décrites plus haut, les auteurs de [1] ont choisis les matrices de pondérations suivantes :

$$Q = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Une fois les coefficients de pondération Q et R sont obtenus, la matrice de gain K qui minimise la fonction quadratique s est calculée en utilisant la fonction 'lqr' de Matlab, on trouve:

$$K=1$$

III.2.1 Résultats de simulation par l'application du contrôleur LQR :

L'application du contrôleur LQR, conduit aux résultats suivants présentés dans le domaine fréquentiel afin de mieux pouvoir les comparer aux résultats obtenus par l'application du contrôleur H^∞ .

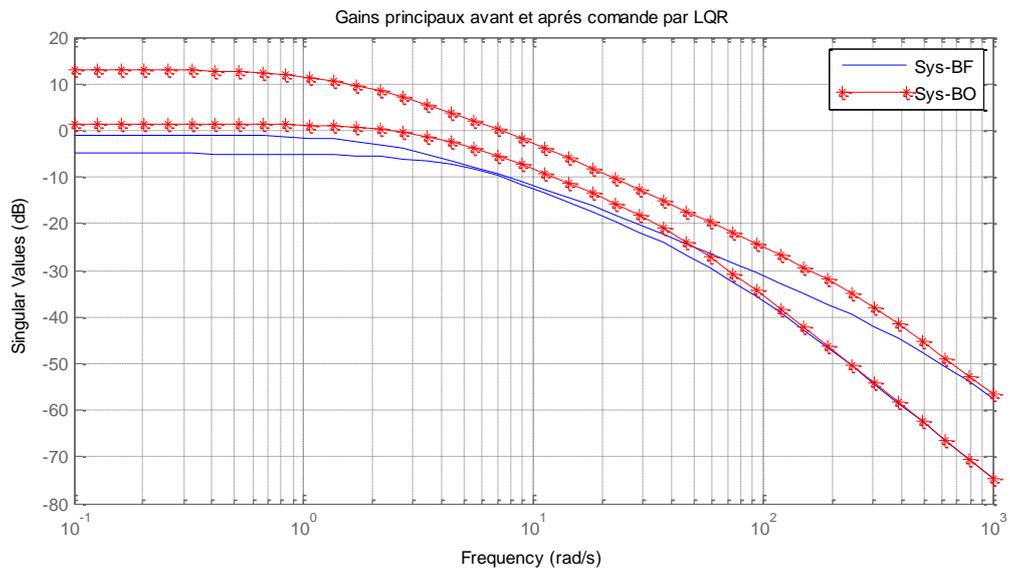


Figure III.1 Pendule triple inversé avant et après contrôle par LQR

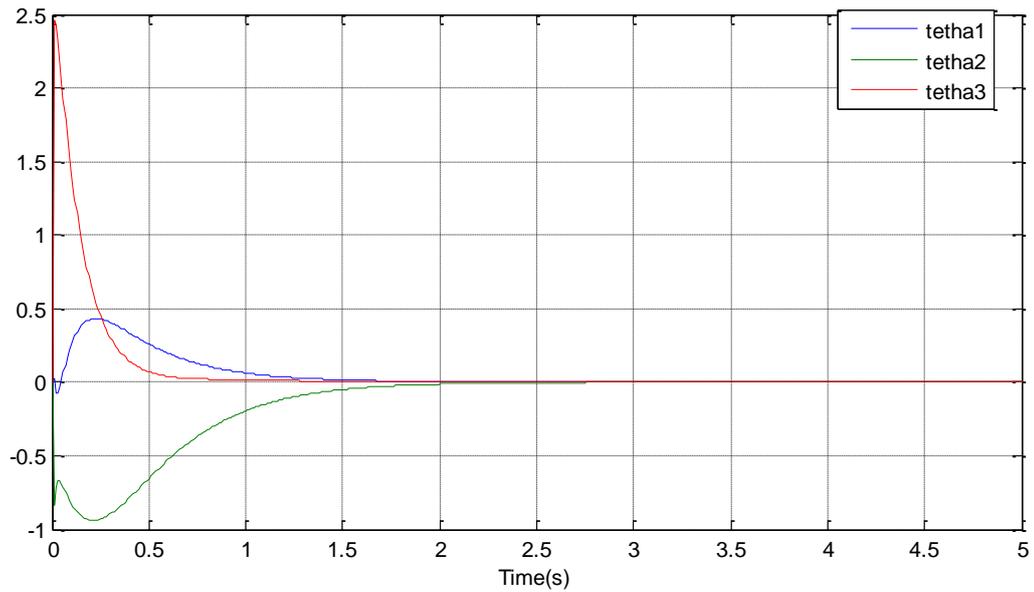


Figure III.2 Réponse impulsionnelle du système du pendule après contrôle par LQR

La figure 3.1 montre que le système du pendule triple inversé avant contrôle, dans le domaine fréquentiel et la figure (III.2) montre la réponse impulsionnelle du système après contrôle par LQR. Les pôles du système avant contrôle sont : -253.9042, -35.4296, -7.0963, 6.3254, 4.7096, 1.4950.

Après application du contrôleur LQR les pôles deviennent : -541.7436, -69.9071, -2.7484, -5.2101, -6.5277, -8.4427

On voit bien que ce contrôleur a réussi à obtenir la stabilisation du système mais assez proche risquant l'instabilité la moindre incertitude dans les calculs de Q et R ou encore dans les paramètres du modèle du pendule que les auteurs de [1] ont conçu en laboratoire.

III.2.2 Interprétation des résultats de simulation :

A partir des graphes de la figure (III.1), et (III.2) on constate que la commande linéaire quadratique LQR permet de stabiliser le pendule inversé, et elle montre l'efficacité du contrôleur LQR en termes de précision et de stabilité. On constate aussi que :

- Le système se stabilise au bout de 1.5s secondes, ce qui peut paraître relativement lent.
- Le découplage des sorties du système n'est pas complet néanmoins il est tolérable.
- La précision est plus ou moins assurée pour toutes les sorties.

Dans cette partie, nous avons repris la commande linéaire quadratique appliquée dans [1] pour la stabilisation du pendule inversé. Les résultats obtenus montrent que la commande LQR donne d'assez bons résultats en termes de performances et de stabilité. Cependant l'application d'une commande qui assure plus de performances et de stabilité est recommandée comme le soulignent les auteurs de [1]. En effet, pour stabiliser le système un choix des matrices de pondération est crucial. Une simple modification dans les matrices Q et R entraîne une large variation dans les performances du système. Il est aussi à noter que certaines configurations de ces matrices rendent le système instable. Le découplage des sorties du système n'est pas complet néanmoins il est tolérable.

III.2.3 Conclusions :

Le travail accompli par [1] est important vu la conception pratique du pendule en laboratoire, étant donné qu'il représente un système plutôt complexe à réaliser du point de vue contraintes qu'un tel projet peut engendrer sans compter l'implémentation de deux types de commandes qu'ils ont développé, dont l'une d'elle a été reprise dans notre travail à savoir la commande LQR. Néanmoins, ils ont souligné la nécessité de reprendre ce

travail pour mieux affiner les résultats compte tenu des faibles marges de stabilité et de performances obtenus.

III.3 Application de la commande H^∞ sur le système de pendule triple inversé :

Dans cette partie du chapitre, la théorie de la commande H^∞ est utilisée pour la résolution d'un problème de contrôle d'un système multivariable instable et non linéaire complexe à trois degrés de liberté qui est celui du pendule triple inversé. Il s'agit principalement de stabiliser ce système tout assurant des performances pour des constantes de temps très rapide. Ainsi, le système à contrôler est bien adapté pour tester les performances d'une commande robuste telle que la commande H^∞ , réputée pour sa capacité à inclure les objectifs de contrôle en ce qui concerne la stabilité et les performances dans la loi de synthèse du contrôleur.

III.3.1 Description des objectifs de contrôle :

Les objectifs de contrôle sont résumés dans la Fig.III.1. Les entrées du modèle du pendule sont les forces T_{m1} et T_{m2} . Les sorties du modèle sont les déplacements angulaires θ_i des trois bras du pendule avec $i = 1: 3$. Ainsi, agissant sur l'entrée du système, à travers des actions produites par deux moteurs placés au niveau des articulations 2 et 3, voir figure I. , nous désirons stabiliser le système du pendule et obtenir un bon taux de poursuite et de rejet des perturbations.

Pour cette raison que nous avons choisi de résoudre notre problème de contrôle par la *sensibilité mixte* qui offre une bonne réponse à la dualité *stabilité/performance*.

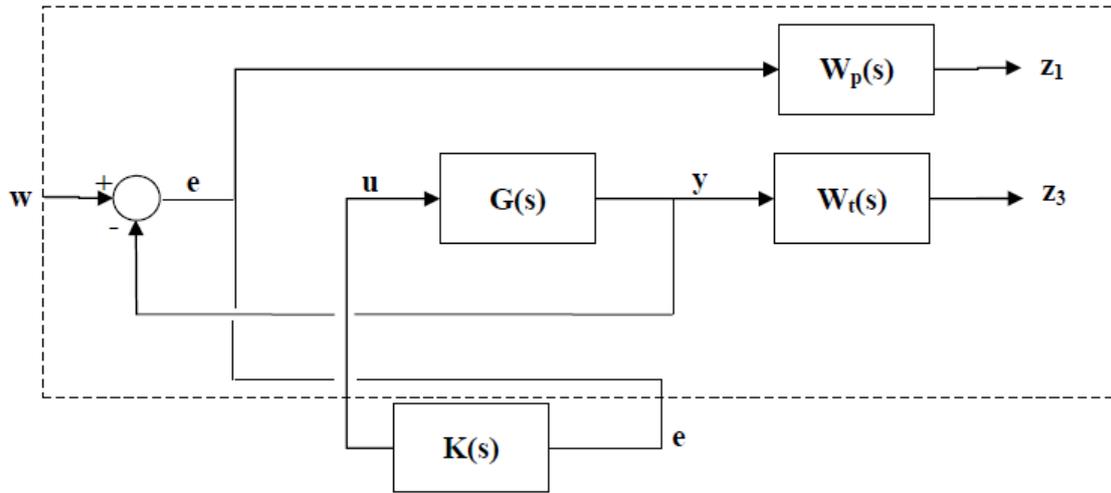


Figure III.3 Problème présenté sous la forme de la sensibilité mixte

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_3 \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_p & -W_p G \\ 0 & W_t G \\ I & -G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \quad \text{avec } u = [t_{m1} \ t_{m2}]^T \text{ et } y = [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3]^T$$

où,

$$P = \begin{bmatrix} W_p & -W_p G \\ 0 & W_t G \\ I & -G \end{bmatrix}$$

Avec,

$$P_{11} = \begin{bmatrix} W_p \\ 0 \end{bmatrix} \quad P_{12} = \begin{bmatrix} -W_p G \\ W_t G \end{bmatrix}$$

$$P_{21} = I \quad P_{22} = -G$$

Dans le problème de la *sensibilité mixte*, l'accent est mis sur W_t et W_p , qui sont respectivement les spécifications sur la *stabilité* et sur les *performances*.

La pondération W_p associée à la sensibilité $S(s)$ sert à assurer l'atténuation et le rejet des perturbations, tandis que la pondération W_t associée à la sensibilité complémentaire $T(s)$ sert à assurer la robustesse.

III.3.2 Choix des pondérations W_t et W_p :

Dans toute procédure de conception de contrôleurs par la méthode H_∞ , la priorité est d'utiliser des fonctions de transfert qui répondent aux exigences de contrôle tout en possédant le poids le plus bas (ordre) car ça augmente directement l'ordre du contrôleur, qui lui-même devrait être soumis à une réduction d'ordre, pour que la commande soit effectivement réalisable.

Les objectifs de contrôle peuvent se résumer :

- La bande passante en boucle fermée désirée $\omega_0 = 4.5$, temps de réponse de l'ordre de 0.3
- L'atténuation désirée des perturbations à l'intérieur de la bande passante d'un ratio de 1 à 1/1900 et donc $A = 0.0019$;
- Borne maximale imposée sur S et T de 3.03, $M = 3.03$

1- Spécifications sur les performances :

$$W_p = (s/M + \omega_0) / (s + \omega_0 * A);$$

$$W_p = (s + 13.64) / (3.03 s + 0.02591)$$

2- Spécifications sur la stabilité:

$$W_t = (s + \omega_0 / M) / (A * s + \omega_0);$$

$$W_t = (s + 1.485) / (0.0019 s + 4.5)$$

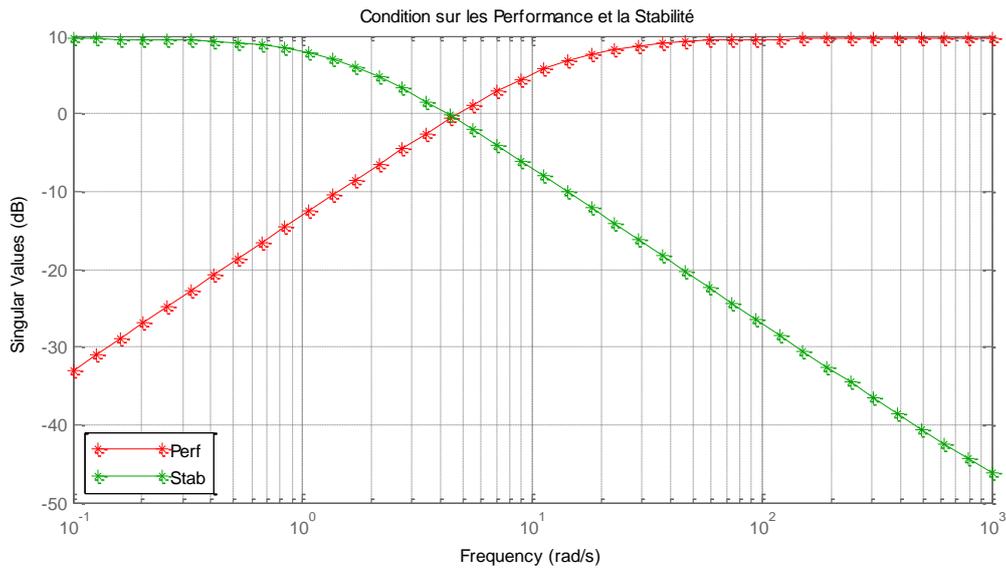


Figure III. 4 Condition sur les performances et stabilité

III.3.3 Modèle de simulation du système de pendule triple à contrôler :

Nous avons procédé à la simulation numérique du modèle du pendule triple inversé tiré à partir de [1], qui est en fait un système conçu en laboratoire sous forme d'une structure formée par trois bras et deux articulations étant donné que ce système est fixé par sa base. Ce type de système peut largement simuler un bras manipulateur pouvant être employé en industrie automobile par exemple, ou les grands engins employés dans le domaine de la construction. Avec un degré de liberté par bras, qui est le déplacement angulaire (rotation) résultant en un total de trois degrés de liberté pour tout le système. La représentation dans l'espace d'état du système dynamique, qui utilisent les déplacements angulaires θ_i et les vitesses angulaires comme vecteur d'état $\dot{\theta}_i$ avec i allant de 1 à 3, ainsi que les paramètres de la structure formée par les trois bras, ont été longuement détaillés dans le chapitre II, [1].

$$\begin{pmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{X}_3 \\ \dot{X}_4 \\ \dot{X}_5 \\ \dot{X}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 187,9 & -74,6 & 10,3 & -29,9 & 34,4 & -14,7 \\ -176,1 & 220,3 & -76,4 & 47,2 & -104,2 & 66,5 \\ 95,0 & -299,7 & 221,1 & -48,6 & 193,3 & -149,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -171,4 & 12,7 \\ 327,8 & -578,2 \\ -378,0 & 1302,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{m_1} \\ t_{m_2} \end{pmatrix} \quad (I.23)$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \end{pmatrix} \quad X = (\theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3 \quad \dot{\theta}_1 \quad \dot{\theta}_2 \quad \theta_3)^T$$

III. 4 Synthèse de contrôleur robuste par H_∞ :

Nous avons développé un programme en Matlab en utilisant la commande Hinfmi, pour synthétiser un contrôleur qui répond aux exigences de performance et de robustesse qu'on s'est fixées. Ces exigences, une fois traduites en pondération fréquentielles, W_t et W_p , sont incluses dans la loi de synthèse du contrôleur $K(jw)$, aboutissant aux résultats que l'on va exposer dans cette partie du travail. Etant donné que cette commande est une commande fréquentielle avancée, tous les résultats sont appréciés dans le domaine fréquentiel.

Le contrôleur $K(jw)$ assure :

$$\min \|F_l(P(s), k(s))\|_\infty$$

$$\|F_l(P(s), k(s))\|_\infty > \gamma \quad \text{Avec, } \gamma > 0$$

Ce contrôleur assure :

$$y(s) = (sI - P_{22}(s)K(s))^{-1}P_{21}(s)w(s)$$

Tel que:

$$P_{21} = I, \quad P_{22} = -G$$

III.4.1 Résultats de simulation :

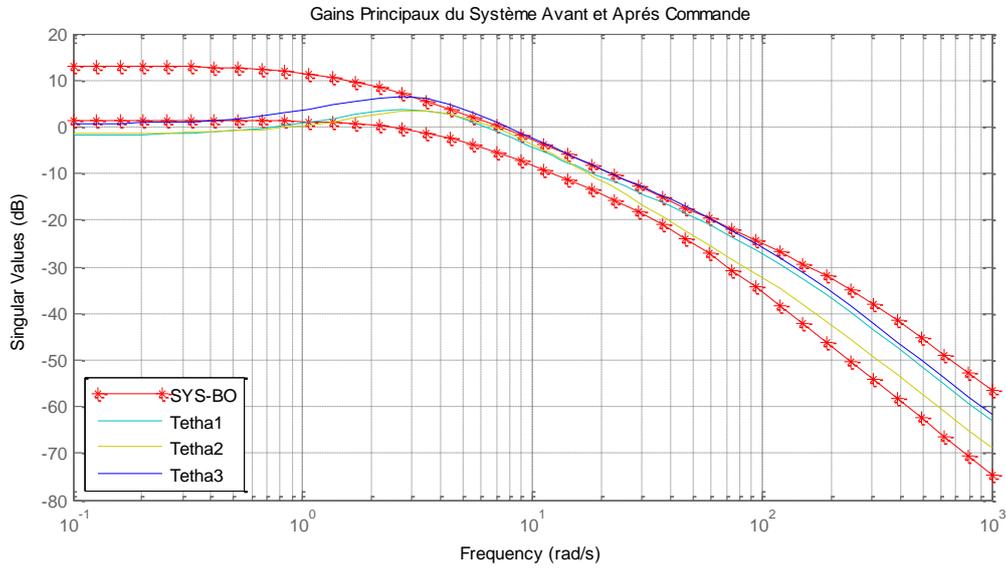


Figure III.5 Système du pendule inversé avant et après contrôle H_∞

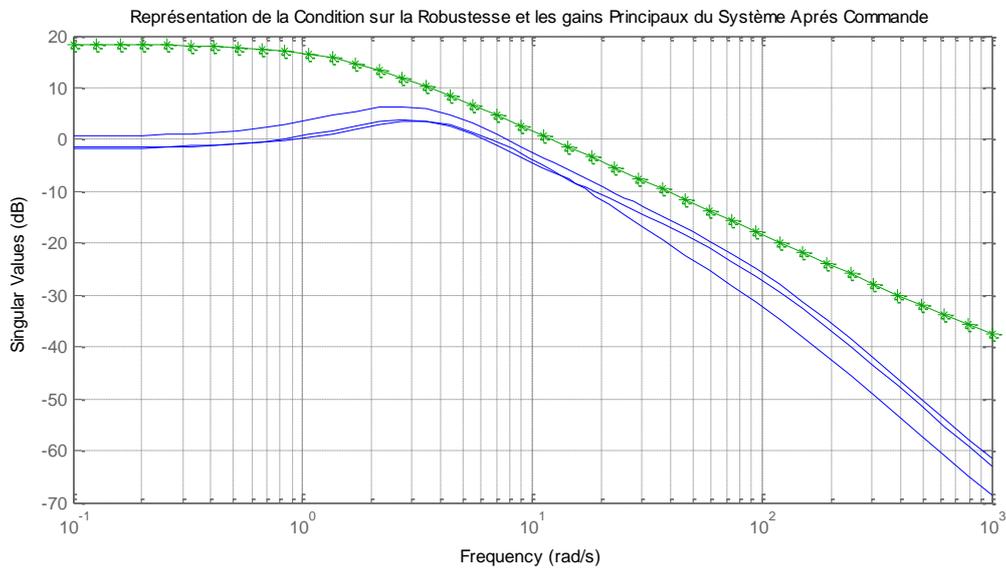


Figure III. 6 Vérification de la condition de robustesse sur la stabilité

Contrôleur H_∞

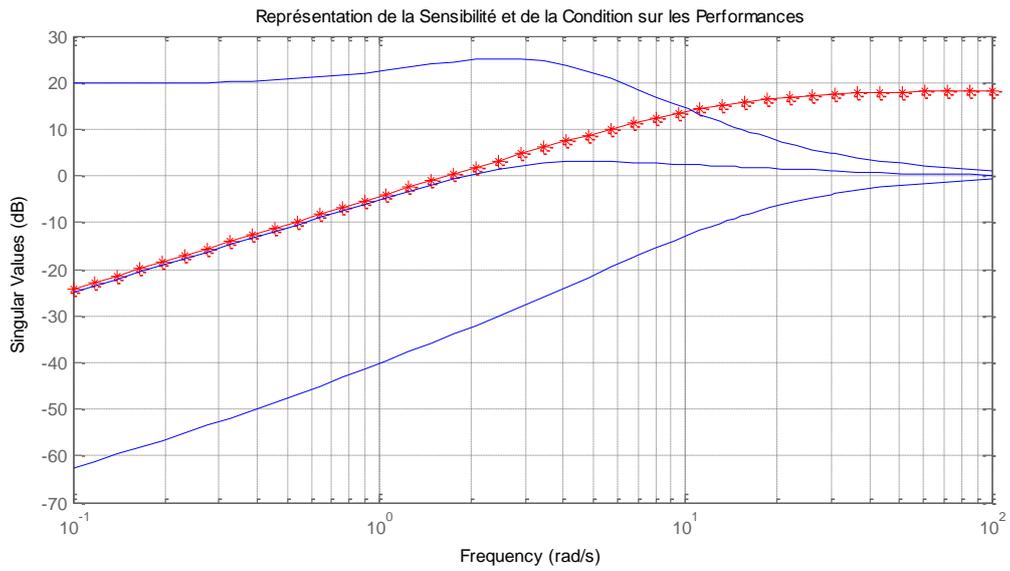


Figure III. 7 Vérification de la condition de robustesse sur les performances par H_{∞}

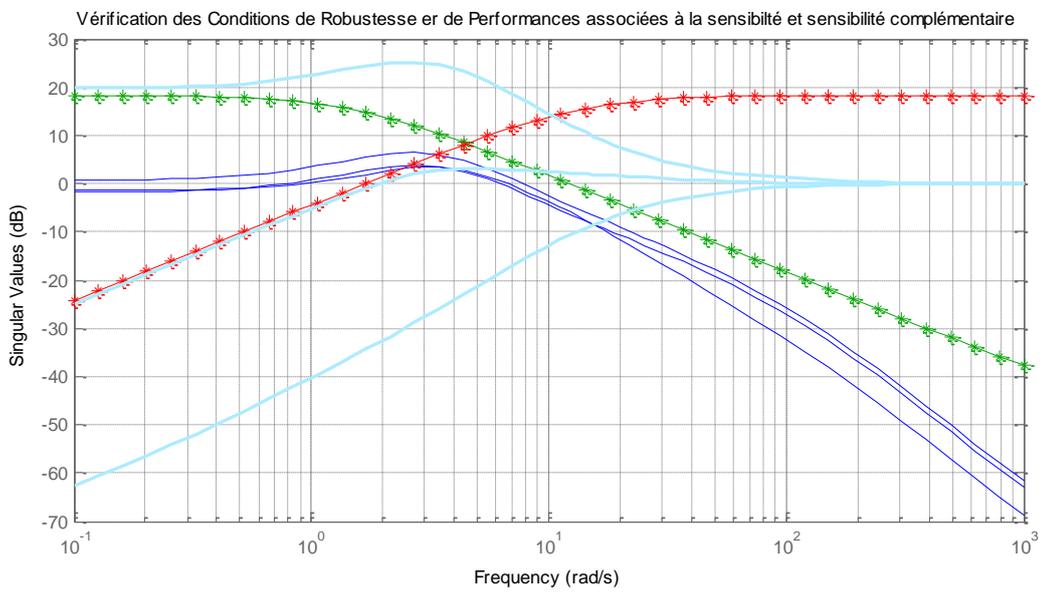


Figure III.8 Vérification des conditions de robustesse sur la stabilité et performances

Contrôleur H_{∞}

III.4. 2 Discussions des résultats :

On est parvenu, à obtenir des résultats assez probants suite à l'application du contrôleur H_∞ synthétisé sur le système de pendule, compte tenu des figures III.5,6,7,8, qui montrent que ce contrôleur a réussi jusqu'à une certaine limite à atteindre les objectifs de contrôle fixés puisque $\gamma < 3$, comme on l'a exigé, étant donné que le γ obtenu est égale 2.71, mais on peut encore ajuster les pondérations fréquentielles de sorte à minimiser encore plus γ . Ceci permettra d'approcher au mieux les objectifs de performance, qui semble ne pas être atteint au mieux.

Après analyse des résultats, un meilleur ajustement des pondérations peut conduire à de meilleurs résultats. De ce fait, on peut dire que le contrôleur H_∞ a réussi à atteindre les objectifs de robustesse en stabilité (figure III.6), puisqu'il la réponse du système en boucle fermée est en dessous du gabarit fréquentiel.

On peut dire que ce contrôleur a amélioré les performances obtenues par rapport à celui du contrôleur LQR en termes de réduction du temps réponse, bien que toutes les sorties du système n'aient pas répondu à la condition de robustesses des performances.

Pour tirer une conclusion à la suite de cette analyse, il est important de prendre en compte le compromis entre atténuation des perturbations et stabilité. Il est clair qu'en poussant sur les performances (temps de réponse 0.22 et rejet important des perturbation 1/1000) , nous perdons en stabilité et précision et vice versa.

Conclusions générales et perspectives

Une conclusion s'impose à nous suite à l'application de ce type de commande sur un système de type pendule, est que malgré le fait d'utiliser la commande de Matlab pour développer un programme qui permet de synthétiser le contrôleur robuste, il n'est pas aisé de le faire tourner encore moins d'avoir la garantie d'aboutir à la satisfaction des critères de robustesse imposées. Il est très important d'avoir un grand recul dans l'ajustement des pondérations fréquentielles, qu'on affine le plus souvent par essai/erreur, pour obtenir au mieux des conditions qui traduisent le cahier des charges et respecte le compromis entre atténuation des perturbations et stabilité.

Quand aux perspectives envisagées pour la suite de notre travail, c'est la conception du système de pendule triple inversé dans un modèle réduit en laboratoire pour y implanter

effectivement les commandes que l'on peut synthétiser et tester en temps réel (insitu) les performances de ces commandes.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] Mullhaupt Ph. "Introduction à l'Analyse et à la commande des systèmes non linéaires". Lausanne, Juin 2007.
- [2] Chi-Tsong Chen. Analog and Digital Control System Design: Transfer-function, State-space, and Algebraic Methods. Oxford University Press, Inc., New York, NY, USA, 1995.
- [3] Mustefa Jibril et al. "Robust Control Theory Based Performance Investigation of an Inverted Pendulum System using Simulink" International Journal of Advance Research and Innovative Ideas in Education, Vol. 6, Issue 2, pp. 808- 814, 2020
- [4] Xiaoping H. et al. "Optimization of Triple Inverted Pendulum Control Process Based on Motion Vision" EURASIP Journal on Image and Video Processing, No. 73, 2018.
- [5] Bugeja M. « Non linear swing-up and stabilizing control of an inverted pendulum system ».EuroconLjubljana, Slovenia.2003
- [6] Lam J. "Control of an inverted pendulum". Dept of Electrical &computer Engineering, University of California. U.S.A. 2004

- [7] S. Boyd and C. Barratt, "Linear control design: limits of performance". Prentice Hall, 1991.
- [8]- S. Boyd and L. El Ghaoui, "Linear Matrix Inequalities in system and control theory". Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 1994.
- [9]- R. S. Burns, "Advanced Control Engineering". Butterworth-Heinemann, 2001.
- [10]- R. Y. Chiang and M. G. Safonov, "Robust control toolbox: user's guide". The Mathworks, 2001.
- [11] J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar and B. A. Francis. "Space-state solutions to standard H₂ and H_∞ control problems". IEEE Transactions on Automatic Control, Volume AC-34, pp. 831-847, 1989.
- [12] M. J. Grimble, "Robust industrial control systems". Wiley & Sons, 2006.
- [13] D. W. Gu, P. Hr. Petkov and M.M. Konstantinov, "Robust Control Design with MATLAB". Springer-Verlag, 2005
- [14] H. Kwakernaak, "Robust control and H_∞ optimization – A tutorial paper". Automatica, Vol. 29, Number 2, pp. 255-273, 1993.
- [15] E. Laroche, **Commande Optimale**, Polycopié de cours, Ecole Nationale Supérieure de Physique deStrasbourg, 2009-2010.
- [16] D. Alazard, **Régulation LQ/LQG**, Notes de cours
- [17]. Che Ku Mohd Faizul Bin Che Ku Mohd Salleh,(2008), Linear Quadratic Regulator (LQR) Speed Control for DC Motor Using MC68HC11,Universiti Malaysia Pahang,
- [18]. Omer Oral, Levent Cetin, Erol Uyar, (2010), A Novel Method on Selection of Q and R Matrices In the Theory Of optimal Control, Dokuz Eylul University, Turkiye, International Journal of Systems Control (Vol.1-2010/Iss.2), pp. 84-92
- [19]- A. Saberi, B. M. Chen and Z. Lin, "Closed-loop solutions to a class of H_∞-optimization problems. International Journal of Control", Volume 60, Number 10, pp. 41-70, 1994.
- [20] A. A. Stoorvogel, "The H_∞ control problem: a state space approach". Prentice Hall, 1992.
- [21]- K. Zhou with J. C. Doyle and K. Glover, "Robust and Optimal Control". Prentice Hall, 1996.

ANNEXES

1. Valeurs singulières d'une matrice de transfert

Considérons un système linéaire invariant avec un vecteur d'entrée $e(t)$ et un vecteur de sortie $y(t)$ de dimensions respectives m, p soit $G(s)$ sa matrice de transfert. En réponse à une excitation harmonique $e(t) = Ee^{j\omega t}$, la sortie du système s'écrit :

$$s(t) = G(j\omega)Ee^{j\omega t}$$

Pour un système monovarié, on définit à partir de cette relation le gain du système à la pulsation ω par le module $|G(j\omega)|$. Dans le cas multivarié, on utilise la notion des valeurs singulières, définies comme les racines carrées des valeurs propres de $G(j\omega)$ multipliée par sa trans-conjuguée:

$$\sigma_i(j\omega) = \sqrt{\lambda_i(G(j\omega) * G(-j\omega)^T)} = \sqrt{\lambda_i(G(-j\omega)^T * G(j\omega))}$$

$i=1, \dots, \min(m, p)$, on notera

$\bar{\sigma}(G(j\omega))$ est la plus grande valeur singulière et $\underline{\sigma}(G(j\omega))$ la plus petite

$$\bar{\sigma}(G(j\omega)) = \sigma_1(G(j\omega)) \geq \sigma_2(G(j\omega)) \geq \dots \geq \underline{\sigma}(G(j\omega)) \geq 0$$

Remarque : pour un système monovarié, il n'existe qu'une seule valeur singulière, qui est donnée

$$\bar{\sigma}(G(j\omega)) = \underline{\sigma}(G(j\omega)) = \sigma(G(j\omega)) = |\sigma(G(j\omega))|$$

Quelques propriétés des valeurs singulières sont indiqués ci-dessous où A et B sont des matrices complexes de dimension compatible

- $\bar{\sigma}(A) = 0 \Leftrightarrow A = 0$

- $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \sigma_i(\lambda A) = |\lambda| \bar{\sigma}_i(A)$

- $\bar{\sigma}(A + B) \leq \bar{\sigma}(A) + \bar{\sigma}(B)$

- $\bar{\sigma}(AB) \leq \bar{\sigma}(A)\bar{\sigma}(B)$

- $\underline{\sigma}(AB) \leq \underline{\sigma}(A)\underline{\sigma}(B)$

$$\bullet \underline{\sigma}(A) = \max_{x \in \mathbb{C}^m} \frac{|Ax|_2}{|x|_2}$$

On peut écrire alors :

$$\underline{\sigma}(G(j\omega)) \leq \frac{\|s(t)\|_2}{\|e(t)\|_2} = \frac{\|G(j\omega)E(j\omega)\|_2}{\|E(j\omega)\|_2} \leq \bar{\sigma}(G(j\omega))$$

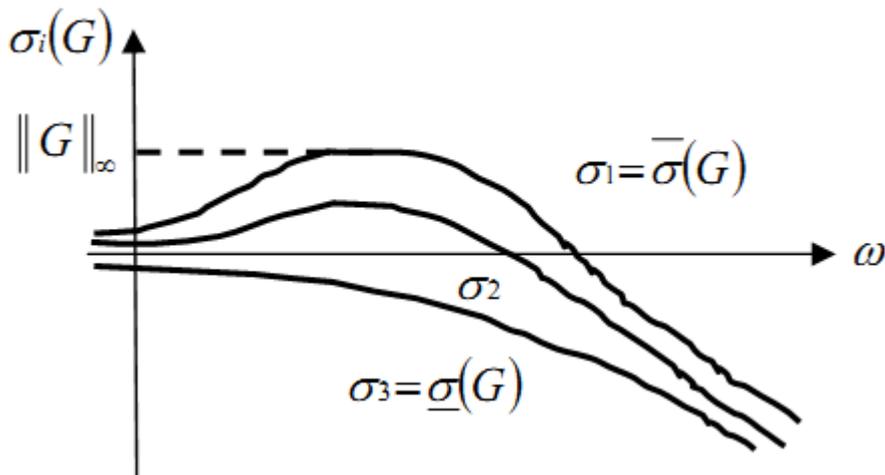


Figure 1 Valeurs singulières d'une matrice de transfert

2. Norme des systèmes monovariante SISO

Pour un système monovariante Single Input Single Output (SISO), la norme H_∞ est le maximum de $|G(j\omega)|$ qui est représenté par le diagramme de Bode, ce qui est conforme à la définition car un système monovariante n'a qu'une seule valeur singulière.

$$\|G(s)\|_\infty = \max_w |G(j\omega)| = \sigma(G(j\omega))$$

3. Norme H_∞ d'un système multivariable MIMO

Il est possible de définir la norme H_∞ d'une matrice de transfert stable Multi Input Multi Output (MIMO) $H(p)$ par :

$$\|H\|_\infty = \sup_{\text{Re}(p) < 0} \bar{\sigma}(H(p)) = \sup_{\omega \in [0, +\infty]} \bar{\sigma}(H(j\omega))$$

3.1. Propriétés

La norme H_∞ d'une matrice de fonctions de transfert est supérieure à la norme H_∞ de chacun de ses éléments :

$$\text{Si } \|G(p)H(p)\|_\infty \leq \|G(p)\|_\infty \|H(p)\|_\infty \text{ alors } \left\| \begin{bmatrix} G(p) \\ H(p) \end{bmatrix} \right\|_\infty \geq \|H(p)\|_\infty$$

$$\text{Si } \left\| \begin{bmatrix} G(p)H(p) \end{bmatrix} \right\|_\infty \geq \|G(p)\|_\infty \text{ alors } \left\| \begin{bmatrix} G(p)H(p) \end{bmatrix} \right\|_\infty \geq \|H(p)\|_\infty$$

3.2 Propriétés courantes de la norme H_∞

Les propriétés suivantes sont les plus utilisées

$$\|F(s)G(s)\|_\infty \leq \|F(s)\|_\infty \|G(s)\|_\infty$$

$$\left\| \begin{pmatrix} F(s) \\ G(s) \end{pmatrix} \right\|_\infty \geq \sup(\|F(s)\|_\infty, \|G(s)\|_\infty)$$

$$\|(F(s) \quad G(s))\|_\infty \geq \sup(\|F(s)\|_\infty, \|G(s)\|_\infty)$$

4. Norme H_∞ d'un système linéaire invariant

Soit un système linéaire invariant (stationnaire) décrit par la représentation d'état suivante:

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y = Cx(t) + Du(t)$$

À laquelle correspond la matrice de transfert $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$. Nous ferons l'hypothèse que le système est stable, l'ensemble des matrices de transfert $G(s)$ correspondant est appelée RH_∞ .

Pour toute matrice $G(s)$ dans RH_∞ on définit une norme, appelée norme H_∞ et noté $\|G(s)\|_\infty$ de la manière suivante :

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_{w \in R} \bar{\sigma}(G(jw))$$

4.1 Propriétés

Soit γ un réel positif $\gamma > \bar{\sigma}(D)$ alors $\|G(s)\|_\infty < \gamma$ si et seulement si la matrice hamiltonienne H_γ n'a pas de valeur propre sur l'axe imaginaire.

$$H_\gamma = \begin{pmatrix} A - BR^{-1}D^T C & -\gamma BR^{-1}B^T \\ \gamma C^T S^{-1}C & -A + C^T DR^{-1}B^T \end{pmatrix}$$

$$R = D^T D - \gamma^2 I$$

$$S = DD^T - \gamma^2 I$$

La propriété est établie si cette représentation d'état n'a pas de mode non commandable ou non observable sur l'axe imaginaire.

Exemple

Considérons le système du premier ordre

$$\begin{aligned} \dot{X} &= -ax(t) + e(t) \\ s(t) &= x(t) \end{aligned} \quad \text{Soit } G(s) = \frac{1}{s+a}$$

On obtient successivement:

$$H_\gamma = \begin{pmatrix} A & \gamma^{-1}BB^T \\ -\gamma^{-1}C^T C & -A^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & \gamma^{-1} \\ -\gamma^{-1} & a \end{pmatrix}$$

$$|\lambda I - H_\gamma| = (\lambda + a)(\lambda - a) + \gamma^{-2} = (\lambda^2 - a^2 + \gamma^{-2})$$

Et donc H_γ n'a pas de valeur propre sur l'axe imaginaire si et seulement si :

$$\gamma^{-2} < a^2 \Leftrightarrow \gamma > \frac{1}{a} \Leftrightarrow \|G(s)\| = \frac{1}{a}$$

Résultat qui peut être aisément confirmé par le tracé du diagramme de Bode de la fonction de transfert $G(s)$, dont le module a effectivement pour maximum $1/a$, en $\omega = 0$.

5. Nombre de conditionnement

Un système à plusieurs entrées et à plusieurs sorties est dit *mal conditionné* si le rapport entre les valeurs singulières maximale et minimale est important. Ce rapport s'appelle nombre de conditionnement.

Cependant, il faut noter que des changements d'échelle (ou d'unité) sur les entrées et sur les sorties du système modifient les valeurs singulières de la matrice de fonctions de transfert (et donc le nombre de conditionnement). Un choix d'unité pertinent par rapport à l'ordre de grandeur des signaux considéré peut permettre de diminuer le nombre de conditionnement. De façon plus systématique, il est conseillé de travailler sur des signaux d'entrée et de sortie qui sont d'un même ordre de grandeur. Cela peut être obtenu en divisant chaque signal par sa valeur moyenne ou sa valeur maximale (mise à échelle).

