

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

# وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

BADJI MOKHTAR- ANNABA UNIVERSITY  
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR ANNABA



جامعة باجي مختار - عنابة

Année : 2019

Faculté: Sciences de l'Ingénierat  
Département: Electronique

## MEMOIRE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de : **MASTER**

Intitulé

*Etude des ondes diffractées par un milieu stratifié  
Air/Neige/mer de glace : Modèle des petites perturbations*

Domaine : Sciences et Technologie

Filière : Télécommunications

Spécialité : Systèmes des Télécommunications

Par : SAYAD Jihen

DEVANT Le JURY

<b>PRESIDENT:</b>	<b>Azzouz MOKHNACHE</b>	<b>MCB</b>	<b>Université Badji Mokhtar Annaba</b>
<b>DIRECTEUR DE MEMOIRE:</b>	<b>Saddek LAFIFI</b>	<b>Pr.</b>	<b>Université Badji Mokhtar Annaba</b>
<b>EXAMINATEURS:</b>	<b>Saliha HARIZE</b>	<b>MCA</b>	<b>Université Badji Mokhtar Annaba</b>
	<b>Narima ZERMI</b>	<b>MCB</b>	<b>Université Badji Mokhtar Annaba</b>

# Remerciement

*En premier lieu, je tiens à remercier Dieu, mon créateur pour nous avoir donné la force pour accomplir ce travail.*

*Je tiens à remercier Mr. Lafifi Saddek*

*Pour son grand soutien et ses conseils considérables.*

*Il est également très agréable de remercier tous les membres de jury*

*Je n'oublie pas de remercier ma mère, mon père, mes amies, mes sœurs et mon frère pour leur soutien moral et physique*

*Nous remercions également toute personne ayant participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail*

*Merci à tous*

# *Dédicace*

*Avant tout je dédie ce modeste travail à \*ALLAH\* le tout  
puissant pour son aide et le courage qui m'a donnée  
pour surmonter toutes les difficultés durant mes années  
d'études.*

*Ainsi que l'endurance pour terminer ce mémoire.*

*Je dédie ce modeste travail*

*A celle-ci qui m'aime le plus dans le monde mon PAPA*

*A celle qui a tout sacrifié pour que je puisse arriver là ma  
chère MERE*

*A mes sœurs : DOUAA, ISRA*

*A mon seul frère SIRAJ*

*A ma grande mère*

*A mes chères tantes*

*A tous mes amies. Tous collègues de pré et de loin*

*A ceux qui ne sont pas sur ces lignes mais qui sont  
toujours présent dans mon cœur.*

## ملخص

نقدم دراسة نظرية تستند إلى نمذجة ثنائية الأبعاد لانعكاس وانتشار الموجات الكهرومغناطيسية فوق بنيات متعددة الطبقات مشوهة عشوائيا. باستخدام طرق تقريبية، يكون الهدف تحديد المعادلات التحليلية التي تسمح لنا بتقديم دراسة إحصائية جد مفصلة للحقول المنتشرة على مسافة بعيدة ويعرض في نفس الوقت كل من معادلات كثافة الاحتمال. ولأجل تقييم النتائج النظرية المتحصل عليها نقوم بدراسة تطبيقية فيتبين أن الطرق المقترحة تعمم مشكلة الانتشار وتؤدي إلى حل مناسب.

## Résumé

Nous présentons une étude théorique basée sur une modélisation 2D de la réflexion et de diffusion des ondes électromagnétiques par un milieu stratifié à interfaces rugueuses aléatoires. Dans le but de déterminer des expressions analytiques des amplitudes diffractées en s'appuyant sur la méthode de petite perturbation (SPM). Nous faisons plusieurs simulations numériques pour un système particulier de quatre couches et nous étudions l'influence de plusieurs paramètres sur le signal rétrodiffusé. En fin de compte nous montrons que la méthode proposée généralise justement le problème de la diffraction et conduit à une solution.

## **Abstract:**

We present a theoretical study based on a 2D modeling of the reflection and diffusion of electromagnetic waves by a stratified medium with random rough interfaces. For the purpose of determining analytical expressions of diffracted amplitudes using the Small Perturbation Method (SPM). We perform several numerical simulations for a particular four-layer system and study the influence of several parameters on the backscattered signal. Finally, we show that the proposed method generalizes the problem of diffraction and leads to a solution.

## Liste des figures

Figure I.1: Profil d'une structure multicouche bidimensionnelle rugueuse aléatoirement .....	03
Figure III.1: Surface de mer avec une couche de glace et une couche de neige .....	28
Figure III.2: Surface de mer avec une couche de glace et couche de neige considéré.....	29
Figure III.3: Puissance réfléchie en fonction de l'épaisseur de glace.....	31
Figure III.4: Puissance réfléchie en fonction de l'épaisseur de la neige avec une épaisseur de glace de 80 cm.....	32
Figure III.5: L'intensité incohérente rétrodiffusée en fonction de l'épaisseur de glace avec une épaisseur de neige de 40 cm .....	34
Figure III.6: L'intensité incohérente rétrodiffusée en fonction de la neige avec une épaisseur de glace de 80 cm.....	35
Figure III.7: L'intensité incohérente rétrodiffusée en fonction de l'angle d'incidence avec l'épaisseur $d_2=30\text{cm}$ et $d_3=50\text{cm}$ (a) en polarisation (hh) , (b) en polarisation (vv).....	36

## Liste des tableaux

Tableau III.1: Permittivités relatives des différents milieux .....	28
Tableau III.2: Longueur de corrélation dans le cas isotrope et anisotrope .....	29



## Table des matières

Introduction générale .....	1
Chapitre I : Diffraction des ondes électromagnétique par une structure multicouche	
I.1. Introduction.....	02
I.2. Positon du problème.....	02
I.3. Expressions des champs diffractés.....	04
I.3.1. Champ incident.....	04
I.3.2. Champs diffractés .....	06
I.3.3. Champs transmis.....	06
I.3.4. Conditions aux limites .....	07
I.4. Méthode de résolution (SPM).....	09
I.4.1. Résolution dans le cas non rugueux (ordre zéro) .....	10
I.4.2. Résolution dans le cas rugueux (ordre un) .....	12
Chapitre II : Cas particulier d'un système de quatre couche	
II.1. Introduction.....	17
II.2. Résolution a l'ordre zéro.....	17
II.3. Résolution a l'ordre un.....	18
II.4. Intensité diffractée, intensité cohérente et incohérente .....	21
II.4.1. Intensité cohérente et incohérente.....	21
II.4.2. Variances et covariance des parties réelle et imaginaire de l'amplitude de diffraction.....	23
II.4.3. Comportements asymptotiques de variance, de covariance et de l'intensité incohérente.....	24
Chapitre III : Application d'une structure naturelle air/neige/glace/mer	
III.1. Introduction .....	27
III.2. Position du problème.....	27

III.3. Puissance réfléchiée par une structure à interfaces planes.....	28
III.3.1. Amplitude de l'onde plane réfléchiée.....	28
III.3.2. Analyse de la structure air/glace/mer-Influence de l'épaisseur de glace.....	30
III.3.3. Analyse de la structure air/neige/glace/mer-Influence de l'épaisseur de neige.....	31
III.4. Puissance réfléchiée par une structure à interfaces rugueuses.....	32
III.4.1. Amplitude de l'onde plane réfléchiée .....	32
III.4.2. Analyse de la structure air/glace/mer à interface rugueuse -Influence de l'épaisseur de glace .....	33
III.4.3. Analyse de la structure air/neige/glace/mer à interface rugueuse-Influence de l'épaisseur de neige .....	34
III.4.4. Analyse de la structure air/neige/glace/mer à interface rugueuse-Influence de l'angle d'incidence en rétrodiffusion .....	35
Conclusion .....	37
Conclusion générale .....	38
Références Bibliographiques	

## Introduction générale

En télédétection, l'étude de la diffraction des ondes électromagnétiques par un empilement de couches rugueuses a de nombreuses applications où la connaissance de la distribution statique de l'amplitude et de la phase du champ diffracté par des surfaces rugueuses est nécessaire [1]. Il est donc important de définir ces distributions statiques par une approche analytique, et on peut se faire au moyen de méthodes exactes [2] ou de modèles approchés [3]. La plupart des travaux porte sur la détermination des intensités cohérentes et incohérentes.

Dans ce mémoire, nous proposons une étude théorique sur la diffusion des ondes par un milieu stratifié à interfaces rugueuses séparant des milieux de permittivité différentes. Ces interfaces sont caractérisées par des distributions des hauteurs gaussiennes et des fonctions de corrélation gaussiennes. Ils peuvent être corrélées ou non.

Ce mémoire est composé de trois chapitres, illustré comme suit :

Dans le premier chapitre nous commençons par présenter, les propriétés statistiques des interfaces rugueuses et la méthode de perturbation des amplitudes des champs. Nous rappelons les expressions des champs diffractés et des conditions aux limites dans le cadre de l'hypothèse de Rayleigh [4].

Dans le deuxième chapitre nous présentons l'étude des cas particuliers d'une structure formée de quatre couches et nous déterminons les expressions des champs diffractés.

Le troisième chapitre est réservé à l'application d'une structure naturelle formée de quatre couches air/neige/glace/eau de mer. L'application est basée sur une modélisation de la réflexion et de diffusion des ondes électromagnétiques par un milieu stratifié en incidence normale. Dans une première étape, les interfaces entre les couches sont supposées planes, dans une deuxième étape, une rugosité faible est prise en compte et la méthode de perturbation (SPM) est utilisée pour résoudre le problème de diffusion. Nous pouvons certainement voir que le signal rétrodiffusé par le milieu stratifié est fortement lié aux caractéristiques de la couche de neige et des glaces de mer (densité, température, permittivité, rugosité). Elle peut varier de manière significative, même si les variations du milieu stratifié sont petites. Il s'agit d'un résultat important de garder à l'esprit lorsque l'on tente de l'inversion du signal.

# Chapitre I

## Diffraction des ondes électromagnétique par une structure multicouche

### Sommaire

Introduction générale.....	01
Chapitre I : Diffraction des ondes électromagnétique par une structure multicouche.....	02
I.1.Introduction.....	02
I.2. Positon du problème.....	02
I.3. Expressions des champs diffractés.....	04
I.3.1. Champ incident.....	04
I.3.2. Champs diffractés .....	06
I.3.3. Champs transmis.....	06
I.3.4. Conditions aux limites .....	07
I.4. Méthode de résolution (SPM).....	09
I.4.1. Résolution dans le cas non rugueux (ordre zéro) .....	10
I.4.2. Résolution dans le cas rugueux (ordre un) .....	12

## Chapitre. I

### Diffraction des ondes électromagnétique par une structure multicouche

#### I.1. Introduction

Dans ce chapitre nous nous intéressons aux problèmes de la diffraction par une structure composée de  $N$  couches bidimensionnelles rugueuses aléatoirement en s'appuyant sur la méthode de petite perturbation

Notre but principal est de déterminer les amplitudes des champs diffractés qui s'expriment à l'aide du développement de Rayleigh et la méthode de perturbation

#### I.2. Positon du problème

Nous commençons cette section en décrivant la géométrie dans laquelle notre problème sera posé. La structure est un empilement de plusieurs interfaces bidimensionnelles et non parallèles (*Figure 1*). Les interfaces  $i$  et  $i+1$  sont les limites d'un milieu spatialement homogène et isotrope, d'épaisseur  $d_i = u_{i+1} - u_i$  avec  $u_1 = 0$ . les fonctions  $a_i(x, y)$  décrivant les interfaces sont des processus aléatoires gaussiens centrés de moyenne nulle ( $\langle a_i(x, y) \rangle = 0, \forall x, y$ ), et stationnaires à l'ordre 2. Les croches  $\langle \rangle$  désignent la moyenne statistique. Pour les applications numériques.

Pour les applications, nous considérons le cas où les interfaces aléatoires présentent des fonctions de corrélation gaussiennes. Les interfaces peuvent être corrélées ou non corrélées, isotropes ou anisotropes

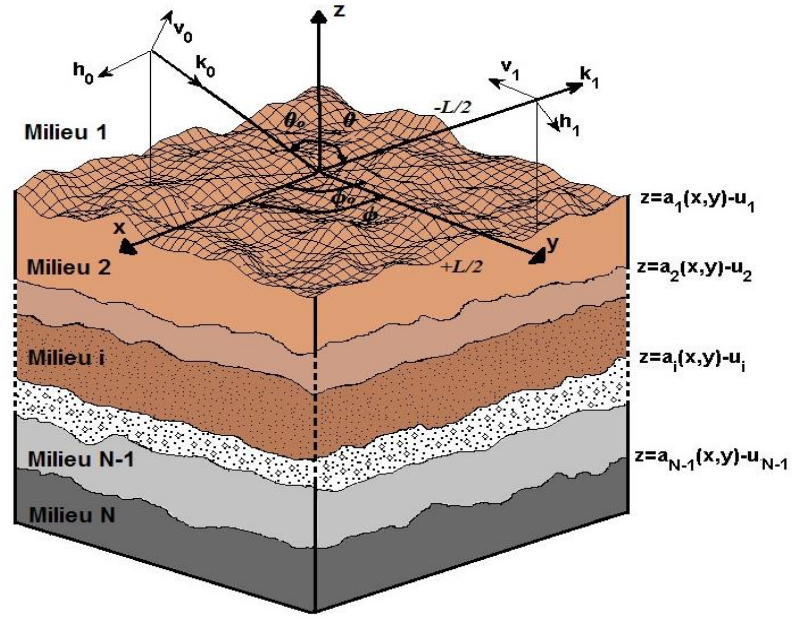


Figure I.1 : Profil d'une structure multicouche bidimensionnelle rugueuse aléatoirement.

Les fonctions d'autocorrélation  $R_{ii}(x, y)$  et d'intercorrélations  $R_{ij}(x, y)$  sont des gaussiennes définies par [5]-[6] :

$$R_{ii}(x, y) = \sigma_i^2 \exp\left(-\frac{x^2}{l_{xi}^2} - \frac{y^2}{l_{yi}^2}\right) \tag{I.1}$$

$$R_{ij}(x, y) = 2q_{ij}\sigma_i\sigma_j \sqrt{\frac{l_{xi}l_{xj}l_{yi}l_{yj}}{(l_{xi}^2 + l_{xj}^2)(l_{yi}^2 + l_{yj}^2)}} \times \exp\left[-\frac{2x^2}{l_{xi}^2 + l_{xj}^2} - \frac{2y^2}{l_{yi}^2 + l_{yj}^2}\right] \tag{I.2}$$

A l'origine, le coefficient de corrélation s'exprime sous la forme suivante :

$$\rho_{ij} = \frac{R_{ij}(0,0)}{\sqrt{R_{ii}(0,0)R_{jj}(0,0)}} \tag{I.3}$$

On note que  $l_{xi}$  et  $l_{yi}$  sont les longueurs de corrélation des directions  $Ox$ ,  $Oy$  respectivement. Les interfaces sont isotropes quand  $l_{xi} = l_{yi}$  et anisotropes quand  $l_{xi} \neq l_{yi}$ .

Les interfaces  $i$  et  $j$  sont non corrélées si le coefficient de corrélation  $\rho_{ij}$  est nul. Elles sont totalement corrélées quand  $\rho_{ij} = \pm 1$  (c'est-à-dire pour  $l_i = l_j$  et  $q_{ij} = 1$ ).

$\sigma_i$  est la hauteur quadratique moyenne de l'interface  $i$ .  $l_{xi}$  et  $l_{yi}$  sont les longueurs de corrélation des directions  $Ox$ ,  $Oy$  respectivement. Les interfaces sont isotropes si  $l_{xi} = l_{yi}$  et anisotrope si  $l_{xi} \neq l_{yi}$ .

Les spectres  $\hat{R}_{ii}(\alpha, \beta)$  et les interspectres  $\hat{R}_{i,j \neq i}(\alpha, \beta)$  correspondent aux transformées de Fourier des fonctions de corrélation  $R_{ii}(x, y)$  and  $R_{ij}(x, y)$  et sont aussi des gaussiennes avec :

$$\hat{R}_{ii}(\alpha, \beta) = \sigma_i^2 l_{xi} l_{yi} \pi \exp \left[ -\frac{l_{xi}^2 \alpha^2 + l_{yi}^2 \beta^2}{4} \right] \quad (I.4)$$

$$\hat{R}_{ij}(\alpha, \beta) = q_{ij} \sigma_i \sigma_j \pi \sqrt{l_{xi} l_{xj} l_{yi} l_{yj}} \exp \left[ -\frac{(l_{xi}^2 + l_{xj}^2) \alpha^2 + (l_{yi}^2 + l_{yj}^2) \beta^2}{8} \right] \quad (I.5)$$

Où  $\hat{R}_{ii}(\alpha, \beta)$  et  $\hat{R}_{ij}(\alpha, \beta)$  représentent respectivement les transformées de Fourier bidimensionnelles des fonctions  $R_{ii}(\alpha, \beta)$  et  $R_{ij}(\alpha, \beta)$

### I.3 Expressions des champs diffractés

Dans cette section on va présenter les expressions des champs diffractés dans les milieux  $i$ , dans les deux polarisations, horizontale et verticale. Donc, une description de champ incident semble nécessaire afin de déterminer par la suite les expressions des champs diffractés.

#### I.3.1 Champ incident

La structure présentée dans la *Figure 1*, est éclairée par une onde plane de longueur d'onde  $\lambda$  où le vecteur d'onde  $\mathbf{k}_0$ , situé dans le plan  $(Oxy)$ , fait l'angle d'incidence  $\theta_0$  avec l'axe  $(Oz)$  et l'angle azimut  $\phi_0$ , est noté par :

$$\mathbf{k}_0 = \alpha_0 \mathbf{x} + \beta_0 \mathbf{y} - \gamma_0 \mathbf{z} \quad (I.6)$$

Avec :

$$\begin{cases} \alpha_0 = k_1 \sin \theta_0 \cos \phi_0 \\ \beta_0 = k_1 \sin \theta_0 \sin \phi_0 \\ \gamma_0 = k_1 \cos \theta_0 \end{cases} \quad (I.7)$$

Où:  $\frac{-\pi}{2} \leq \theta_0 \leq \frac{+\pi}{2}$  et  $0 \leq \phi_0 \leq 2\pi$ .

On considère la dépendance temporelle  $\exp(j\omega t)$ . Le milieu 1 est assimilé au vide. On note  $Z_1$  l'impédance du vide, et  $k_1$  le nombre d'onde. Puisque l'onde incidente est une onde plane,  $\mathbf{k}_0$  est perpendiculaire au champ incident, et nous pouvons décomposer le vecteur champ électrique incident  $\mathbf{E}_0$  en deux vecteurs unités  $\mathbf{h}_0$  et  $\mathbf{v}_0$  dans le plan perpendiculaire à la direction de propagation. Notons que  $(\mathbf{v}_0, \mathbf{h}_0, \mathbf{k}_0 / k_1)$  est un système orthogonal. Les deux vecteurs  $\mathbf{h}_0$  et  $\mathbf{v}_0$  représentent la polarisation horizontale ( $E_{//}$ ) et verticale ( $H_{//}$ ) respectivement

$$\mathbf{h}_0 = \frac{\mathbf{k}_0 \wedge \mathbf{z}}{|\mathbf{k}_0 \wedge \mathbf{z}|} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_0^2 + \beta_0^2}} (\beta_0 \mathbf{x} - \alpha_0 \mathbf{y}) \quad (\text{I.8})$$

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{h}_0 \wedge \frac{\mathbf{k}_0}{k_1} = \frac{\gamma_0}{k_1 \sqrt{\alpha_0^2 + \beta_0^2}} (\alpha_0 \mathbf{x} + \beta_0 \mathbf{y}) + \frac{\sqrt{\alpha_0^2 + \beta_0^2}}{k_1} \mathbf{z} \quad (\text{I.9})$$

On note qu'en polarisation horizontale ( $h$ ) ou ( $E_{//}$ ) on a  $A_{0(h)} = 1$ ,  $A_{0(v)} = 0$ , et en polarisation verticale ( $v$ ) ou ( $H_{//}$ ) on a  $A_{0(h)} = 0$  et  $A_{0(v)} = 1$ .

Sachant que l'expression du vecteur du champ magnétique dans chaque milieu est donnée par :

$$\mathbf{H}_i = \frac{\mathbf{k}_i}{k_i Z_i} \wedge \mathbf{E}_i \quad (\text{I.10})$$

Les expressions du champ électrique et magnétique incident peuvent s'écrire :

$$\mathbf{E}_0 = [A_{0(h)} (\alpha_0, \beta_0) \mathbf{h}_0 + A_{0(v)} (\alpha_0, \beta_0) \mathbf{v}_0] \exp(-j\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}) \quad (\text{I.11})$$

$$\mathbf{H}_0 = \frac{1}{Z_1} (-A_{0(h)} (\alpha_0, \beta_0) \mathbf{v}_0 + A_{0(v)} (\alpha_0, \beta_0) \mathbf{h}_0) \exp(-j\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}) \quad (\text{I.12})$$

Le vecteur directeur  $\mathbf{r}$  de l'onde incidente est donné par :

$$\mathbf{r} = x\mathbf{x} + y\mathbf{y} + z\mathbf{z} \quad (\text{I.13})$$



### I.3.2 Champs diffractés

Les champs diffractés sont présentés comme une somme d'onde se propage dans le sens positif (onde montante) et descendante dans le sens négatif onde, s'expriment sous la forme de développements de Rayleigh en 2D.

dans le sens positif  $+z$  les champs, électrique et magnétique, diffractés dans le milieu 1 qui assimile au vide, sont donnés sous la forme :

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (A_{1(h)} \mathbf{h}_1^+ + A_{1(v)} \mathbf{v}_1^+) \exp(-j\mathbf{k}_1^+ \cdot \mathbf{r}) d\alpha d\beta \quad (\text{I.14})$$

$$\mathbf{H}_1 = \frac{1}{4\pi^2 Z_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (-A_{1(h)} \mathbf{v}_1^+ + A_{1(v)} \mathbf{h}_1^+) \exp(-j\mathbf{k}_1^+ \cdot \mathbf{r}) d\alpha d\beta \quad (\text{I.15})$$

Dans le sens positif  $+z$  et négatif  $-z$ , les champs électriques et magnétiques diffractés dans le milieu  $i$  ( $i = 2, N-1$ )  $-z$ , sont notés :

$$\mathbf{E}_i = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [(A_{i(h)}^- \mathbf{h}_i^- + A_{i(v)}^- \mathbf{v}_i^-) \exp(-j\mathbf{k}_i^- \cdot \mathbf{r}) + (A_{i(h)}^+ \mathbf{h}_i^+ + A_{i(v)}^+ \mathbf{v}_i^+) \exp(-j\mathbf{k}_i^+ \cdot \mathbf{r})] d\alpha d\beta \quad (\text{I.16})$$

$$\mathbf{H}_i = \frac{1}{4\pi^2 Z_i} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [(-A_{i(h)}^- \mathbf{v}_i^- + A_{i(v)}^- \mathbf{h}_i^-) \exp(-j\mathbf{k}_i^- \cdot \mathbf{r}) + (-A_{i(h)}^+ \mathbf{v}_i^+ + A_{i(v)}^+ \mathbf{h}_i^+) \exp(-j\mathbf{k}_i^+ \cdot \mathbf{r})] d\alpha d\beta \quad (\text{I.17})$$

### I.3.3 Champ transmis

Dans le milieu  $N$ , on distingue que des ondes se déplacent dans le sens négatif  $-z$ , alors :

$$\mathbf{E}_N = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (A_{N(h)} \mathbf{h}_N^- + A_{N(v)} \mathbf{v}_N^-) \exp(-j\mathbf{k}_N^- \cdot \mathbf{r}) d\alpha d\beta \quad (\text{I.18})$$

$$\mathbf{H}_N = \frac{1}{4\pi^2 Z_N} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (-A_{N(h)} \mathbf{v}_N^- + A_{N(v)} \mathbf{h}_N^-) \exp(-j\mathbf{k}_N^- \cdot \mathbf{r}) d\alpha d\beta \quad (\text{I.19})$$

Les vecteurs de propagation  $\mathbf{k}_i^\pm$  dans le milieu  $i$  sont définis par :

$$\mathbf{k}_i^\pm = \alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y} \pm \gamma_i \mathbf{z} \quad (\text{I.20})$$

Avec:

$$\begin{cases} \alpha = k_i \sin \theta \cos \phi \\ \beta = k_i \sin \theta \sin \phi \\ \gamma_i = \sqrt{k_i^2 - \beta^2 - \alpha^2} = k_i \cos \theta \end{cases} \quad (\text{I.21})$$

Où:  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{+\pi}{2}$  et  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ .

Pour que les ondes soient propagatives, les constantes de propagation  $\gamma_i$  doivent présenter une partie imaginaire inférieure ou égale à zéro  $\text{Im}(\gamma_i) \leq 0$ . Les constantes de propagation associées à  $(\alpha_0, \beta_0)$  sont notées  $\gamma_{i,0} = \gamma_i(\alpha_0, \beta_0)$  avec  $\gamma_0 = \gamma_{1,0}$  dans le milieu 1.

On note que  $(\mathbf{v}_i^\pm, \mathbf{h}_i^\pm, \mathbf{k}_i^\pm / k_i)$  est un système orthogonal. On exprime les vecteurs unités  $\mathbf{h}_i^\pm$  et  $\mathbf{v}_i^\pm$ , qui composent l'onde diffractée, comme suit (ici, les composantes du vecteur  $\mathbf{k}_i^\pm$  sont  $(\alpha, \beta, \pm\gamma_i)$ ):

$$\mathbf{h}_i^\pm = \frac{\mathbf{k}_i^\pm \wedge \mathbf{z}}{|\mathbf{k}_i^\pm \wedge \mathbf{z}|} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} (\beta \mathbf{x} - \alpha \mathbf{y}) \quad (\text{I.22})$$

$$\mathbf{v}_i^\pm = \mathbf{h}_i^\pm \wedge \frac{\mathbf{k}_i^\pm}{k_i} = \frac{\mp \gamma_i}{k_i \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} (\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) + \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{k_i} \mathbf{z} \quad (\text{I.23})$$

#### I.3.4. Conditions aux limites

Les inconnues du problème sont les amplitudes diffractées,  $A_{1(h,v)}$ ,  $A_{i(h,v)}^\pm$ ,  $A_{i(h,v)}^\pm$ ,  $A_{N(h,v)}$  dans le milieu 1, le milieu  $i$  ( $i = \overline{2, N-1}$ ) et dans le milieu  $N$  respectivement. Pour les calculer, nous utilisons les conditions aux limites sur les deux interfaces successives  $i$  et  $i+1$ . La continuité des champs, électrique et magnétique, tangentiels à l'interface rugueuse  $z = a_i(x, y) - u_i$  est exprimée par les deux relations suivantes :

$$[\mathbf{n}_i \wedge \mathbf{E}_i]_{z=a_i(x,y)-u_i} = [\mathbf{n}_i \wedge \mathbf{E}_{i+1}]_{z=a_i(x,y)-u_i} \quad (\text{I.24})$$

$$[\mathbf{n}_i \wedge \mathbf{H}_i]_{z=a_i(x,y)-u_i} = [\mathbf{n}_i \wedge \mathbf{H}_{i+1}]_{z=a_i(x,y)-u_i} \quad (\text{I.25})$$

Avec  $\mathbf{n}_i$  est le vecteur unitaire normal à l'interface  $i$ , et son expression s'écrit :

$$\mathbf{n}_i = \frac{-a_{ix}\mathbf{x} - a_{iy}\mathbf{y} + \mathbf{z}}{\sqrt{1 + a_{ix}^2 + a_{iy}^2}} \quad (\text{I.26})$$

Où:  $a_{ix} = \partial a_i(x, y) / \partial x$  et  $a_{iy} = \partial a_i(x, y) / \partial y$

On définit d'après (I.22), (I.23) et (I.26), les deux produits vectoriels suivants :

$$\mathbf{n}_i \wedge \mathbf{h}_{i,i+1}^\pm = \frac{1}{\sqrt{1 + a_{ix}^2 + a_{iy}^2} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \left[ \alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y} + (\alpha a_{ix} + \beta a_{iy}) \mathbf{z} \right] \quad (\text{I.27})$$

$$\mathbf{n}_i \wedge \mathbf{v}_{i,i+1}^\pm = \frac{\left\{ \left[ \pm \gamma_{i,i+1} \beta - (\alpha^2 + \beta^2) a_{iy} \right] \mathbf{x} + \left[ \mp \gamma_{i,i+1} \alpha + (\alpha^2 + \beta^2) a_{ix} \right] \mathbf{y} \mp \gamma_{i,i+1} (\alpha a_{iy} - \beta a_{ix}) \mathbf{z} \right\}}{k_{i,i+1} \sqrt{1 + a_{ix}^2 + a_{iy}^2} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \quad (\text{I.28})$$

A partir des expressions des conditions aux limites (I.24) et (I.25), à l'interface  $z = a_i(x, y) - u_i$  (dans ce qui suit on écrit  $z = a_i - u_i$ ), on obtient des équations scalaires linéaires pour les directions  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  et sont indépendantes, alors que les équations scalaires linéaires pour des directions  $\mathbf{z}$  ne sont pas indépendantes.

Ainsi, on obtient les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{\alpha A_{i(h)}^+}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \exp(+j\gamma_i u_i) \exp(-j\gamma_i a_i) + \left( \frac{\gamma_i \beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} - \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} a_{iy} \right) \frac{A_{i(v)}^+}{k_i} \exp(+j\gamma_i u_i) \exp(-j\gamma_i a_i) \right. \\ & \left. + \frac{\alpha A_{i(h)}^-}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \exp(-j\gamma_i u_i) \exp(+j\gamma_i a_i) - \left( \frac{\gamma_i \beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} a_{iy} \right) \frac{A_{i(v)}^-}{k_i} \exp(-j\gamma_i u_i) \exp(+j\gamma_i a_i) \right] \exp[-j(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta \\ & = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{\alpha A_{i+1(h)}^+}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \exp(+j\gamma_{i+1} u_i) \exp(-j\gamma_{i+1} a_i) + \left( \frac{\gamma_{i+1} \beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} - \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} a_{iy} \right) \frac{A_{i+1(v)}^+}{k_{i+1}} \exp(+j\gamma_{i+1} u_i) \exp(-j\gamma_{i+1} a_i) \right. \\ & \left. + \frac{\alpha A_{i+1(h)}^-}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \exp(-j\gamma_{i+1} u_i) \exp(+j\gamma_{i+1} a_i) - \left( \frac{\gamma_{i+1} \beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} a_{iy} \right) \frac{A_{i+1(v)}^-}{k_{i+1}} \exp(-j\gamma_{i+1} u_i) \exp(+j\gamma_{i+1} a_i) \right] \exp[-j(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta \end{aligned} \quad (\text{I.31})$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{\beta A_{i(h)}^+}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \exp(+j\gamma_i u_i) \exp(-j\gamma_i a_i) - \left( \frac{\gamma_i \alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} - \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} a_{ix} \right) \frac{A_{i(v)}^+}{k_i} \exp(+j\gamma_i u_i) \exp(-j\gamma_i a_i) \right. \\
& \left. + \frac{\beta A_{i(h)}^-}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \exp(-j\gamma_i u_i) \exp(+j\gamma_i a_i) + \left( \frac{\gamma_i \alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} a_{ix} \right) \frac{A_{i(v)}^-}{k_i} \exp(-j\gamma_i u_i) \exp(+j\gamma_i a_i) \right] \exp[-j(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta \\
& = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{\beta A_{i+1(h)}^+}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \exp(+j\gamma_{i+1} u_i) \exp(-j\gamma_{i+1} a_i) - \left( \frac{\gamma_{i+1} \alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} - \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} a_{ix} \right) \frac{A_{i+1(v)}^+}{k_{i+1}} \exp(+j\gamma_{i+1} u_i) \exp(-j\gamma_{i+1} a_i) \right. \\
& \left. + \frac{\beta A_{i+1(h)}^-}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \exp(-j\gamma_{i+1} u_i) \exp(+j\gamma_{i+1} a_i) + \left( \frac{\gamma_{i+1} \alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} a_{ix} \right) \frac{A_{i+1(v)}^-}{k_{i+1}} \exp(-j\gamma_{i+1} u_i) \exp(+j\gamma_{i+1} a_i) \right] \exp[-j(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta
\end{aligned} \tag{I.32}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ - \left( \frac{\gamma_i \beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} - \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} a_{iy} \right) \frac{A_{i(h)}^+}{k_i Z_i} \exp(+j\gamma_i u_i) \exp(-j\gamma_i a_i) + \frac{\alpha A_{i(v)}^+}{Z_i \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \exp(+j\gamma_i u_i) \exp(-j\gamma_i a_i) \right. \\
& \left. + \left( \frac{\gamma_i \beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} a_{iy} \right) \frac{A_{i(h)}^-}{k_i Z_i} \exp(-j\gamma_i u_i) \exp(+j\gamma_i a_i) + \frac{\alpha A_{i(v)}^-}{Z_i \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \exp(-j\gamma_i u_i) \exp(+j\gamma_i a_i) \right] \exp[-j(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta \\
& = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ - \left( \frac{\gamma_{i+1} \beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} - \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} a_{iy} \right) \frac{A_{i+1(h)}^+}{k_{i+1} Z_{i+1}} \exp(+j\gamma_{i+1} u_i) \exp(-j\gamma_{i+1} a_i) + \frac{\alpha A_{i+1(v)}^+}{Z_{i+1} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \exp(+j\gamma_{i+1} u_i) \exp(-j\gamma_{i+1} a_i) \right. \\
& \left. + \left( \frac{\gamma_{i+1} \beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} a_{iy} \right) \frac{A_{i+1(h)}^-}{k_{i+1} Z_{i+1}} \exp(-j\gamma_{i+1} u_i) \exp(+j\gamma_{i+1} a_i) + \frac{\alpha A_{i+1(v)}^-}{Z_{i+1} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \exp(-j\gamma_{i+1} u_i) \exp(+j\gamma_{i+1} a_i) \right] \exp[-j(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta
\end{aligned} \tag{I.33}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \left( \frac{\gamma_i \alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} - \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} a_{ix} \right) \frac{A_{i(h)}^+}{k_i Z_i} \exp(+j\gamma_i u_i) \exp(-j\gamma_i a_i) + \frac{\beta A_{i(v)}^+}{Z_i \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \exp(+j\gamma_i u_i) \exp(-j\gamma_i a_i) \right. \\
& \left. - \left( \frac{\gamma_i \alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} a_{ix} \right) \frac{A_{i(h)}^-}{k_i Z_i} \exp(-j\gamma_i u_i) \exp(+j\gamma_i a_i) + \frac{\beta A_{i(v)}^-}{Z_i \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \exp(-j\gamma_i u_i) \exp(+j\gamma_i a_i) \right] \exp[-j(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta \\
& = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \left( \frac{\gamma_{i+1} \alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} - \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} a_{ix} \right) \frac{A_{i+1(h)}^+}{k_{i+1} Z_{i+1}} \exp(+j\gamma_{i+1} u_i) \exp(-j\gamma_{i+1} a_i) + \frac{\alpha A_{i+1(v)}^+}{Z_{i+1} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \exp(+j\gamma_{i+1} u_i) \exp(-j\gamma_{i+1} a_i) \right. \\
& \left. - \left( \frac{\gamma_{i+1} \alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} a_{ix} \right) \frac{A_{i+1(h)}^-}{k_{i+1} Z_{i+1}} \exp(-j\gamma_{i+1} u_i) \exp(+j\gamma_{i+1} a_i) + \frac{\beta A_{i+1(v)}^-}{Z_{i+1} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \exp(-j\gamma_{i+1} u_i) \exp(+j\gamma_{i+1} a_i) \right] \exp[-j(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta
\end{aligned} \tag{I.34}$$

Selon la forme actuelle des équations (I.31) -(I.34), il paraît impossible d'extraire les inconnues du problème. Alors, on doit s'appuyer sur une méthode capable de changer ce système d'équations irrésolues en un système d'équations résoluble. Les méthodes proposées sont les mêmes que celles appliquées pour résoudre le problème présenté dans le chapitre II. On a vu qu'il est assuré que la méthode de petite perturbation (SPM), nous permet d'atteindre les expressions analytiques des amplitudes de diffraction dans le cas d'un système bidimensionnel.

#### I.4. Méthode de résolution (SPM)

Pour déterminer les expressions analytiques des amplitudes des champs diffractés à partir des équations de continuité (I.31) et (I.34), on utilise une méthode de perturbation. Lorsque Les hauteurs quadratiques moyennes des interfaces sont faibles devant la longueur d'onde  $k\sigma_i \ll 1$ , une bonne approximation consiste à représenter les amplitudes de diffraction et les fonctions exponentielles par leurs développements en séries entières.

$$A_{i(h,v)}^{\pm}(\alpha, \beta) = \sum_p A_{i(h,v)}^{\pm(p)}(\alpha, \beta) \quad (\text{I.35})$$

$$\exp[\pm j\gamma_{i,i+1}a_i(x, y)] = \sum_p \frac{[\pm j\gamma_{i,i+1}a_i(x, y)]^p}{p!} \quad (\text{I.36})$$

##### I.4.1 Résolution dans le cas non rugueux (ordre zéro)

À l'ordre zéro, les interfaces sont parfaitement lisses, et les fonctions qui décrivent les interfaces sont nulles ( $a_i(x, y) = 0$ ).

Selon les équations (I.31) et (I.34) on trouve l'amplitude de diffraction à l'ordre zéro dans le milieu  $i$ . L'application de ces conditions à l'interface  $z = -u_i$  nous permet d'écrire le système d'équation suivants :

En polarisation horizontale  $E_{//}$

$$\begin{cases} A_{i(h)}^{+(0)} \exp(+j\gamma_i u_i) + A_{i(h)}^{-(0)} \exp(-j\gamma_i u_i) = A_{i+1(h)}^{+(0)} \exp(+j\gamma_{i+1} u_i) + A_{i+1(h)}^{-(0)} \exp(-j\gamma_{i+1} u_i) \\ \gamma_i A_{i(h)}^{+(0)} \exp(+j\gamma_i u_i) - \gamma_i A_{i(h)}^{-(0)} \exp(-j\gamma_i u_i) = \gamma_{i+1} A_{i+1(h)}^{+(0)} \exp(+j\gamma_{i+1} u_i) - \gamma_{i+1} A_{i+1(h)}^{-(0)} \exp(-j\gamma_{i+1} u_i) \end{cases} \quad (\text{I.37})$$

En polarisation verticale  $H_{//}$

$$\begin{cases} k_i A_{i(v)}^{+(0)} \exp(+j\gamma_i u_i) + k_i A_{i(v)}^{-(0)} \exp(-j\gamma_i u_i) = k_{i+1} A_{i+1(v)}^{+(0)} \exp(+j\gamma_{i+1} u_i) + k_{i+1} A_{i+1(v)}^{-(0)} \exp(-j\gamma_{i+1} u_i) \\ \frac{\gamma_i}{k_i} A_{i(v)}^{+(0)} \exp(+j\gamma_i u_i) - \frac{\gamma_i}{k_i} A_{i(v)}^{-(0)} \exp(-j\gamma_i u_i) = \frac{\gamma_{i+1}}{k_{i+1}} A_{i+1(v)}^{+(0)} \exp(+j\gamma_{i+1} u_i) - \frac{\gamma_{i+1}}{k_{i+1}} A_{i+1(v)}^{-(0)} \exp(-j\gamma_{i+1} u_i) \end{cases} \quad (\text{I.38})$$

D'où la forme matricielle suivante dans les deux polarisations :

$$\begin{bmatrix} A_{i(h,v)}^{(+,0)}(\alpha_0, \beta_0) \\ A_{i(h,v)}^{(-,0)}(\alpha_0, \beta_0) \end{bmatrix} = \mathbf{C}_{(i,i+1)}^{(h,v)}(\alpha_0, \beta_0) \begin{bmatrix} A_{i+1(h,v)}^{(+,0)}(\alpha_0, \beta_0) \\ A_{i+1(h,v)}^{(-,0)}(\alpha_0, \beta_0) \end{bmatrix} \quad (\text{I.39})$$

$\mathbf{C}_{(i,i+1)}^{(h,v)}(\alpha, \beta)$  (ici  $\alpha = \alpha_0, \beta = \beta_0$ ) est la matrice définie en polarisation  $E_{//}$  par :

$$\mathbf{C}_{(i,i+1)}^{(h)}(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \frac{\gamma_i + \gamma_{i+1}}{2\gamma_i} \exp[+j(\gamma_{i+1} - \gamma_i)u_i] & \frac{\gamma_i - \gamma_{i+1}}{2\gamma_{i0}} \exp[-j(\gamma_{i+1} + \gamma_i)u_i] \\ \frac{\gamma_i - \gamma_{i+1}}{2\gamma_i} \exp[+j(\gamma_{i+1} + \gamma_i)u_i] & \frac{\gamma_i + \gamma_{i+1}}{2\gamma_i} \exp[-j(\gamma_{i+1} - \gamma_i)u_i] \end{pmatrix} \quad (\text{I.40})$$

Et en polarisation  $H_{//}$  par :

$$\mathbf{C}_{(i,i+1)}^{(v)}(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \frac{k_{i+1}^2\gamma_i + k_i^2\gamma_{i+1}}{2k_i k_{i+1}\gamma_i} \exp[+j(\gamma_{i+1} - \gamma_i)u_i] & \frac{k_{i+1}^2\gamma_i - k_i^2\gamma_{i+1}}{2k_i k_{i+1}\gamma_i} \exp[-j(\gamma_{i+1} + \gamma_i)u_i] \\ \frac{k_{i+1}^2\gamma_i - k_i^2\gamma_{i+1}}{2k_i k_{i+1}\gamma_i} \exp[+j(\gamma_{i+1} + \gamma_i)u_i] & \frac{k_{i+1}^2\gamma_i + k_i^2\gamma_{i+1}}{2k_i k_{i+1}\gamma_i} \exp[-j(\gamma_{i+1} - \gamma_i)u_i] \end{pmatrix} \quad (\text{I.41})$$

#### I.4.1.1 Amplitudes réfléchies et transmises (milieu 1 et $N$ )

à l'ordre 0, on cherche à obtenir que l'amplitude des ondes réfléchie dans le milieu 1, dans le sens positif et l'amplitude transmise dans le milieu  $N$  dans le sens négatif. Cela peut se traduire par l'équation suivante :

$$\begin{bmatrix} A_{1(h,v)}^{(0)}(\alpha_0, \beta_0) \\ A_{0(h,v)}^{(0)}(\alpha_0, \beta_0) \end{bmatrix} = \mathbf{M}_{1,N}^{(h,v)}(\alpha_0, \beta_0) \begin{bmatrix} 0 \\ A_{N(h,v)}^{(0)}(\alpha_0, \beta_0) \end{bmatrix} \quad (\text{I.42})$$

Où :

$$\mathbf{M}_{1,N}^{(h,v)}(\alpha_0, \beta_0) = \begin{bmatrix} M_{1,N}^{11(h,v)}(\alpha_0, \beta_0) & M_{1,N}^{12(h,v)}(\alpha_0, \beta_0) \\ M_{1,N}^{21(h,v)}(\alpha_0, \beta_0) & M_{1,N}^{22(h,v)}(\alpha_0, \beta_0) \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^{N-1} \mathbf{C}_{(i,i+1)}^{(h,v)}(\alpha_0, \beta_0) \quad (\text{I.43})$$

Enfin, on déduit à l'ordre 0, dans la polarisation horizontale et verticale, l'amplitude des ondes réfléchies  $A_{1(h,v)}^{(0)}(\alpha_0, \beta_0)$  dans le milieu 1 en  $z=0$ , et transmise  $A_{N(h,v)}^{(0)}(\alpha_0, \beta_0)$  dans le milieu  $N$  en  $z=-u_{N-1}$ . Ces amplitudes présentent les coefficients de réflexion et de transmission de Fresnel. On écrit :

$$A_{1(h,v)}^{(0)}(\alpha_0, \beta_0) = \frac{M_{1,N}^{12(h,v)}(\alpha_0, \beta_0)}{M_{1,N}^{22(h,v)}(\alpha_0, \beta_0)} A_{0(h,v)}(\alpha_0, \beta_0) \quad (\text{I.44})$$

$$A_{N(h,v)}^{(0)}(\alpha_0, \beta_0) = \frac{1}{M_{1,N}^{22(h,v)}(\alpha_0, \beta_0)} A_{0(h,v)}(\alpha_0, \beta_0) \quad (\text{I.45})$$

#### I.4.12. Amplitudes réfléchies dans le milieu $i$

Dans le milieu  $i$  les ondes sont réfléchies dans les deux sens, positif et négatif. D'après (I.39), (I.42) et (I.43), les amplitudes des ondes dans le milieu  $i$  ( $i = \overline{2, N-1}$ ) sont données par l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A_{i(h,v)}^{+(0)}(\alpha_0, \beta_0) \\ A_{i(h,v)}^{-(0)}(\alpha_0, \beta_0) \end{bmatrix} &= \frac{\mathbf{M}_{i,N}^{(h,v)}(\alpha_0, \beta_0)}{M_{1,N}^{22(h,v)}(\alpha_0, \beta_0)} \begin{bmatrix} 0 \\ A_{0(h,v)}(\alpha_0, \beta_0) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{M_{1,N}^{22(h,v)}(\alpha_0, \beta_0)} \begin{bmatrix} M_{i,N}^{12(h,v)}(\alpha_0, \beta_0) \\ M_{i,N}^{22(h,v)}(\alpha_0, \beta_0) \end{bmatrix} A_{0(h,v)}(\alpha_0, \beta_0) \end{aligned} \quad (\text{I.46})$$

#### I.4.2. Résolution dans le cas rugueux (ordre un)

D'après les expressions (I.21), (I.39) -(I.41), (I.43) et (I.46), on aura un système matriciel, qui peut déduire l'expression analytique des amplitudes diffractées à l'ordre 1 de perturbation dans les deux polarisations.

En polarisation horizontale  $E_{//}$  on écrit :

$$\begin{pmatrix} A_{i(h)}^{+1}(\alpha, \beta) \\ A_{i(h)}^{-1}(\alpha, \beta) \end{pmatrix} = C_{i,i+1}^{1,h}(\alpha, \beta) \begin{pmatrix} A_{i+1(h)}^{+1}(\alpha, \beta) \\ A_{i+1(h)}^{-1}(\alpha, \beta) \end{pmatrix} + j(k_i^2 - k_{i+1}^2) \hat{a}_i(\zeta, \xi) \begin{bmatrix} \frac{D_i^{hh}(\alpha, \beta)}{M_{1,N}^{22(h)}(\alpha_0, \beta_0)} \begin{bmatrix} M_{i+1,N}^{12,h}(\alpha_0, \beta_0) \\ M_{i+1,N}^{22,h}(\alpha_0, \beta_0) \end{bmatrix} A_{0(h)}(\alpha_0, \beta_0) \\ + \frac{D_i^{hv}(\alpha, \beta)}{M_{1,N}^{22(v)}(\alpha_0, \beta_0)} \begin{bmatrix} M_{i+1,N}^{12,v}(\alpha_0, \beta_0) \\ M_{i+1,N}^{22,v}(\alpha_0, \beta_0) \end{bmatrix} A_{0(v)}(\alpha_0, \beta_0) \end{bmatrix} \quad (\text{I.47})$$

Et, en polarisation verticale  $H_{//}$  on a :

$$\begin{pmatrix} A_{i(v)}^{+1}(\alpha, \beta) \\ A_{i(v)}^{-1}(\alpha, \beta) \end{pmatrix} = C_{i,i+1}^{1,v}(\alpha, \beta) \begin{pmatrix} A_{i+1(v)}^{+1}(\alpha, \beta) \\ A_{i+1(v)}^{-1}(\alpha, \beta) \end{pmatrix} + j(k_i^2 - k_{i+1}^2) \hat{a}_i(\zeta, \xi) \begin{bmatrix} \frac{D_i^{vh}(\alpha, \beta)}{M_{1,N}^{22(h)}(\alpha_0, \beta_0)} \begin{bmatrix} M_{i+1,N}^{12,h}(\alpha_0, \beta_0) \\ M_{i+1,N}^{22,h}(\alpha_0, \beta_0) \end{bmatrix} A_{0(h)}(\alpha_0, \beta_0) \\ + \frac{D_i^{vv}(\alpha, \beta)}{M_{1,N}^{22(v)}(\alpha_0, \beta_0)} \begin{bmatrix} M_{i+1,N}^{12,v}(\alpha_0, \beta_0) \\ M_{i+1,N}^{22,v}(\alpha_0, \beta_0) \end{bmatrix} A_{0(v)}(\alpha_0, \beta_0) \end{bmatrix} \quad (\text{I.48})$$

On définit en polarisation horizontale les matrices :

$$\begin{cases} D_i^{hh} = \frac{\cos(\varphi - \varphi_0)}{2\gamma_i} \begin{pmatrix} \exp[+j(\gamma_{0i+1} - \gamma_i)u_i] & \exp[-j(\gamma_{0i+1} + \gamma_i)u_i] \\ -\exp[+j(\gamma_{0i+1} + \gamma_i)u_i] & -\exp[-j(\gamma_{0i+1} - \gamma_i)u_i] \end{pmatrix} \\ D_i^{hv} = \frac{\gamma_{0i+1} \sin(\varphi - \varphi_0)}{2\gamma_i k_{i+1}} \begin{pmatrix} -\exp[+j(\gamma_{0i+1} - \gamma_i)u_i] & \exp[-j(\gamma_{0i+1} + \gamma_i)u_i] \\ \exp[+j(\gamma_{0i+1} + \gamma_i)u_i] & -\exp[-j(\gamma_{0i+1} - \gamma_i)u_i] \end{pmatrix} \end{cases} \quad (\text{I.49})$$

Et, en polarisation verticale :

$$\begin{cases} D_i^{vh} = \frac{\sin(\varphi - \varphi_0)}{2k_i} \begin{pmatrix} \exp[+j(\gamma_{0i+1} - \gamma_i)u_i] & \exp[-j(\gamma_{0i+1} + \gamma_i)u_i] \\ \exp[+j(\gamma_{0i+1} + \gamma_i)u_i] & \exp[-j(\gamma_{0i+1} - \gamma_i)u_i] \end{pmatrix} \\ D_i^{vv} = \frac{1}{2\gamma_i k_i k_{i+1}} \begin{pmatrix} \eta^+ \cdot \exp[+j(\gamma_{0i+1} - \gamma_i)u_i] & -\eta^- \cdot \exp[-j(\gamma_{0i+1} + \gamma_i)u_i] \\ \eta^- \cdot \exp[+j(\gamma_{0i+1} + \gamma_i)u_i] & -\eta^+ \cdot \exp[-j(\gamma_{0i+1} - \gamma_i)u_i] \end{pmatrix} \end{cases} \quad (\text{I.50})$$

Avec :

$$\begin{cases} \eta^+ = (\chi\chi_0 + \gamma_i\gamma_{0i+1} \cos(\varphi - \varphi_0)) \\ \eta^- = (-\chi\chi_0 + \gamma_i\gamma_{0i+1} \cos(\varphi - \varphi_0)) \\ \chi = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}; \chi_0 = \sqrt{\alpha_0^2 + \beta_0^2} \end{cases} \quad (\text{I.51})$$

Et :

$$\begin{cases} \cos(\varphi - \varphi_0) = \sin\varphi\sin\varphi_0 + \cos\varphi\cos\varphi_0 = \frac{(\beta\beta_0 + \alpha\alpha_0)}{\chi_0\chi} \\ \sin(\varphi - \varphi_0) = \sin\varphi\cos\varphi_0 - \cos\varphi\sin\varphi_0 = \frac{(\beta\alpha_0 - \alpha\beta_0)}{\chi_0\chi} \end{cases} \quad (\text{I.52})$$

Les expressions (I.47) et (I.48), qui relient les amplitudes des ondes diffractées dans le milieu  $i$  avec celles de milieu  $i+1$  et avec les amplitudes de l'onde incidente, peuvent s'écrire :

En polarisation horizontale  $E_{//}$  :

$$\begin{pmatrix} A_{i(h)}^{+,1} \\ A_{i(h)}^{-,1} \end{pmatrix} = C_{i,i+1}^{1,h} \begin{pmatrix} A_{i+1(h)}^{+,1} \\ A_{i+1(h)}^{-,1} \end{pmatrix} + j(k_i^2 - k_{i+1}^2) \hat{a}_i(\zeta, \xi) \begin{bmatrix} N_{i,hh}^+ \\ N_{i,hh}^- \end{bmatrix} A_{0(h)} + \begin{bmatrix} N_{i,hv}^+ \\ N_{i,hv}^- \end{bmatrix} A_{0(v)} \quad (\text{I.53})$$



Avec :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} N_{i,hh}^+ \\ N_{i,hh}^- \end{bmatrix} = \frac{1}{M_{1,N}^{22(h)}(\alpha_0, \beta_0)} \begin{bmatrix} D_i^{11,hh} M_{i+1,N}^{12,h}(\alpha_0, \beta_0) + D_i^{12,hh} M_{i+1,N}^{22,h}(\alpha_0, \beta_0) \\ D_i^{21,hh} M_{i+1,N}^{12,h}(\alpha_0, \beta_0) + D_i^{22,hh} M_{i+1,N}^{22,h}(\alpha_0, \beta_0) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} N_{i,hv}^+ \\ N_{i,hv}^- \end{bmatrix} = \frac{1}{M_{1,N}^{22(v)}(\alpha_0, \beta_0)} \begin{bmatrix} D_i^{11,hv} M_{i+1,N}^{12,v}(\alpha_0, \beta_0) + D_i^{12,hv} M_{i+1,N}^{22,v}(\alpha_0, \beta_0) \\ D_i^{21,hv} M_{i+1,N}^{12,v}(\alpha_0, \beta_0) + D_i^{22,hv} M_{i+1,N}^{22,v}(\alpha_0, \beta_0) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (\text{I.54})$$

Et en polarisation verticale H// par:

$$\begin{pmatrix} A_{i(v)}^{+,1} \\ A_{i(v)}^{-,1} \end{pmatrix} = C_{i,i+1}^{1,v} \begin{pmatrix} A_{i+1(v)}^{+,1} \\ A_{i+1(v)}^{-,1} \end{pmatrix} + j(k_i^2 - k_{i+1}^2) \hat{a}_i(\zeta, \xi) \left[ \begin{bmatrix} N_{i,vh}^+ \\ N_{i,vh}^- \end{bmatrix} A_{0(h)} + \begin{bmatrix} N_{i,vv}^+ \\ N_{i,vv}^- \end{bmatrix} A_{0(v)} \right] \quad (\text{I.55})$$

Avec :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} N_{i,vh}^+ \\ N_{i,vh}^- \end{bmatrix} = \frac{1}{M_{1,N}^{22(h)}(\alpha_0, \beta_0)} \begin{bmatrix} D_i^{11,vh} M_{i+1,N}^{12,h}(\alpha_0, \beta_0) + D_i^{12,vh} M_{i+1,N}^{22,h}(\alpha_0, \beta_0) \\ D_i^{21,vh} M_{i+1,N}^{12,h}(\alpha_0, \beta_0) + D_i^{22,vh} M_{i+1,N}^{22,h}(\alpha_0, \beta_0) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} N_{i,vv}^+ \\ N_{i,vv}^- \end{bmatrix} = \frac{1}{M_{1,N}^{22(v)}(\alpha_0, \beta_0)} \begin{bmatrix} D_i^{11,vv} M_{i+1,N}^{12,v}(\alpha_0, \beta_0) + D_i^{12,vv} M_{i+1,N}^{22,v}(\alpha_0, \beta_0) \\ D_i^{21,vv} M_{i+1,N}^{12,v}(\alpha_0, \beta_0) + D_i^{22,vv} M_{i+1,N}^{22,v}(\alpha_0, \beta_0) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (\text{I.56})$$

#### I.4.2.1 Amplitudes diffractées et transmises (milieu 1 et N)

Selon les expressions (I.53) et (I.54), on peut obtenir l'équation qui permet d'assurer le passage de milieu  $i$  vers le milieu  $N$ . Ainsi, on écrit :

En polarisation horizontale :

$$\begin{pmatrix} A_{i(h)}^{+,1} \\ A_{i(h)}^{-,1} \end{pmatrix} = M_{i,N}^{1,h} \begin{pmatrix} 0 \\ A_{N(h)}^{-,1} \end{pmatrix} + j \sum_{j=i}^{N-1} (k_j^2 - k_{j+1}^2) \hat{a}_j(\zeta, \xi) \left[ \begin{bmatrix} S_{i,j}^{+,hh} \\ S_{i,j}^{-,hh} \end{bmatrix} A_{0(h)} + \begin{bmatrix} S_{i,j}^{+,hv} \\ S_{i,j}^{-,hv} \end{bmatrix} A_{0(v)} \right] \quad (\text{I.57})$$

Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} S_{i,j}^{+,hh} \\ S_{i,j}^{-,hh} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{j,hh}^+ M_{i,j}^{11,h}(\alpha, \beta) + N_{j,hh}^- M_{i,j}^{12,h}(\alpha, \beta) \\ N_{j,hh}^+ M_{i,j}^{21,h}(\alpha, \beta) + N_{j,hh}^- M_{i,j}^{22,h}(\alpha, \beta) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} S_{i,j}^{+,hv} \\ S_{i,j}^{-,hv} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{j,hv}^+ M_{i,j}^{11,h}(\alpha, \beta) + N_{j,hv}^- M_{i,j}^{12,h}(\alpha, \beta) \\ N_{j,hv}^+ M_{i,j}^{21,h}(\alpha, \beta) + N_{j,hv}^- M_{i,j}^{22,h}(\alpha, \beta) \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (\text{I.58})$$

Et en polarisation verticale :

$$\begin{pmatrix} A_{i(v)}^{+,1} \\ A_{i(v)}^{-,1} \end{pmatrix} = M_{i,N}^{1,v} \begin{pmatrix} 0 \\ A_{N(v)}^{-,1} \end{pmatrix} + j \sum_{j=i}^{N-1} (k_j^2 - k_{j+1}^2) \hat{a}_j(\zeta, \xi) \begin{bmatrix} S_{i,j}^{+,vh} \\ S_{i,j}^{-,vh} \end{bmatrix} A_{0(h)} + \begin{bmatrix} S_{i,j}^{+,vv} \\ S_{i,j}^{-,vv} \end{bmatrix} A_{0(v)} \quad (\text{I.59})$$

Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} S_{i,j}^{+,vh} \\ S_{i,j}^{-,vh} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{j,vh}^+ M_{i,j}^{11,v}(\alpha, \beta) + N_{j,vh}^- M_{i,j}^{12,v}(\alpha, \beta) \\ N_{j,vh}^+ M_{i,j}^{21,v}(\alpha, \beta) + N_{j,vh}^- M_{i,j}^{22,v}(\alpha, \beta) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} S_{i,j}^{+,vv} \\ S_{i,j}^{-,vv} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{j,vv}^+ M_{i,j}^{11,v}(\alpha, \beta) + N_{j,vv}^- M_{i,j}^{12,v}(\alpha, \beta) \\ N_{j,vv}^+ M_{i,j}^{21,v}(\alpha, \beta) + N_{j,vv}^- M_{i,j}^{22,v}(\alpha, \beta) \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (\text{I.60})$$

avec les expressions (I.57) et (I.59), on pose simplement que  $i=1$ , on obtient les amplitudes diffractées  $A_{1(h,v)}^{+,1}(\alpha, \beta)$  dans le milieu 1, et les amplitudes transmises  $A_{N(h,v)}^{-,1}(\alpha, \beta)$  dans le milieu  $N$ , dans les deux polarisations.

En polarisation horizontale on obtient :

$$A_{1(h)}^{+,1} = j \sum_{j=1}^{N-1} (k_j^2 - k_{j+1}^2) \hat{a}_j(\zeta, \xi) \left[ \left( S_{1,j}^{+,hh} - \frac{M_{1,N}^{12,h}(\alpha, \beta)}{M_{1,N}^{22,h}(\alpha, \beta)} S_{1,j}^{-,hh} \right) A_{0(h)} + \left( S_{1,j}^{+,hv} - \frac{M_{1,N}^{12,h}(\alpha, \beta)}{M_{1,N}^{22,h}(\alpha, \beta)} S_{1,j}^{-,hv} \right) A_{0(v)} \right] \quad (\text{I.61})$$

$$A_{N(h)}^{-,1} = -j \frac{1}{M_{1,N}^{22,h}} \sum_{j=1}^{N-1} (k_j^2 - k_{j+1}^2) \hat{a}_j(\zeta, \xi) \left[ S_{1,j}^{-,hh} A_{0(h)} + S_{1,j}^{-,hv} A_{0(v)} \right] \quad (\text{I.62})$$

Et en polarisation verticale :

$$A_{1(v)}^{+,1} = j \sum_{j=1}^{N-1} (k_j^2 - k_{j+1}^2) \hat{a}_j(\zeta, \xi) \left[ \left( S_{1,j}^{+,vh} - \frac{M_{1,N}^{12,v}(\alpha, \beta)}{M_{1,N}^{22,v}(\alpha, \beta)} S_{1,j}^{-,vh} \right) A_{0(h)} + \left( S_{1,j}^{+,vv} - \frac{M_{1,N}^{12,v}(\alpha, \beta)}{M_{1,N}^{22,v}(\alpha, \beta)} S_{1,j}^{-,vv} \right) A_{0(v)} \right] \quad (\text{I.63})$$

$$A_{N(v)}^{-1} = -\frac{j}{M_{1,N}^{22,v}} \sum_{j=1}^{N-1} (k_j^2 - k_{j+1}^2) \hat{a}_j(\zeta, \xi) \left[ S_{1,j}^{-,vh} A_{0(h)} + S_{1,j}^{-,vv} A_{0(v)} \right] \quad (\text{I.64})$$

### I.4.2.2 Amplitudes diffractées dans le milieu $i$

Finalement, à partir des expressions (I.57), (I.59) et (I.61)-(I.64), les amplitudes diffractées à l'ordre 1 dans le milieu  $i$  ( $i = \overline{2, N-1}$ ), sont données par les expressions suivantes :

En polarisation horizontale :

$$\begin{pmatrix} A_{i(h)}^{+,1} \\ A_{i(h)}^{-,1} \end{pmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{l} j \sum_{j=i}^{N-1} (k_j^2 - k_{j+1}^2) \hat{a}_j(\zeta, \xi) S_{i,j}^{+,hh} - j \sum_{j=1}^{N-1} (k_j^2 - k_{j+1}^2) \hat{a}_j(\zeta, \xi) \frac{M_{i,N}^{12,h}}{M_{1,N}^{22,h}} S_{1,j}^{-,hh} \\ j \sum_{j=i}^{N-1} (k_j^2 - k_{j+1}^2) \hat{a}_j(\zeta, \xi) S_{i,j}^{-,hh} - j \sum_{j=1}^{N-1} (k_j^2 - k_{j+1}^2) \hat{a}_j(\zeta, \xi) \frac{M_{i,N}^{22,h}}{M_{1,N}^{22,h}} S_{1,j}^{-,hh} \end{array} \right] A_{0(h)} \\ + \left[ \begin{array}{l} j \sum_{j=i}^{N-1} (k_j^2 - k_{j+1}^2) \hat{a}_j(\zeta, \xi) S_{i,j}^{+,hv} - j \sum_{j=1}^{N-1} (k_j^2 - k_{j+1}^2) \hat{a}_j(\zeta, \xi) \frac{M_{i,N}^{12,h}}{M_{1,N}^{22,h}} S_{1,j}^{-,hv} \\ j \sum_{j=i}^{N-1} (k_j^2 - k_{j+1}^2) \hat{a}_j(\zeta, \xi) S_{i,j}^{-,hv} - j \sum_{j=1}^{N-1} (k_j^2 - k_{j+1}^2) \hat{a}_j(\zeta, \xi) \frac{M_{i,N}^{22,h}}{M_{1,N}^{22,h}} S_{1,j}^{-,hv} \end{array} \right] A_{0(v)} \end{array} \right\} \quad (\text{I.65})$$

Et en polarisation verticale :

$$\begin{pmatrix} A_{i(v)}^{+,1} \\ A_{i(v)}^{-,1} \end{pmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{l} j \sum_{j=i}^{N-1} (k_j^2 - k_{j+1}^2) \hat{a}_j(\zeta, \xi) S_{i,j}^{+,vv} - j \sum_{j=1}^{N-1} (k_j^2 - k_{j+1}^2) \hat{a}_j(\zeta, \xi) \frac{M_{i,N}^{12,v}}{M_{1,N}^{22,v}} S_{1,j}^{-,vv} \\ j \sum_{j=i}^{N-1} (k_j^2 - k_{j+1}^2) \hat{a}_j(\zeta, \xi) S_{i,j}^{-,vv} - j \sum_{j=1}^{N-1} (k_j^2 - k_{j+1}^2) \hat{a}_j(\zeta, \xi) \frac{M_{i,N}^{22,v}}{M_{1,N}^{22,v}} S_{1,j}^{-,vv} \end{array} \right] A_{0(v)} \\ + \left[ \begin{array}{l} j \sum_{j=i}^{N-1} (k_j^2 - k_{j+1}^2) \hat{a}_j(\zeta, \xi) S_{i,j}^{+,vh} - j \sum_{j=1}^{N-1} (k_j^2 - k_{j+1}^2) \hat{a}_j(\zeta, \xi) \frac{M_{i,N}^{12,v}}{M_{1,N}^{22,v}} S_{1,j}^{-,vh} \\ j \sum_{j=i}^{N-1} (k_j^2 - k_{j+1}^2) \hat{a}_j(\zeta, \xi) S_{i,j}^{-,vh} - j \sum_{j=1}^{N-1} (k_j^2 - k_{j+1}^2) \hat{a}_j(\zeta, \xi) \frac{M_{i,N}^{22,v}}{M_{1,N}^{22,v}} S_{1,j}^{-,vh} \end{array} \right] A_{0(h)} \end{array} \right\} \quad (\text{I.66})$$

## Chapitre II

### Cas particulier d'un système de quatre couches (N=4)

#### Sommaire

Chapitre II : Cas particulier d'un système de quatre couche	
II.1. Introduction.....	17
II.2. Résolution à l'ordre zéro.....	17
II.3. Résolution à l'ordre un.....	18
II.4. Intensité diffractée, intensité cohérente et incohérente .....	21
II.4.1. Intensité cohérente et incohérente.....	21
II.4.2. Variances et covariance des parties réelle et imaginaire de l'amplitude de diffraction.....	23
II.4.3. Comportements asymptotiques de variance, de covariance et de l'intensité incohérente.....	24

## Chapitre II

### Cas particulier d'un système de quatre couches (N=4)

#### II.1. Introduction :

Nous allons présenter dans ce chapitre les problèmes de la diffraction pour une structure composée de quatre couches naturelles et bidimensionnelles ( $N=4$ ).

Nous calculons dans ce qui suit les amplitudes diffractées dans le milieu 1, en absence de rugosité (ordre 0) et en présence de rugosité (ordre 1), obtenues par la méthode SPM, ensuite nous allons présenter les propriétés statistiques telles que l'intensité cohérente et incohérente du signal diffracté, variances et covariance des parties réelle et imaginaire de l'amplitude de diffraction

#### II.2. Résolution à l'ordre zéro

D'après (I.44), l'expression de l'amplitude réfléchie à l'ordre zéro dans le milieu 1 pour les deux polarisations s'écrivent :

$$A_{1(h,v)}^{(0)}(\alpha_0, \beta_0) = \frac{M_{1,N}^{12(h,v)}(\alpha_0, \beta_0)}{M_{1,N}^{22(h,v)}(\alpha_0, \beta_0)} A_{0(h,v)}(\alpha_0, \beta_0) \quad (\text{II.1})$$

on trouve en polarisation horizontale

$$A_{1(h)}^{(0)} = \frac{1}{r_h(\gamma_0)} \times \left( \begin{aligned} &\gamma_{2,0}\gamma_{3,0}(\gamma_{1,0} - \gamma_{4,0})\cos(\gamma_{2,0}d_1)\cos(\gamma_{3,0}d_2) + (\gamma_{2,0}^2\gamma_{4,0} - \gamma_{1,0}\gamma_{3,0}^2)\sin(\gamma_{2,0}d_1)\sin(\gamma_{3,0}d_2) \\ &-j(\gamma_{2,0}(\gamma_{3,0}^2 - \gamma_{1,0}\gamma_{4,0})\cos(\gamma_{2,0}d_1)\sin(\gamma_{3,0}d_2) + \gamma_{3,0}(\gamma_{2,0}^2 - \gamma_{1,0}\gamma_{4,0})\sin(\gamma_{2,0}d_1)\cos(\gamma_{3,0}d_2)) \end{aligned} \right) A_{0(h)}(\alpha_0, \beta_0) \quad (\text{II.2})$$

Avec :

$$\begin{aligned} r_h(\gamma_0) = &\gamma_{2,0}\gamma_{3,0}(\gamma_{1,0} + \gamma_{4,0})\cos(\gamma_{2,0}d_1)\cos(\gamma_{3,0}d_2) - (\gamma_{2,0}^2\gamma_{4,0} + \gamma_{1,0}\gamma_{3,0}^2)\sin(\gamma_{2,0}d_1)\sin(\gamma_{3,0}d_2) \\ &+ j(\gamma_{2,0}(\gamma_{1,0}\gamma_{4,0} + \gamma_{3,0}^2)\cos(\gamma_{2,0}d_1)\sin(\gamma_{3,0}d_2) + \gamma_{3,0}(\gamma_{2,0}^2 + \gamma_{1,0}\gamma_{4,0})\sin(\gamma_{2,0}d_1)\cos(\gamma_{3,0}d_2)) \end{aligned} \quad (\text{II.3})$$

On trouve en polarisation verticale :

$$A_{1(v)}^{(0)} = \frac{1}{r_v(\gamma_0)} \times \left( \begin{aligned} &k_2^2 k_3^2 \gamma_{2,0} \gamma_{3,0} (k_4^2 \gamma_{1,0} - k_1^2 \gamma_{4,0}) \cos(\gamma_{3,0} d_2) \cos(\gamma_{2,0} d_1) + (k_1^2 k_3^4 \gamma_{2,0}^2 \gamma_{4,0} - k_2^4 k_4^2 \gamma_{1,0} \gamma_{3,0}^2) \sin(\gamma_{3,0} d_2) \sin(\gamma_{2,0} d_1) \\ &- j (k_3^2 \gamma_{3,0} (k_1^2 k_4^2 \gamma_{2,0}^2 - k_2^4 \gamma_{1,0} \gamma_{4,0}) \cos(\gamma_{3,0} d_2) \sin(\gamma_{2,0} d_1) + k_2^2 \gamma_{2,0} (k_1^2 k_4^2 \gamma_{3,0}^2 - k_3^4 \gamma_{1,0} \gamma_{4,0}) \sin(\gamma_{3,0} d_2) \cos(\gamma_{2,0} d_1)) \end{aligned} \right) A_{0(v)}(\alpha_0, \beta_0) \quad (\text{II.4})$$

Avec :

$$r_v(\gamma_0) = k_2^2 k_3^2 \gamma_{2,0} \gamma_{3,0} (\gamma_{1,0} k_4^2 + k_{1,0}^2 \gamma_4) \cos(\gamma_{3,0} d_2) \cos(\gamma_{2,0} d_1) - (k_1^2 k_3^4 \gamma_{2,0}^2 \gamma_{4,0} + k_2^4 k_4^2 \gamma_{1,0} \gamma_{3,0}^2) \sin(\gamma_{3,0} d_2) \sin(\gamma_{2,0} d_1) \\ + j (k_3^2 \gamma_{3,0} (k_1^2 k_4^2 \gamma_{2,0}^2 + k_2^4 \gamma_{1,0} \gamma_{4,0}) \cos(\gamma_{3,0} d_2) \sin(\gamma_{2,0} d_1) + k_2^2 \gamma_{2,0} (k_1^2 k_4^2 \gamma_{3,0}^2 + k_3^4 \gamma_{1,0} \gamma_{4,0}) \sin(\gamma_{3,0} d_2) \cos(\gamma_{2,0} d_1)) \quad (\text{II.5})$$

### II.3. Résolution à l'ordre un

D'après l'expression (I.61), les ondes réfléchies dans le milieu 1 ont pour expressions :

En polarisation horizontale:

$$A_{1(h)}^{+1} = j \sum_{j=1}^3 (k_j^2 - k_{j+1}^2) \hat{a}_j(\zeta, \xi) \left[ \left( S_{1,j}^{+,hh} - \frac{M_{1,4}^{12,h}(\alpha, \beta)}{M_{1,4}^{22,h}(\alpha, \beta)} S_{1,j}^{-,hh} \right) A_{0(h)} + \left( S_{1,j}^{+,hv} - \frac{M_{1,4}^{12,h}(\alpha, \beta)}{M_{1,4}^{22,h}(\alpha, \beta)} S_{1,j}^{-,hv} \right) A_{0(v)} \right] \quad (\text{II.7})$$

Ou :

$$A_{1(h)}^{+1} = A_{1(hh)}^{+1} + A_{1(hv)}^{+1} = \sum_{j=1}^3 K_j^{(+,hh)} \hat{a}_j(\zeta, \xi) A_{0(h)} + \sum_{j=1}^3 K_j^{(+,hv)} \hat{a}_j(\zeta, \xi) A_{0(v)} \quad (\text{II.8})$$

Avec :

$$K_1^{(+,hh)} = \frac{2j(k_1^2 - k_2^2) \gamma_{1,0} \cos(\varphi - \varphi_0)}{r_h(\gamma_0) r_h(\gamma)} \left( \begin{aligned} &\gamma_{3,0} (\gamma_{2,0} \cos(\gamma_{2,0} d_1) \cos(\gamma_{3,0} d_2) - \gamma_{3,0} \sin(\gamma_{2,0} d_1) \sin(\gamma_{3,0} d_2)) \\ &+ j \gamma_{4,0} (\gamma_{2,0} \cos(\gamma_{2,0} d_1) \sin(\gamma_{3,0} d_2) + \gamma_{3,0} \sin(\gamma_{2,0} d_1) \cos(\gamma_{3,0} d_2)) \end{aligned} \right) \\ \times \left( \begin{aligned} &\gamma_3 (\gamma_2 \cos(\gamma_2 d_1) \cos(\gamma_3 d_2) - \gamma_3 \sin(\gamma_2 d_1) \sin(\gamma_3 d_2)) \\ &+ j \gamma_4 (\gamma_2 \cos(\gamma_2 d_1) \sin(\gamma_3 d_2) + \gamma_3 \sin(\gamma_2 d_1) \cos(\gamma_3 d_2)) \end{aligned} \right) \quad (\text{II.9})$$

$$K_2^{(+,hh)} = \frac{2j(k_2^2 - k_3^2)\gamma_{1,0}\gamma_{2,0}\gamma_2 \cos(\varphi - \varphi_0)}{r_h(\gamma_0)r_h(\gamma)} \left( \left( \gamma_{3,0} \cos(\gamma_{3,0}d_2) + j\gamma_{4,0} \sin(\gamma_{3,0}d_2) \right) \right. \\ \left. \times (\gamma_3 \cos(\gamma_3d_2) + j\gamma_4 \sin(\gamma_3d_2)) \right) \quad (\text{II.10})$$

$$K_3^{(+,hh)} = \frac{2j(k_3^2 - k_4^2)\gamma_{1,0}\gamma_{2,0}\gamma_{3,0}\gamma_2\gamma_3 \cos(\varphi - \varphi_0)}{r_h(\gamma_0)r_h(\gamma)} \quad (\text{II.11})$$

$$K_1^{(+,hv)} = \frac{2j(k_1^2 - k_2^2)k_1\gamma_{1,0}\gamma_{2,0} \sin(\varphi - \varphi_0)}{r_v(\gamma_0)r_h(\gamma)} \left( k_3^2\gamma_{4,0} \left( k_2^2\gamma_{3,0} \cos(\gamma_{3,0}d_2) \cos(\gamma_{2,0}d_1) - k_3^2\gamma_{2,0} \sin(\gamma_{3,0}d_2) \sin(\gamma_{2,0}d_1) \right) \right. \\ \left. + jk_4^2\gamma_{3,0} \left( k_2^2\gamma_{3,0} \sin(\gamma_{3,0}d_2) \cos(\gamma_{2,0}d_1) + k_3^2\gamma_{2,0} \cos(\gamma_{3,0}d_2) \sin(\gamma_{2,0}d_1) \right) \right) \\ \times \left( \gamma_3 (\gamma_2 \cos(\gamma_2d_2) \cos(\gamma_3d_2) - \gamma_3 \sin(\gamma_2d_1) \sin(\gamma_3d_3)) \right. \\ \left. + j\gamma_4 (\gamma_2 \cos(\gamma_2d_2) \sin(\gamma_3d_2) + \gamma_3 \sin(\gamma_2d_1) \cos(\gamma_3d_3)) \right) \quad (\text{II.12})$$

$$K_2^{(+,hv)} = \frac{2j(k_2^2 - k_3^2)k_1k_2^2\gamma_{1,0}\gamma_{2,0}\gamma_{3,0}\gamma_2 \sin(\varphi - \varphi_0)}{r_v(\gamma_0)r_h(\gamma)} \left( k_3^2\gamma_{4,0} \cos(\gamma_{3,0}d_2) + jk_4^2\gamma_{3,0} \sin(\gamma_{3,0}d_2) \right) \\ \times (\gamma_3 \cos(\gamma_3d_2) + j\gamma_4 \sin(\gamma_3d_2)) \quad (\text{II.13})$$

$$K_3^{(+,hv)} = \frac{2j(k_3^2 - k_4^2)k_1k_2^2k_3^2\gamma_{1,0}\gamma_{2,0}\gamma_{3,0}\gamma_{4,0}\gamma_2\gamma_3 \sin(\varphi - \varphi_0)}{r_v(\gamma_0)r_h(\gamma)} \quad (\text{II.14})$$

Et en polarisation verticale

$$A_{1(v)}^{+,1} = j \sum_{j=1}^3 (k_j^2 - k_{j+1}^2) \hat{a}_j(\zeta, \xi) \left[ \left( S_{1,j}^{+,vh} - \frac{M_{1,4}^{12,v}(\alpha, \beta)}{M_{1,4}^{22,v}(\alpha, \beta)} S_{1,j}^{-,vh} \right) A_{0(h)} + \left( S_{1,j}^{+,vv} - \frac{M_{1,4}^{12,v}(\alpha, \beta)}{M_{1,4}^{22,v}(\alpha, \beta)} S_{1,j}^{-,vv} \right) A_{0(v)} \right] \quad (\text{II.15})$$

Où :

$$A_{1(v)}^{+,1} = A_{1(vh)}^{+,1} + A_{1(vv)}^{+,1} = \sum_{j=1}^3 K_j^{(+,vh)} \hat{a}_j(\zeta, \xi) A_{0(h)} + \sum_{j=1}^3 K_j^{(+,vv)} \hat{a}_j(\zeta, \xi) A_{0(v)} \quad (\text{I.16})$$

Avec :

$$K_1^{(+,vv)} = \frac{j2\gamma_{1,0}(k_1^2 - k_2^2)}{r_v(\gamma_0)r_v(\gamma)}$$

$$\left( \begin{array}{l} k_2^2 \chi \chi_0 \left[ k_4^2 \gamma_3 (k_3^2 \gamma_2 \cos(\gamma_3 d_2) \cos(\gamma_2 d_1) - k_2^2 \gamma_3 \sin \gamma_3 (\gamma_3 d_2) \sin(\gamma_2 d_1)) \right. \\ \left. + jk_3^2 \gamma_4 (k_3^2 \gamma_2 \sin(\gamma_3 d_2) \cos(\gamma_2 d_1) + k_2^2 \gamma_3 \cos(\gamma_3 d_2) \sin(\gamma_2 d_1)) \right] \\ \times \left[ k_4^2 \gamma_{3,0} (k_3^2 \gamma_{2,0} \cos(\gamma_{2,0} d_1) \cos(\gamma_{3,0} d_2) - k_2^2 \gamma_{3,0} \sin(\gamma_{2,0} d_1) \sin(\gamma_{3,0} d_2)) \right. \\ \left. + jk_3^2 \gamma_{4,0} (k_2^2 \gamma_{3,0} \sin(\gamma_{2,0} d_1) \cos(\gamma_{3,0} d_2) + k_3^2 \gamma_{2,0} \cos(\gamma_{2,0} d_1) \sin(\gamma_{3,0} d_2)) \right] \\ - k_1^2 \gamma_2 \gamma_{2,0} \cos(\varphi - \varphi_0) \left[ k_3^2 \gamma_4 (k_2^2 \gamma_3 \cos(\gamma_3 d_2) \cos(\gamma_2 d_1) - k_3^2 \gamma_2 \sin(\gamma_3 d_2) \sin(\gamma_2 d_1)) \right. \\ \left. + jk_4^2 \gamma_3 (k_3^2 \gamma_2 \cos(\gamma_3 d_2) \sin(\gamma_2 d_1) + k_2^2 \gamma_3 \sin(\gamma_3 d_2) \cos(\gamma_2 d_1)) \right] \\ \times \left[ k_3^2 \gamma_{4,0} (k_2^2 \gamma_{3,0} \cos(\gamma_{2,0} d_1) \cos(\gamma_{3,0} d_2) - k_3^2 \gamma_{2,0} \sin(\gamma_{2,0} d_1) \sin(\gamma_{3,0} d_2)) \right. \\ \left. + jk_4^2 \gamma_{3,0} [k_2^2 \gamma_{3,0} \cos(\gamma_{2,0} d_1) \sin(\gamma_{3,0} d_2) + k_3^2 \gamma_{2,0} \sin(\gamma_{2,0} d_1) \cos(\gamma_{3,0} d_2)] \right] \end{array} \right) \quad (\text{II.17})$$

$$K_2^{(+,vv)} = \frac{2jk_1^2 k_2^2 \gamma_{1,0} \gamma_{2,0} \gamma_2 (k_2^2 - k_3^2)}{r_v(\gamma_0)r_v(\gamma)} \left( \begin{array}{l} \left( k_3^2 \gamma_3 \gamma_{3,0} (k_4^2 \chi \chi_0 - k_2^2 k_3^2 \gamma_4 \gamma_{4,0} \cos(\varphi - \varphi_0)) \cos(\gamma_3 d_2) \cos(\gamma_{3,0} d_2) \right) \\ + \left( -k_3^6 \gamma_4 \gamma_{4,0} \chi \chi_0 + k_2^2 k_4^4 \gamma_3^2 \gamma_{3,0}^2 \cos(\varphi - \varphi_0) \right) \sin(\gamma_3 d_2) \sin(\gamma_{3,0} d_2) \\ + jk_3^2 k_4^2 \left( \gamma_{3,0} (k_3^2 \gamma_4 \chi \chi_0 - k_2^2 \gamma_{4,0} \gamma_3^2 \cos(\varphi - \varphi_0)) \sin(\gamma_3 d_2) \cos(\gamma_{3,0} d_2) \right) \\ + \gamma_3 (k_3^2 \gamma_{4,0} \chi \chi_0 - k_2^2 \gamma_4 \gamma_{3,0}^2 \cos(\varphi - \varphi_0)) \cos(\gamma_3 d_2) \sin(\gamma_{3,0} d_2) \end{array} \right) \quad (\text{II.18})$$

$$K_3^{(+,vv)} = \frac{j2\gamma_{1,0} \gamma_{2,0} \gamma_{3,0} \gamma_2 \gamma_3 k_1^2 k_2^4 k_3^2 (k_3^2 - k_4^2) (k_4^2 \chi \chi_0 - k_3^2 \gamma_4 \gamma_{4,0} \cos(\varphi - \varphi_0))}{r_v(\gamma_0)r_v(\gamma)} \quad (\text{II.19})$$

$$K_1^{(+,vh)} = \frac{2jk_1 \gamma_{1,0} \gamma_2 (k_1^2 - k_2^2) \sin(\varphi - \varphi_0)}{r_h(\gamma_0)r_v(\gamma)} \left( \begin{array}{l} \gamma_{3,0} (\gamma_{2,0} \cos(\gamma_{2,0} d_1) \cos(\gamma_{3,0} d_2) - \gamma_{3,0} \sin(\gamma_{2,0} d_1) \sin(\gamma_{3,0} d_2)) \\ + j\gamma_{4,0} (\gamma_{3,0} \sin(\gamma_{2,0} d_1) \cos(\gamma_{3,0} d_2) + \gamma_{2,0} \cos(\gamma_{2,0} d_1) \sin(\gamma_{3,0} d_2)) \\ \times \left( k_3^2 \gamma_4 (k_2^2 \gamma_3 \cos(\gamma_2 d_1) \cos(\gamma_3 d_2) - k_3^2 \gamma_2 \sin(\gamma_2 d_1) \sin(\gamma_3 d_2)) \right. \\ \left. + jk_4^2 \gamma_3 (k_2^2 \gamma_3 \cos(\gamma_2 d_1) \sin(\gamma_3 d_2) + k_3^2 \gamma_2 \sin(\gamma_2 d_1) \cos(\gamma_3 d_2)) \right) \end{array} \right) \quad (\text{II.20})$$

$$K_2^{(+,vh)} = j \frac{2k_1 k_2^2 \gamma_{1,0} \gamma_{2,0} \gamma_2 \gamma_3 (k_2^2 - k_3^2) \sin(\varphi - \varphi_0)}{r_h(\gamma_0)r_v(\gamma)} \left( \gamma_{3,0} \cos(\gamma_{3,0} d_2) + j\gamma_{4,0} \sin(\gamma_{3,0} d_2) \right) \times (k_3^2 \gamma_4 \cos(\gamma_3 d_2) + jk_4^2 \gamma_3 \sin(\gamma_3 d_2)) \quad (\text{II.21})$$



$$K_3^{(+,vh)} = \frac{j^2 \gamma_{1,0} \gamma_{2,0} \gamma_{3,0} \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 k_1 k_2 k_3^2 (k_3^2 - k_4^2) \sin(\varphi - \varphi_0)}{r_h(\gamma_0) r_v(\gamma)} \quad (\text{II.22})$$

On note que:

$$r_h(\gamma) = \gamma_2 \gamma_3 (\gamma_1 + \gamma_4) \cos(\gamma_2 d_1) \cos(\gamma_3 d_2) - (\gamma_2^2 \gamma_4 + \gamma_1 \gamma_3^2) \sin(\gamma_2 d_1) \sin(\gamma_3 d_2) \\ + j(\gamma_2 (\gamma_1 \gamma_4 + \gamma_3^2) \cos(\gamma_2 d_1) \sin(\gamma_3 d_2) + \gamma_3 (\gamma_2^2 + \gamma_1 \gamma_4) \sin(\gamma_2 d_1) \cos(\gamma_3 d_2)) \quad (\text{II.23})$$

$$r_v(\gamma) = k_2^2 k_3^2 \gamma_2 \gamma_3 (\gamma_1 k_4^2 + k_1^2 \gamma_4) \cos(\gamma_3 d_2) \cos(\gamma_2 d_1) - (k_1^2 k_3^4 \gamma_2^2 \gamma_4 + k_2^4 k_4^2 \gamma_1 \gamma_3^2) \sin(\gamma_3 d_2) \sin(\gamma_2 d_1) \\ + j(k_3^2 \gamma_3 (k_1^2 k_4^2 \gamma_2^2 + k_2^4 \gamma_1 \gamma_4) \cos(\gamma_3 d_2) \sin(\gamma_2 d_1) + k_2^2 \gamma_2 (k_1^2 k_4^2 \gamma_3^2 + k_3^4 \gamma_1 \gamma_4) \sin(\gamma_3 d_2) \cos(\gamma_2 d_1)) \quad (\text{II.24})$$

## II.4. Intensité diffractée, intensité cohérente et incohérente

### II.4.1. Intensité cohérente et incohérente

La structure est éclairée par une onde incidente polarisée (a) génère un champ diffusé présentant une composante directe de polarisation (aa) et une composante a polarisation croisée (ba). Pour un point d'observation situé à grande distance de la surface est définie par l'angle du zénith  $\theta$  et l'angle d'azimut  $\phi$ , l'intensité cohérente  $I_{c,(ba)}(\theta, \phi)$  est proportionnelle au module au carré de la moyenne statistique de l'amplitude complexe de diffraction  $A_{1(aa)}(\theta, \phi)$  [7] :

$$I_{c,(ba)}(\theta, \phi) = \lim_{L \rightarrow +\infty} \frac{|\langle A_{1(ba)}(\theta, \phi) \rangle|^2 \cos^2 \theta}{\cos \theta_0 \lambda^2 L^2 |A_{0(a)}|^2} \quad (\text{II.25})$$

Le coefficient de diffusion bi-statique (La moyenne statistique de l'intensité de diffusion) est proportionnelle à la moyenne statistique du module au carré de l'amplitude de diffraction avec :

$$I_{(ba)}(\theta, \phi) = \lim_{L \rightarrow +\infty} \frac{\langle |A_{1(ba)}(\theta, \phi)|^2 \rangle \cos^2 \theta}{\cos \theta_0 \lambda^2 L^2 |A_{0(a)}|^2} \quad (\text{II.26})$$

L'intensité incohérente  $I_{f,(ba)}(\theta, \phi)$  est la différence entre les deux termes précédentes avec [7] :

$$I_{f,(ba)}(\theta, \phi) = I_{(ba)}(\theta, \phi) - I_{c,(ba)}(\theta, \phi) \quad (\text{II.27})$$

Avec une structure ayant un nombre arbitraire d'interfaces, en représentant les champs électromagnétiques dans les différents milieux à l'aide de développements de Rayleigh, en écrivant les conditions aux limites sur les différentes interfaces et en mettant en œuvre une méthode de perturbation à l'ordre 1. Nous obtenons l'amplitude de diffusion  $A_{1(ba)}(\theta, \varphi)$  sous la forme suivante

$$A_{1(ba)}^{(SPM)}(\theta, \phi) = 4\pi^2 A_{1(a)}^{(0)}(\alpha_0, \beta_0) \delta(\zeta) \delta(\xi) + A_{1(ba)}^{(1)}(\alpha, \beta) \quad (\text{II.28})$$

$$\text{où } \zeta = \alpha - \alpha_0 ; \xi = \beta - \beta_0, \alpha = k_1 \sin \theta \cos \phi, \beta = k_1 \sin \theta \sin \phi$$

L'amplitude de diffusion à l'ordre zéro  $A_{1(a)}^{(0)}$  correspond au coefficient de Fresnel en réflexion pour une structure planaire. A l'ordre zéro, l'onde se propage dans la direction spéculaire et n'est pas dépolarisée.

L'amplitude de diffraction à l'ordre 1 peut se mettre sous la forme suivante :

$$A_{1(ba)}^{(1)} = \sum_{i=1}^{N-1} K_{i(ba)}(\alpha, \beta) \hat{a}_i(\zeta, \xi) \quad (\text{II.29})$$

- $\hat{a}_i(\alpha, \beta)$  est la transformée de Fourier de la fonction  $a_i(x, y)$  décrivant l'interface  $i$ . Les
- facteurs  $K_{i(ba)}(\alpha, \beta)$  sont donnés par des formules de récurrence [8]-[9]. Ils dépendent des :

- ✓ Permittivités relatives
- ✓ Des épaisseurs des différentes couches,
- ✓ Des angles de site et d'azimut
- ✓ Des ondes incidente et diffusée.

On parvient à établir les expressions des intensités cohérente et incohérente dans le cadre de la méthode des petites perturbations [9]- [10] :

$$I_{c,(a)}^{(SPM)}(\theta, \phi) = \frac{\cos \theta_0}{\lambda^2} \left| A_{(a)}^{+(0)}(\alpha_0, \beta_0) \right|^2 4\pi^2 \delta(\xi) \delta(\zeta) \quad (\text{II.30})$$

$$\begin{aligned} I_{f,(ba)}^{SPM}(\theta, \phi) &= \frac{\cos^2 \theta}{\lambda^2 \cos \theta_0} \left\langle \left| A_{1(ba)}^{+(1)}(k_1 \sin \theta \cos \phi, k_1 \sin \theta \sin \phi) \right|^2 \right\rangle \\ &= \frac{1}{\lambda^2 \cos \theta_0} \left\{ \left\langle \text{Re}^2 \left[ A_{1(ba)}^{+(1)}(k_1 \sin \theta \cos \phi, k_1 \sin \theta \sin \phi) \right] \right\rangle + \left\langle \text{Im}^2 \left[ A_{1(ba)}^{+(1)}(k_1 \sin \theta \cos \phi, k_1 \sin \theta \sin \phi) \right] \right\rangle \right\} \end{aligned} \quad (\text{II.31})$$

#### II.4.2. Variances et covariance des parties réelle et imaginaire de l'amplitude de diffraction :

Les deux parties réelle et imaginaire des fonctions aléatoires bidimensionnelles  $A_{1(ba)}^{+(1)}(\alpha, \beta)$  sont données sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \sigma_{R(ba)}^2 = & \langle \text{Re}^2[A_{1(ba)}^{+(1)}(\alpha, \beta)] \rangle = \sum_{i=1}^{N-1} \left\{ \text{Re}^2(K_i^{(\pm, ba)}) \langle \text{Re}^2[\hat{a}_i(\zeta, \xi)] \rangle + \text{Im}^2(K_i^{(\pm, ba)}) \langle \text{Im}^2[\hat{a}_i(\zeta, \xi)] \rangle \right\} \\ & + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N-1} \left\{ \begin{aligned} & \text{Re}(K_i^{(\pm, ba)}) \text{Re}(K_j^{(\pm, ba)}) \langle \text{Re}[\hat{a}_i(\zeta, \xi)] \text{Re}[\hat{a}_j(\zeta, \xi)] \rangle + \text{Im}(K_i^{(\pm, ba)}) \text{Im}(K_j^{(\pm, ba)}) \langle \text{Im}[\hat{a}_i(\zeta, \xi)] \text{Im}[\hat{a}_j(\zeta, \xi)] \rangle \\ & - \text{Im}(K_i^{(\pm, ba)}) \text{Re}(K_j^{(\pm, ba)}) \langle \text{Im}[\hat{a}_i(\zeta, \xi)] \text{Re}[\hat{a}_j(\zeta, \xi)] \rangle - \text{Re}(K_i^{(\pm, ba)}) \text{Im}(K_j^{(\pm, ba)}) \langle \text{Re}[\hat{a}_i(\zeta, \xi)] \text{Im}[\hat{a}_j(\zeta, \xi)] \rangle \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (\text{II.32})$$

$$\begin{aligned} \sigma_{I(ba)}^2 = & \langle \text{Im}^2[A_{1(ba)}^{+(1)}(\alpha, \beta)] \rangle = \sum_{i=1}^{N-1} \left\{ \text{Im}^2(K_i^{(\pm, ba)}) \langle \text{Re}^2[\hat{a}_i(\zeta, \xi)] \rangle + \text{Re}^2(K_i^{(\pm, ba)}) \langle \text{Im}^2[\hat{a}_i(\zeta, \xi)] \rangle \right\} \\ & + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N-1} \left\{ \begin{aligned} & \text{Im}(K_i^{(\pm, ba)}) \text{Im}(K_j^{(\pm, ba)}) \langle \text{Re}[\hat{a}_i(\zeta, \xi)] \text{Re}[\hat{a}_j(\zeta, \xi)] \rangle + \text{Re}(K_i^{(\pm, ba)}) \text{Re}(K_j^{(\pm, ba)}) \langle \text{Im}[\hat{a}_i(\zeta, \xi)] \text{Im}[\hat{a}_j(\zeta, \xi)] \rangle \\ & + \text{Re}(K_i^{(\pm, ba)}) \text{Im}(K_j^{(\pm, ba)}) \langle \text{Im}[\hat{a}_i(\zeta, \xi)] \text{Re}[\hat{a}_j(\zeta, \xi)] \rangle + \text{Im}(K_i^{(\pm, ba)}) \text{Re}(K_j^{(\pm, ba)}) \langle \text{Re}[\hat{a}_i(\zeta, \xi)] \text{Im}[\hat{a}_j(\zeta, \xi)] \rangle \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (\text{II.33})$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{RI(ba)} = & \langle \text{Re}[A_{1(ba)}^{+(1)}(\alpha, \beta)] \text{Im}[A_{1(ba)}^{+(1)}(\alpha, \beta)] \rangle = \sum_{i=1}^{N-1} \text{Re}(K_i^{(\pm, ba)}) \text{Im}(K_i^{(\pm, ba)}) \left\{ \langle \text{Re}^2[\hat{a}_i(\zeta, \xi)] \rangle - \langle \text{Im}^2[\hat{a}_i(\zeta, \xi)] \rangle \right\} \\ & + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N-1} \left\{ \begin{aligned} & \text{Re}(K_i^{(\pm, ba)}) \text{Im}(K_j^{(\pm, ba)}) \langle \text{Re}[\hat{a}_i(\zeta, \xi)] \text{Re}[\hat{a}_j(\zeta, \xi)] \rangle - \text{Im}(K_i^{(\pm, ba)}) \text{Re}(K_j^{(\pm, ba)}) \langle \text{Im}[\hat{a}_i(\zeta, \xi)] \text{Im}[\hat{a}_j(\zeta, \xi)] \rangle \\ & - \text{Im}(K_i^{(\pm, ba)}) \text{Im}(K_j^{(\pm, ba)}) \langle \text{Re}[\hat{a}_i(\zeta, \xi)] \text{Im}[\hat{a}_j(\zeta, \xi)] \rangle + \text{Re}(K_i^{(\pm, ba)}) \text{Re}(K_j^{(\pm, ba)}) \langle \text{Im}[\hat{a}_i(\zeta, \xi)] \text{Re}[\hat{a}_j(\zeta, \xi)] \rangle \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (\text{II.34})$$

Les expressions des variances et covariances de la partie réelle et imaginaire de la fonction aléatoire  $A_{1(ba)}^{+(1)}(\alpha, \beta)$  dépendent des variances et des covariances associées aux différentes grandeurs  $\text{Re}[\hat{a}_i(\zeta, \xi)]$  et  $\text{Im}[\hat{a}_i(\zeta, \xi)]$ .

Et pour déterminer ces dernières, après quelques calculs, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \sigma_{R\hat{a}_i}^2 = & \langle \text{Re}^2[\hat{a}_i(\zeta, \xi)] \rangle = \frac{1}{2} \int_{-L}^L \int_{-L}^L R_{ii}(x, y) \left(1 - \frac{|x|}{L}\right) \left(1 - \frac{|y|}{L}\right) \cos[\zeta(x) + \xi(y)] dx dy \\ & + \frac{1}{2} \int_{-L}^L \int_{-L}^L R_{ii}(x, y) \left(1 - \frac{|x|}{L}\right) \left(1 - \frac{|y|}{L}\right) \sin c(\zeta(L - |x|)) \sin c(\xi(L - |y|)) dx dy \end{aligned} \quad (\text{II.35})$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\hat{a}_i}^2 = & \langle \text{Im}^2[\hat{a}_i(\zeta, \xi)] \rangle = \frac{1}{2} \int_{-L}^L \int_{-L}^L R_{ii}(x, y) \left(1 - \frac{|x|}{L}\right) \left(1 - \frac{|y|}{L}\right) \cos[\zeta(x) + \xi(y)] dx dy \\ & - \frac{1}{2} \int_{-L}^L \int_{-L}^L R_{ii}(x, y) \left(1 - \frac{|x|}{L}\right) \left(1 - \frac{|y|}{L}\right) \sin c(\zeta(L - |x|)) \sin c(\xi(L - |y|)) dx dy \end{aligned} \quad (\text{II.36})$$

Nous pouvons par ailleurs montrer que  $\text{Re}[\hat{a}_i(\zeta, \xi)]$  et  $\text{Im}[\hat{a}_i(\zeta, \xi)]$  sont non corrélées :

$$\langle \text{Re}[\hat{a}_i(\zeta, \xi)] \text{Im}[\hat{a}_i(\zeta, \xi)] \rangle = 0 \quad (\text{II.37})$$

De même avec les covariances :  $\langle \text{Re}[\hat{a}_i(\zeta, \xi)] \text{Re}[\hat{a}_j(\zeta, \xi)] \rangle$  ;  $\langle \text{Im}[\hat{a}_i(\zeta, \xi)] \text{Re}[\hat{a}_j(\zeta, \xi)] \rangle$  ;  $\langle \text{Im}[\hat{a}_i(\zeta, \xi)] \text{Im}[\hat{a}_j(\zeta, \xi)] \rangle$  ;  $\langle \text{Re}[\hat{a}_i(\zeta, \xi)] \text{Im}[\hat{a}_j(\zeta, \xi)] \rangle$  qui sont associées à  $\hat{a}_i(\zeta, \xi)$  et  $\hat{a}_j(\zeta, \xi)$

on trouve les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \langle \text{Re}[\hat{a}_i(\zeta, \xi)] \text{Re}[\hat{a}_j(\zeta, \xi)] \rangle = & \frac{1}{2} \int_{-L}^L \int_{-L}^L R_{ij}(x, y) \left(1 - \frac{|x|}{L}\right) \left(1 - \frac{|y|}{L}\right) \cos[\zeta(x) + \xi(y)] dx dy \\ & + \frac{1}{2} \int_{-L}^L \int_{-L}^L R_{ij}(x, y) \left(1 - \frac{|x|}{L}\right) \left(1 - \frac{|y|}{L}\right) \sin c(\zeta(L - |x|)) \sin c(\xi(L - |y|)) dx dy \end{aligned} \quad (\text{II.38})$$

$$\begin{aligned} \langle \text{Im}[\hat{a}_i(\zeta, \xi)] \text{Im}[\hat{a}_j(\zeta, \xi)] \rangle = & \frac{1}{2} \int_{-L}^L \int_{-L}^L R_{ij}(x, y) \left(1 - \frac{|x|}{L}\right) \left(1 - \frac{|y|}{L}\right) \cos[\zeta(x) + \xi(y)] dx dy \\ & - \frac{1}{2} \int_{-L}^L \int_{-L}^L R_{ij}(x, y) \left(1 - \frac{|x|}{L}\right) \left(1 - \frac{|y|}{L}\right) \sin c(\zeta(L - |x|)) \sin c(\xi(L - |y|)) dx dy \end{aligned} \quad (\text{II.39})$$

$$\begin{aligned} \langle \text{Re}[\hat{a}_i(\zeta, \xi)] \text{Im}[\hat{a}_j(\zeta, \xi)] \rangle = & - \langle \text{Im}[\hat{a}_i(\zeta, \xi)] \text{Re}[\hat{a}_j(\zeta, \xi)] \rangle \\ = & \frac{1}{2} \int_{-L}^L \int_{-L}^L R_{ij}(x, y) \left(1 - \frac{|x|}{L}\right) \left(1 - \frac{|y|}{L}\right) \sin[\zeta x + \xi y] dx dy \end{aligned} \quad (\text{II.40})$$

### II.2.3. Comportements asymptotiques de variance, de covariance et de l'intensité incohérente

On applique la formule d'Euler et la transformée de Fourier sur les expressions (II.38)- (II.40) pour  $L \rightarrow \infty$  et on obtient :

$$\langle \text{Re}^2[\hat{a}_i(\zeta, \xi)] \rangle = \langle \text{Im}^2[\hat{a}_i(\zeta, \xi)] \rangle = \frac{\hat{R}_{ii}(\zeta, \xi)}{2} \quad (\text{II.41})$$

$$\langle \text{Re}[\hat{a}_i(\zeta, \xi)] \text{Re}[\hat{a}_j(\zeta, \xi)] \rangle = \langle \text{Im}[\hat{a}_i(\zeta, \xi)] \text{Im}[\hat{a}_j(\zeta, \xi)] \rangle = \frac{\hat{R}_{ij}(\zeta, \xi) + \hat{R}_{ij}(-\zeta, -\xi)}{4} \quad (\text{II.42})$$

$$\langle \text{Re}[\hat{a}_i(\zeta, \xi)] \text{Im}[\hat{a}_j(\zeta, \xi)] \rangle = - \langle \text{Im}[\hat{a}_i(\zeta, \xi)] \text{Re}[\hat{a}_j(\zeta, \xi)] \rangle = \frac{\hat{R}_{ij}(\zeta, \xi) - \hat{R}_{ij}(-\zeta, -\xi)}{4j} \quad (\text{II.43})$$

En remplaçant les expressions (II.41) -(II.43) dans (II.32)- (II.34), et on trouve :

$$\sigma_{R(ba)}^2 = \langle \text{Re}^2[A_{1(ba)}^{+(1)}(\alpha, \beta)] \rangle = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} \left\{ |K_i^{(\pm, ba)}|^2 \hat{R}_{ii}(\zeta, \xi) \right\} + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N-1} \left\{ \begin{aligned} &\text{Re}(K_i^{(\pm, ba)} K_j^{*(\pm, ba)}) (\hat{R}_{ij}(\zeta, \xi) + \hat{R}_{ij}(-\zeta, -\xi)) \\ &+ \text{Im}(K_i^{*(\pm, ba)} K_j^{(\pm, ba)}) (\hat{R}_{ij}(\zeta, \xi) - \hat{R}_{ij}(-\zeta, -\xi)) \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.44})$$

$$\sigma_{I(ba)}^2 = \langle \text{Im}^2[A_{1(ba)}^{+(1)}(\alpha, \beta)] \rangle = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} \left\{ |K_i^{(\pm, ba)}|^2 \hat{R}_{ii}(\zeta, \xi) \right\} + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N-1} \left\{ \begin{aligned} &\text{Re}(K_i^{(\pm, ba)} K_j^{*(\pm, ba)}) (\hat{R}_{ij}(\zeta, \xi) + \hat{R}_{ij}(-\zeta, -\xi)) \\ &+ \text{Im}(K_i^{*(\pm, ba)} K_j^{(\pm, ba)}) (\hat{R}_{ij}(\zeta, \xi) - \hat{R}_{ij}(-\zeta, -\xi)) \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.45})$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{RI(ba)} &= \langle \text{Re}[A_{1(ba)}^{+(1)}(\alpha, \beta)] \text{Im}[A_{1(ba)}^{+(1)}(\alpha, \beta)] \rangle \\ &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N-1} \left\{ \left[ \text{Re}(K_i^{(\pm, ba)}) \text{Im}(K_j^{(\pm, ba)}) - \text{Im}(K_i^{(\pm, ba)}) \text{Re}(K_j^{(\pm, ba)}) \right] (\hat{R}_{ij}(\zeta, \xi) + \hat{R}_{ij}(-\zeta, -\xi)) \right\} \quad (\text{II.46}) \end{aligned}$$

Sachant que :

$$\begin{aligned} \text{Re}(K_i^{(\pm, ba)} K_j^{*(\pm, ba)}) &= \text{Re}(K_i^{(\pm, ba)}) \text{Re}(K_j^{(\pm, ba)}) + \text{Im}(K_i^{(\pm, ba)}) \text{Im}(K_j^{(\pm, ba)}) \\ \text{Im}(K_i^{*(\pm, ba)} K_j^{(\pm, ba)}) &= j \left[ \text{Re}(K_i^{(\pm, ba)}) \text{Im}(K_j^{(\pm, ba)}) - \text{Re}(K_j^{(\pm, ba)}) \text{Im}(K_i^{(\pm, ba)}) \right] \end{aligned} \quad (\text{II.47})$$

Que ce soit dans le cas des interfaces corrélées ou non corrélées, les variables aléatoires  $\text{Re}[A_{1(ba)}^{+(1)}(\alpha, \beta)]$  et  $\text{Im}[A_{1(ba)}^{+(1)}(\alpha, \beta)]$  sont non corrélées ( $\Gamma_{RI(ba)} = 0$ ) et présentent la même variance :

$$\sigma_{R(ba)}^2 = \sigma_{I(ba)}^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} \left\{ |K_i^{(\pm, ba)}|^2 \hat{R}_{ii}(\zeta, \xi) \right\} + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N-1} \left\{ \begin{aligned} &\text{Re}(K_i^{(\pm, ba)} K_j^{*(\pm, ba)}) (\hat{R}_{ij}(\zeta, \xi) + \hat{R}_{ij}(-\zeta, -\xi)) \\ &+ \text{Im}(K_i^{*(\pm, ba)} K_j^{(\pm, ba)}) (\hat{R}_{ij}(\zeta, \xi) - \hat{R}_{ij}(-\zeta, -\xi)) \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.48})$$

Compte tenu de la symétrie hermitienne de la fonction  $\hat{R}_{ij}(\zeta, \xi)$ . Nous montrons que l'intensité incohérente s'exprime sous la forme suivante :

$$I_{f, (ba)}^{SPM}(\theta, \phi) = \frac{1}{\lambda^2} \frac{\cos^2 \theta}{\cos \theta_0} \left\{ \sum_{i=1}^{N-1} |K_i^{(\pm, ba)}|^2 \hat{R}_{ii}(\zeta, \xi) + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N-1} \text{Re}(K_i^{(\pm, ba)} K_j^{*(\pm, ba)}) \hat{R}_{ij}(\zeta, \xi) \right\} \quad (\text{II.49})$$

**Chapitre III : Application d'une structure naturelle air/neige/glace/mer****Sommaire**

## Chapitre III : Application d'une structure naturelle air/neige/glace/mer

III.1. Introduction .....	27
III.2. Position du problème.....	27
III.3. Puissance réfléchiée par une structure à interfaces planes.....	28
III.3.1. Amplitude de l'onde plane réfléchiée.....	28
III.3.2. Analyse de la structure air/glace/mer-Influence de l'épaisseur de glace.....	30
III.3.3. Analyse de la structure air/neige/glace/mer-Influence de l'épaisseur de neige....	31
III.4. Puissance réfléchiée par une structure à interfaces rugueuses.....	32
III.4.1. Amplitude de l'onde plane réfléchiée .....	32
III.4.2. Analyse de la structure air/glace/mer à interface rugueuse -Influence de l'épaisseur de glace .....	33
III.4.3. Analyse de la structure air/neige/glace/mer à interface rugueuse-Influence de l'épaisseur de neige .....	34
III.4.4. Analyse de la structure air/neige/glace/mer à interface rugueuse-Influence de l'angle d'incidence en rétrodiffusion .....	35

## Chapitre III

### Application d'une structure naturelle air/neige/glace/mer

#### III.1. Introduction

La mission CRYOSAT est dédiée à l'observation spatiale de la couverture des glaces de mer ainsi qu'à l'étude des variations d'épaisseur de ces glaces, en raison de l'importance de cette mission dans le contexte du réchauffement climatique. Le principe de détermination de l'épaisseur de glace par le principal instrument embarqué SIRAL-2 (altimètre-interféromètre radar) dans le satellite CRYOSAT est le suivant : un signal radar est envoyé par CRYOSAT vers la banquise, la rugosité de la glace se traduit par une rétrodiffusion du signal vers le satellite.

Par la suite, nous réaliserons notre simulation sur une structure naturelle bidimensionnelle composée de quatre couches rugueuses aléatoirement. Certains résultats sont présentés dans ce chapitre surtout l'influence de l'épaisseur de la neige sur le signal rétrodiffusé. D'abord, l'étude est réalisée avec des interfaces planes entre 4 couches de permittivité différentes, ensuite les interfaces sont supposées rugueuses et la méthode de premier ordre faible perturbation (SPM) est prise en compte pour résoudre le problème de diffusion. On conclut que le signal rétrodiffusé par le milieu est fortement lié aux caractéristiques diélectriques.

#### III.2. Position du problème

On considère la structure de la figure 1 éclairée par une onde plane en incidence normale. La fréquence est égale à 13 GHz. La longueur d'onde  $\lambda$  dans l'air est égale à 2.31 cm. Les épaisseur de neige et de glace sont égales à  $d_2 = 30\text{cm}$  et  $d_3 = 80\text{cm}$  respectivement.

La permittivité relative de la mer à la fréquence de 12 ou 13 GHz est extraite de la référence [11]. La permittivité de la glace et les épaisseurs de glace et de neige sont réalistes et extraites de la référence [12].

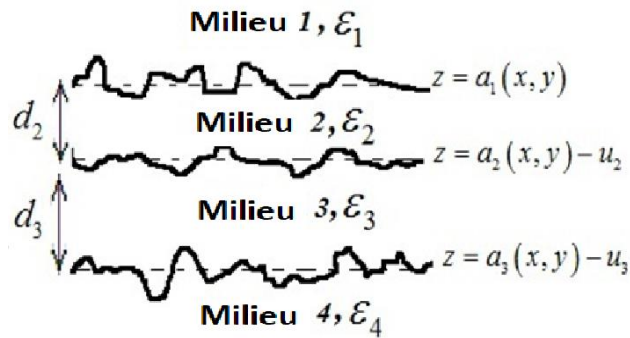


Figure III.1 : Surface de mer avec une couche de glace et une couche de neige

	Milieu considéré	Permittivité relative
Milieu 1	air	$\epsilon_1 = 1$
Milieu 2	neige	$\epsilon_{r2} = 1.58 - 0.0587j$
Milieu 3	Glace	$\epsilon_{r3} = 4.4 - 0.38j$
Milieu 4	Mer	$\epsilon_{r4} = 31 - 39j$

Tableau III.1. Permittivités relatives des différents milieux.

Les trois interfaces sont caractérisées par des fonctions de corrélation et d'intercorrélation gaussiennes et se définissent par des hauteurs quadratiques moyennes  $\sigma_1 = 0.015\lambda$ ,  $\sigma_2 = 0.022\lambda$  et  $\sigma_3 = 0.05\lambda$ , des longueurs de corrélation  $l_{xi}, l_{yi}$ , les interfaces peuvent être isotropes ou anisotropes (Tableau III.2). Les interfaces sont corrélées pour  $q_{12} = q_{13} = q_{23} = 1$  et non corrélées pour  $q_{12} = q_{13} = q_{23} = 0$ , notant que dans les deux cas  $q_{11} = q_{22} = q_{33} = 1$



	Longueur de corrélation	
	Cas isotrope	Cas anisotrope
Interface 1	$l_{x1} = l_{y1} = 0.3\lambda$	$l_{x1} = 0.3\lambda, l_{y1} = 0.6\lambda$
Interface 2	$l_{x2} = l_{y2} = 0.4\lambda$	$l_{x2} = 0.4\lambda, l_{y2} = 0.8\lambda$
Interface 3	$l_{x3} = l_{y3} = 0.5\lambda$	$l_{x3} = 0.5\lambda, l_{y3} = 1.0\lambda$

Tableau III.2. Longueur de corrélation dans le cas isotrope et anisotrope.

### III.3. Puissance réfléchié par une structure à interfaces planes

#### III.3.1. Amplitude de l'onde plane réfléchié

Dans cette étude la structure de la figure 1 est à interfaces planes comme le montre la figure III 2. est éclairée par une onde électromagnétique plane incidente normal génère deux ondes planes, une onde plane réfléchié et une onde plane transmise dans les milieux air et mer respectivement.

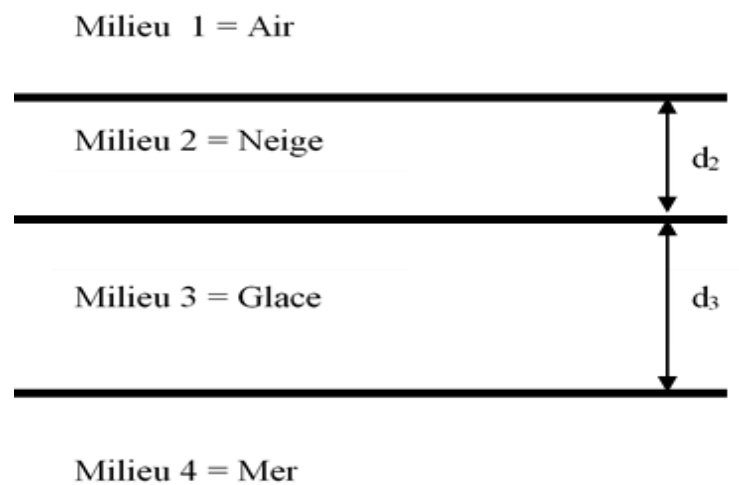


Figure III.2 : Surface de mer avec une couche de glace et une couche de neige considéré plates

Les deux milieux neige et glace sont le siège d'une onde aller et d'une onde retour. Après quelques calculs et avec les conditions aux limites sur les différentes interfaces on détermine l'amplitude à l'ordre zéro  $A_{1,(h,v)}^{(0)}$  de l'onde réfléchie dans l'air :

$$A_{1,(h,v)}^{(0)} = \frac{A_{0(h,v)}}{r_{h,v}} \left\{ \begin{aligned} & n_2 n_3 (n_1 - n_4) \cos(n_3 k d_3) \cos(n_2 k d_2) + (n_2^2 n_4 - n_1 n_3^2) \sin(n_2 k d_2) \sin(n_3 k d_3) \\ & - j \left[ n_2 (n_3^2 - n_1 n_4) \cos(n_2 k d_2) \sin(n_3 k d_3) + n_3 (n_2^2 - n_1 n_4) \cos(n_3 k d_3) \sin(n_2 k d_2) \right] \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.1})$$

Où :

$$\begin{aligned} r_{h,v} = & n_2 n_3 (n_1 + n_4) \cos(n_3 k d_3) \cos(n_2 k d_2) - (n_2^2 n_4 + n_1 n_3^2) \sin(n_2 k d_2) \sin(n_3 k d_3) \\ & + j \left[ n_2 (n_3^2 + n_1 n_4) \cos(n_2 k d_2) \sin(n_3 k d_3) + n_3 (n_2^2 + n_1 n_4) \cos(n_3 k d_3) \sin(n_2 k d_2) \right] \end{aligned} \quad (\text{III.2})$$

$n_i = \sqrt{\varepsilon_{ri}}$  est l'indice optique dans le milieu  $i$ .  $k = 2\pi / \lambda$  est le nombre d'onde.

La puissance réfléchie normalisée est définie comme le rapport de la puissance de l'onde réfléchie sur la puissance de l'onde incidente. La puissance de l'onde plane réfléchie  $P_1^{(0)}$  est proportionnelle au module au carré de l'amplitude  $A_1^{(0)}$ .

La fonction périodique de l'épaisseur  $d_3$  est la puissance réfléchie pour une valeur fixée de l'épaisseur  $d_2$  de la couche de neige . avec la même manière la valeur fixée de l'épaisseur  $d_3$  de la couche 3 (Glace ) la puissance réfléchie est une fonction périodique de l'épaisseur  $d_2$ .

$P_1^{(0)}(d_3)$ ,  $P_1^{(0)}(d_2)$  présentent un comportement oscillant est exponentiellement amortie dans la mesure où les indices optiques sont complexes. Les périodes  $D_3$ ,  $D_2$  sont égale a  $\lambda / [2\text{Re}(n_3)]$ ,  $\lambda / [2\text{Re}(n_2)]$  respectivement .

### III.3.2. Analyse de la structure air/glace/mer-Influence de l'épaisseur de glace

La figure III.3 présente le comportement de la puissance réfléchie normalisée en fonction de l'épaisseur de glace (en absence de neige) c'est à dire  $d_2 = 0$  . la courbe est exponentiellement amortie et présente un comportement oscillant de période  $0.556\text{cm}$  . Cette valeur est proche de  $\lambda / [2\text{Re}(n_3)] = 0.55\text{ cm}$  où  $\text{Re}(n_3) = 2.10$  et  $\lambda = 2.31\text{ cm}$  . La courbe tend vers une valeur limite égale à 0.13. Cette limite est atteinte (avec une erreur de 10%) pour  $d_3 > 7\text{cm}$  . Pour une épaisseur de glace

supérieure à 8 cm et une fréquence de 13 GHz, l'onde électromagnétique « ne voit donc pas la mer » et il est possible de ne pas considérer le milieu 4. Le milieu 3 peut être considéré comme semi infini.

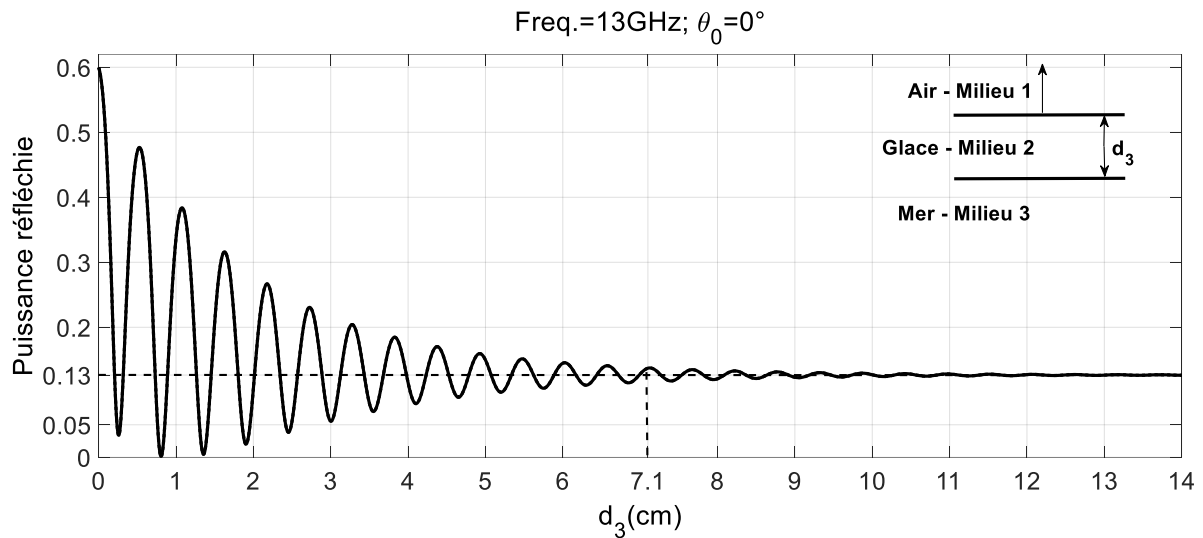


Figure III.3 : Puissance réfléchie en fonction de l'épaisseur de glace

### III.3.3. Analyse de la structure air/neige/glace/mer-Influence de l'épaisseur de neige

L'épaisseur de la glace est égale à 80 cm et sa permittivité relative est toujours égale à  $\epsilon_{r,3} = 4.4 - 0.38j$ . La permittivité de la mer est prise en compte ( $\epsilon_{r,4} = 31 - 39j$ ). La figure III.4 présente la puissance normalisée de l'onde plane réfléchie en fonction de l'épaisseur de neige  $d_2$  variant de 0 à 50cm.

La puissance réfléchie présente un comportement oscillant exponentiellement amorties. La période des oscillations est, en première approche, égale à  $\lambda / [2 \operatorname{Re}(n_2)] = 0.731$  cm où  $\operatorname{Re}(n_3) = 2.10$  et  $\lambda = 2.31$  cm. De plus, on peut noter que la puissance réfléchie a atteint sa valeur asymptotique de 0.013 à plus ou moins 10% pour  $d_2 = 21$  cm.

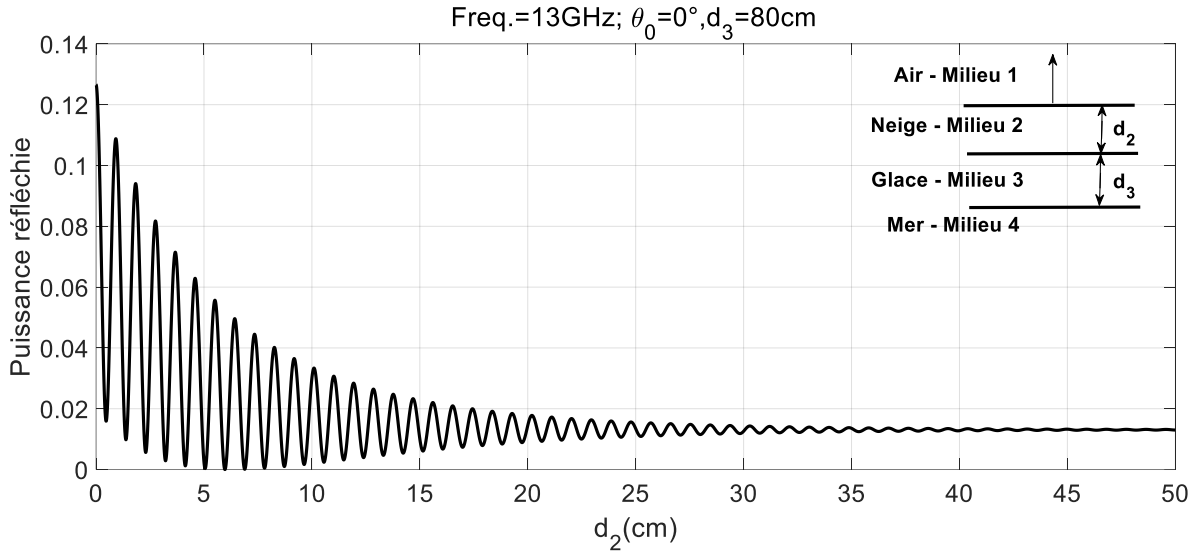


Figure III.4: Puissance réfléchie en fonction de l'épaisseur de la neige avec une épaisseur de glace de 80 cm.

### III.4. Puissance réfléchie par une structure à interfaces rugueuses

#### III.4.1. Amplitude de l'onde plane réfléchie

Les interfaces étant rugueuses et aléatoires, l'intensité diffusée dans l'air par le milieu stratifié varie d'une réalisation à une autre. Une manière de quantifier ces variations est de calculer l'intensité incohérente. L'intensité incohérente correspond à la variance des amplitudes des ondes diffusées par un ensemble de réalisations. Dans le cadre de la méthode des petites perturbations à l'ordre 1 [1-9], on démontre que l'intensité incohérente diffusée au zénith ( $\theta = 0^0$ ) sous une incidence normal ( $\theta_0 = 0^0$ ) dans l'air est donnée par l'expression suivante :

$$I_{f1}(0^0) = \sqrt{\pi} \frac{\sigma_1^2 l_1 |K_1|^2 + \sigma_2^2 l_2 |K_2|^2 + \sigma_3^2 l_3 |K_3|^2}{\lambda} \quad (\text{III.3})$$

Avec :

$$K_1 = \frac{jk(1-n_2^2)}{r^2} \left( n_3 [n_2 \cos(n_2 kd_2) \cos(n_3 kd_3) - n_3 \sin(n_2 kd_2) \sin(n_3 kd_3)] \right. \\ \left. + jn_4 [n_2 \cos(n_2 kd_2) \sin(n_3 kd_3) + n_3 \sin(n_2 kd_2) \cos(n_3 kd_3)] \right)^2 \quad (\text{III.4})$$

$$K_2 = \frac{j2kn_2^2}{r^2} (n_2^2 - n_3^2) (n_3 \cos(n_2 kd_2) + jn_4 \sin(n_3 kd_3))^2 \quad (\text{III.5})$$

$$K_3 = \frac{j2kn_2^2 n_3^2}{r^2} (n_3^2 - n_4^2) \quad (\text{III.6})$$

Avec :

$$r = n_2 n_3 (n_1 + n_4) \cos(n_3 k d_3) \cos(n_2 k d_2) - (n_2^2 n_4 + n_1 n_3^2) \sin(n_2 k d_2) \sin(n_3 k d_3) \\ + j \left[ n_2 (n_3^2 + n_1 n_4) \cos(n_2 k d_2) \sin(n_3 k d_3) + n_3 (n_2^2 + n_1 n_4) \cos(n_3 k d_3) \sin(n_2 k d_2) \right]$$

#### III.4.2. Analyse de la structure air/glace/mer à interface rugueuse -Influence de l'épaisseur de glace

La figure III.5 présente l'intensité incohérente rétrodiffusée en fonction de l'épaisseur de glace  $d_3$  pour une épaisseur de neige  $d_2 = 40\text{cm}$ . La figure III.5 montre l'effet de la corrélation et de l'isotropie sur l'intensité incohérente. Les trois interfaces sont caractérisées par des fonctions de corrélation et d'intercorrélation gaussiennes et se définissent par des hauteurs quadratiques moyennes  $\sigma_1 = 0.015\lambda$ ,  $\sigma_2 = 0.022\lambda$  et  $\sigma_3 = 0.05\lambda$ , des longueurs de corrélation  $l_{xi}, l_{yi}$ , les interfaces peuvent être isotropes ou anisotropes (Tableau III.2). Les interfaces sont corrélées pour  $q_{12} = q_{13} = q_{23} = 1$  et non corrélées pour  $q_{12} = q_{13} = q_{23} = 0$ , notant que dans les deux cas  $q_{11} = q_{22} = q_{33} = 1$ .

Cette intensité est exponentiellement amortie et présente un comportement oscillant de période  $0.556\text{cm}$  pour le cas corrélé quel que soit l'état isotrope ou anisotrope des interfaces. On remarque que l'intensité incohérente pour des interfaces anisotropes est supérieur au cas isotrope. Par exemple pour le cas d'interfaces non corrélés et anisotrope l'intensité incohérente tend vers une valeur fixe qui égale à  $2,6 \cdot 10^{-4}$ , par contre pour le cas isotrope elle tend vers une valeur inférieure qui est égale à  $1,3 \cdot 10^{-4}$ .

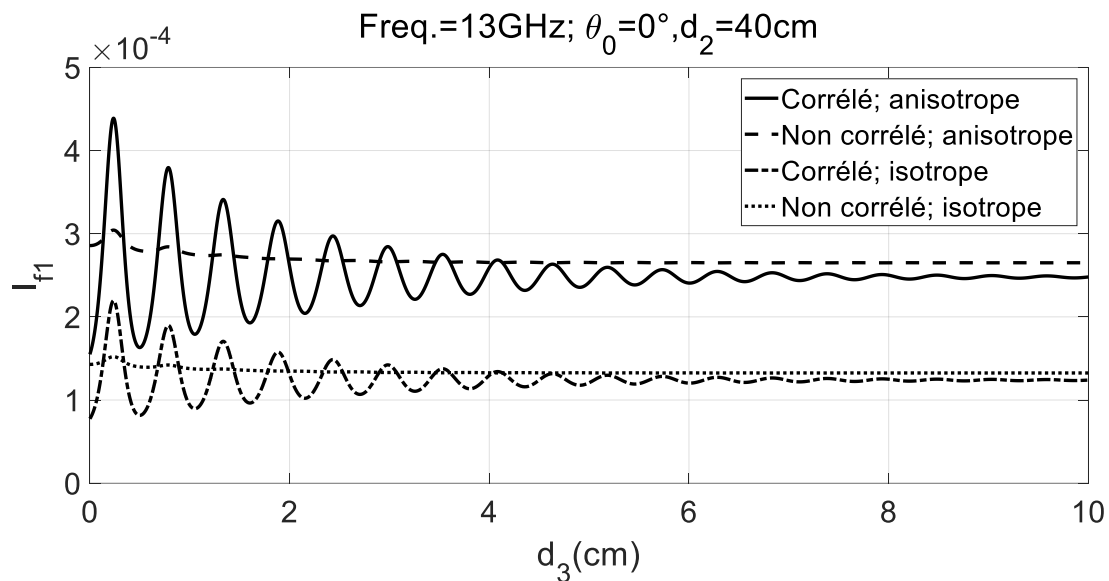


Figure III.5 : L'intensité incohérente rétrodiffusée en fonction de l'épaisseur de la glace avec une épaisseur de neige de 40 cm.

### III.4.3. Analyse de la structure air/neige/glace/mer à interface rugueuse-Influence de l'épaisseur de neige

La figure III.6 présente l'intensité incohérente rétrodiffusée en fonction de l'épaisseur de neige  $d_2$  pour une épaisseur de glace  $d_3=80\text{cm}$ . La figure III.6 montre l'effet de la corrélation et de l'isotropie sur l'intensité incohérente. Pour les mêmes configurations que la figure III.5, l'intensité incohérente rétrodiffusée est exponentiellement amortie est présente un comportement oscillant de période 0.731 pour les quatre cas (corrélé, anisotrope), (non corrélé, anisotrope), (corrélé, isotrope) et (non corrélé, isotrope). Même observation que le cas précédent, l'intensité incohérente pour des interfaces anisotropes est supérieur au cas isotrope quel que soit l'état de corrélation. On remarque que l'intensité incohérente décroît en augmentant l'épaisseur de la couche de neige pour attendre une valeur proche de zéro. Avec une épaisseur de quelque dizaine de centimètre la structure devient absorbante.

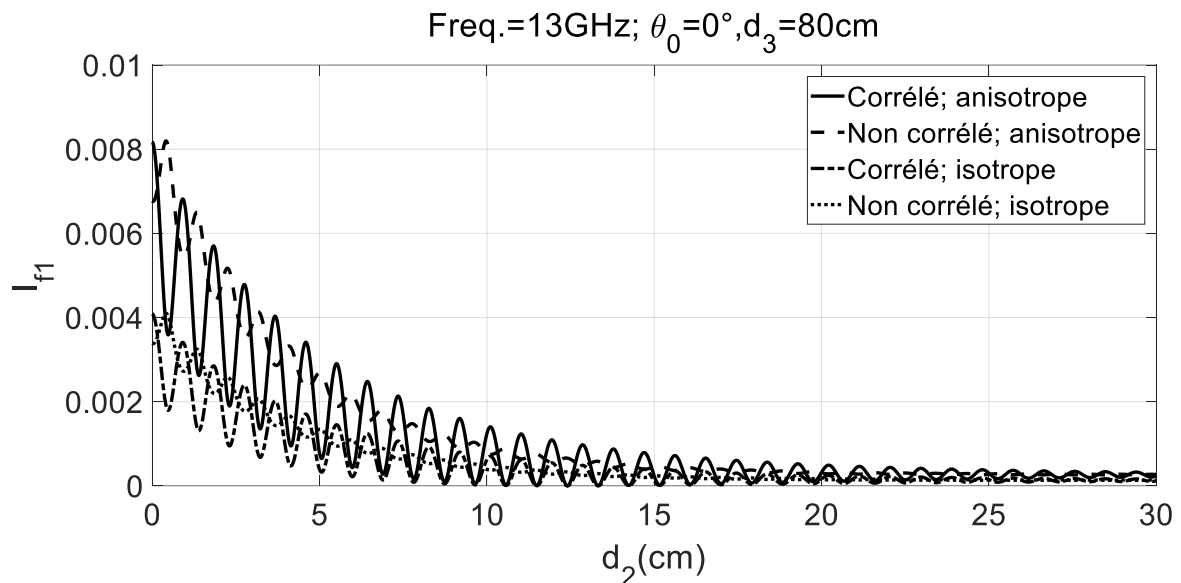


Figure III.6: L'intensité incohérente rétrodiffusée en fonction de l'épaisseur de la neige avec une épaisseur de glace de 80 cm.

#### III.4.4. Analyse de la structure air/neige/glace/mer à interface rugueuse-Influence de l'angle d'incidence en rétrodiffusion

La figure III. 7. montre l'influence de la corrélation et de l'isotropie sur l'intensité rétrodiffusée obtenue par la méthode SPM en polarisation ( $hh$ ) dans (a) et en polarisation ( $vv$ ) dans (b) en fonction de l'angle d'incidence  $\theta_0$ . Avec une structure dont l'épaisseur de la glace  $d_3 = 50\text{cm}$  et une épaisseur de la neige  $d_2 = 30\text{cm}$ , on remarque que l'intensité rétrodiffusée dans les quatre cas décroît exponentiellement en augmentant l'angle d'incidente pour atteindre la valeur zéro. La figure montre quel que soit la polarisation ( $hh$ ) figure 7 (a) ou ( $vv$ ) figure 7(b) que le cas d'interfaces corrélés présente un comportement oscillant quel que soit l'état isotrope ou anisotrope des interfaces. On remarque que l'intensité incohérente rétrodiffusée pour des interfaces anisotropes est supérieur au cas isotrope. La différence entre les deux types de polarisation est que la figure figure 7 (a) pour une polarisation horizontale ( $hh$ ) est légèrement inférieure au cas de la figure 7 (b) pour une polarisation verticale ( $vv$ ).

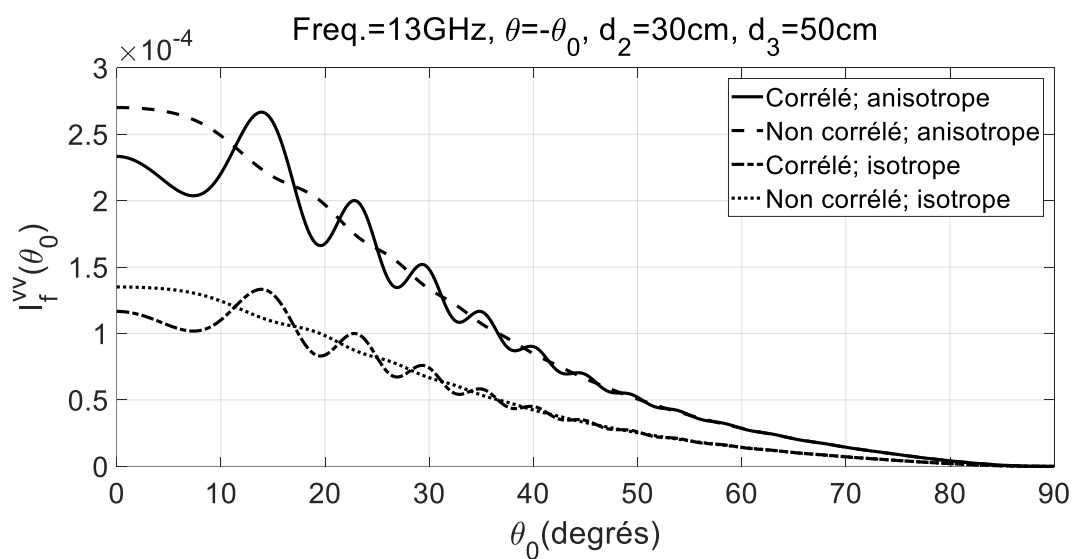
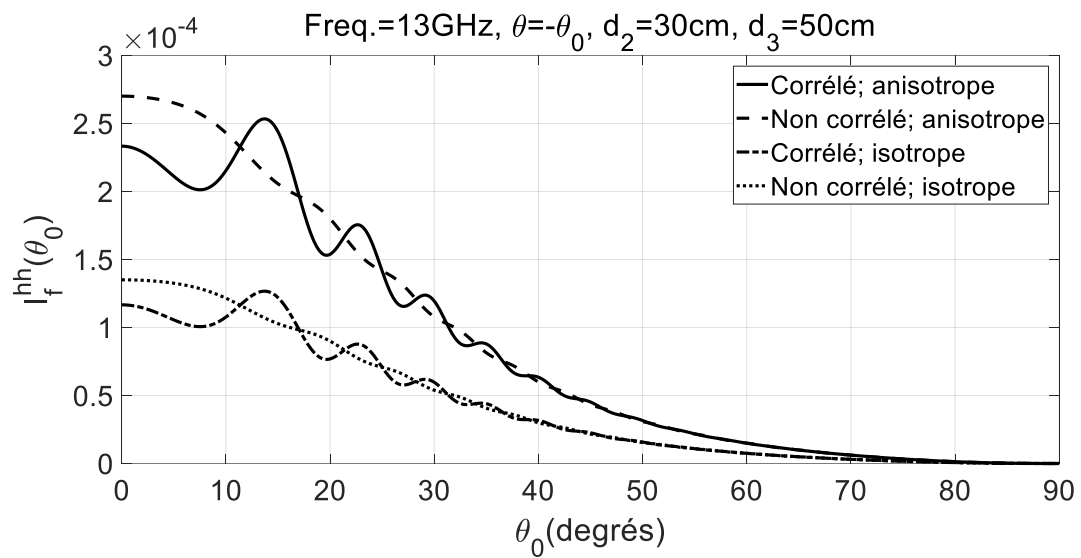


Figure III.7: L'intensité incohérente rétrodiffusée en fonction de l'angle d'incidence avec l'épaisseur  $d_2 = 30\text{cm}$  et  $d_3 = 50\text{cm}$

(a) en polarisation (hh), (b) en polarisation (vv)



### **III.5. Conclusion**

Après l'étude du problème de la diffraction par des structures multicouches bidimensionnelles nous avons déterminé au cours des chapitres I et II la solution du problème. En fait nous sommes arrivés à modéliser analytiquement le problème de la diffraction par des structures bidimensionnelles rugueuses aléatoirement. Par la suite et au niveau des différentes simulations nous montrons la validité du méthode SPM d'un problème 2D.

## Conclusion générale

Dans le but de déterminer le signal diffracté adapté aux besoins d'un radar de télédétection. Nous intéressons à l'étude des problèmes de la diffraction des ondes électromagnétique par une surface rugueuse bidimensionnelle naturelles multicouches qui nous conduit de passer de manière continue du cas non perturbé (structure lisse) au cas perturbé (structure rugueuse)

Nous avons utilisé le développement de Rayleigh qui nous a permet d'écrire les conditions aux limites sur lesquelles on assure le passage des ondes entre deux milieux différents. Et par la suite on a posé le problème de la diffraction des ondes électromagnétiques avec une brève description.

En appliquant la méthode des petites perturbation (SPM), nous avons obtenu les amplitudes des champs diffractées par la structure étudiée dans le cas rugueux et non rugueux. Nous avons considéré un cas particulier d'une structure de 4 couches ( $N=4$ ) avec des interfaces rugueuses d'un milieu stratifié (air / neige / glace de mer / eau de mer) en incidence normale. Plusieurs simulations ont été réalisées afin de voir l'influence de l'épaisseur de glace et l'épaisseur de la neige sur le signal rétrodiffusé et l'influence de plusieurs paramètres sur l'intensité cohérente et l'intensité incohérente ainsi que l'effet de la corrélation et l'isotropie des interfaces.

Pour les configurations traitées nous avons constaté que :

Dans le cas non rugueux et pour une épaisseur de glace supérieure à 8 cm et une fréquence de 13 GHz, l'onde électromagnétique « ne voit donc pas la mer » et il est possible de considéré le milieu 3 (glace) comme semi infini.

L'intensité incohérente pour des interfaces anisotropes est supérieur au cas isotrope. Par exemple pour le cas d'interfaces non corrélés et anisotrope l'intensité incohérente tend vers une valeur fixe qui égale à  $2,6 \cdot 10^{-4}$ , par contre pour le cas isotrope elle tend vers une valeur inférieur qui est égale à  $1,3 \cdot 10^{-4}$ .

L'intensité incohérente rétrodiffusée pour des interfaces anisotropes est supérieur au cas isotrope. la polarisation horizontale (hh) est légèrement inférieure au cas de la polarisation verticale(vv)

On conclut que le signal rétrodiffusé dans l'air montre de fortes fluctuations, même si les variations du milieu stratifié sont petites. Pour analyser mieux le signal rétrodiffusé les conditions expérimentales doivent être bien connues. Dans l'ordre du modèle multi-couches et la base du SPM plusieurs interfaces de neige reflétant mieux la réalité sera examiné.

Cela signifie que nous avons pu mettre en avant un modèle analytique pour la résolution du problème de la diffraction. Ces travaux ont ouvert dans le futur plusieurs perspectives et une contribution à l'interprétation des données des radars de télédétection.

## Référence bibliographique

- [1] N. Pinel, N. Déchamps, C. Bourlier and J. Saillard, “Bistatic scattering from one-dimensional random rough homogeneous layers in the high-frequency limit with shadowing effect”, *Waves in Random and Complex Media*, Vol. 17, No. 3, pp. 283-303, 2007
- [2] M. Saillard and G. Toso, “Electromagnetic scattering from bounded or infinite subsurface bodies,” *Radio Science*, vol. 32, no. 4, pp. 1347-1360, 1997.
- [3] I. Ohlidal and F. Vizda, “Optical quantities of multilayer systems with correlated randomly rough boundaries,” *Journal of Modern Optics*, vol. 46, pp. 2043-2062, 1999.
- [4] L. Rayleigh “Theory of Sound” Vol II, Dover, New York, 1945.
- [5] S. Afifi, R. Dusséaux, “Scattering by Anisotropic Rough Layered 2D Interfaces” *IEEE transactions on antennas and propagation* , Vol. 60, No. 11, November 2012.
- [6] S. Afifi, R. Dusséaux, A. Berrouk , “Electromagnetic Scattering From 3D Layered Structures With Randomly Rough Interfaces: Analysis With the Small Perturbation Method and the Small Slope Approximation ”, *IEEE transactions on antennas and propagation*, Vol. 62, No. 10, October 2014 .
- [7] R. Dusséaux, R. Dusséaux, M. Dechambre, “Scattering properties of a stratified air/snow/sea ice medium. Small slope approximation”, *C.R. Physique* 17(2016) 995-1002
- [8] A. Berrouk, R. Dusséaux, S. Afifi, "Electromagnetic wave scattering from rough layered interfaces: analysis with the small perturbation method and the small slope approximation," *Progress In Electromagnetics Research B*, Vol. 57, pp. 177-190, 2014.
- [9] S. Afifi, R. Dusséaux, A. Berrouk, "Electromagnetic wave scattering from 3D layered structures with randomly rough interfaces: analysis with the small perturbation method and the small slope approximation," *IEEE Antennas and Propagation*, vol. 62, no. 10, pp. 5200-5208, 2014.
- [10] C. Berginc and C. Bourrely “The small-slope approximation method applied to a three-dimensional slab with rough boundaries,” *Progress In Electromagnetics Research*, PIER 73, pp. 131–211, 2007.
- [11] Legresy B., F. Papa, F. Rémy, G. Vinay, M. Van den Bosch and O.Z. Zanife (2005) “ENVISAT Radar Altimeter measurements over continental surfaces and ice caps using the Ice2 retracking algorithm” *Remote Sensing of the Environment*. 95. 150-163.
- [12] R.T. Tonboe, L.T. Pedersen and C. Haas. (2009) “Simulation of satellite radar altimeter sea ice thickness retrieval uncertainty,” *The Cryosphere Discuss.* 3, 513–559.