

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

UNIVERSITÉ BADJI MOKHTAR- ANNABA



جامعة باجي مختار عنابة

*Faculté des Sciences de l'Ingénierat*

*Département de Génie Mécanique*

## **MÉMOIRE**

*Présenté en vue de l'obtention du diplôme de MASTER*

**INTITULÉ**

***Étude statique et dynamique des renforcements  
des poutres par matériaux composites***

*Domaine : Sciences et Technologie*

*Filière : Génie Mécanique*

*Spécialité : Construction mécanique*

*Présenté par :*

***FRIKI Mounir***

DIRECTEUR DU MEMOIRE :

**Dr. TEKILI Sabiha**

**DEVANT LE JURY**

*Président*

*Pr. ZEGHIB A.*

*Membre*

*Pr. BOUSSAID O.*

*Membre*

*Dr. MENAIL Y.*

*Membre*

*Mr. GOUASMI S.*

*Promotion : 2018-2019*

## TABLE DES MATIERES

<b>Remerciements</b> .....	<b>A</b>
<b>Dédicaces</b> .....	<b>B</b>
<b>Listes des tableaux</b> .....	<b>C</b>
<b>Listes des figures</b> .....	<b>D</b>
<b>Résumé</b> .....	<b>E</b>

### INTRODUCTION GENERALE

#### CHAPITRE I : Généralités sur les matériaux composites

Introduction.....	1
I.1 Définition générale d'un matériau composite .....	1
I.2 Classification des matériaux composites.....	1
I.3 Pourquoi les matériaux composites .....	2
I.4 Les constituants d'un matériau composite.....	3
I.4.1 Les matrices (résines) .....	4
I.4.1.1 Les résines thermodurcissables .....	5
I.4.1.2 Les résines thermoplastiques .....	6
I.4.1.3 Les résines thermostables .....	7
I.4.2 Les renforts .....	7
I.4.2.1 Les fibres de verre .....	8
I.4.2.1.1 Ensimage des fibres de verre.....	10
I.4.2.1.2 Propriétés mécaniques des fibres de verre.....	11
I.4.2.2 Les fibres de carbone.....	11
I.4.2.2.1 Caractéristiques mécaniques des fibres de carbone.....	12
I.4.2.3 Les fibres d'aramides.....	12
I.4.2.3.1 Caractéristiques mécaniques des fibres d'aramides .....	13
I.4.2.4 Les fibres céramiques .....	13
I.4.2.4.1 Caractéristiques mécaniques des fibres céramiques .....	14
I.4.3 Charges et les additifs .....	14
I.5 Architecture des matériaux composites .....	16

I.5.1	Stratifiés.....	16
I.5.1.1	Stratifiés à base de fils ou de tissus unidirectionnels.....	16
I.5.1.2	Structure générale d'un stratifié .....	21
I.5.2	Composites sandwiches .....	22
I.5.3	Autres architectures .....	23
I.5.3.1	Plastiques renforcés .....	23
I.5.3.2	Composites volumiques.....	23
I.6	Conclusion... ..	

## **CHAPITRE II : la Théorie des Stratifiés**

II.1	Introduction .....	24
II.2	Champ des déplacements .....	25
II.2.1	Expressions générales .....	25
II.2.2	Schémas du premier degré .....	25
II.3	Champ des déformations.....	26
II.3.1	Expressions générales .....	26
II.3.2	Schéma du premier degré.....	26
II.4	Analyse du comportement mécanique des poutres en matériaux composites .....	28
II.4.1	Détermination des contraintes .....	28
II.5	Résultantes et moments.....	29
II.5.1	Résultantes en membrane.....	29
II.5.2	Moments de flexion et de torsion.....	30
II.6	Calcul des contraintes.....	36
II.6.1	Calcul des contraintes dans le cas traction-compression .....	36
II.6.2	Calcul des contraintes dans le cas flexion pure.....	36
II.6.3	Calcul des contraintes dans le cas flexion + traction .....	37
II.7	Application.....	37

## **CHAPITRE III : Vibration des poutres stratifiées**

III.1	Introduction .....	42
III.2	Vibration des poutres .....	42
III.2.1	Équation générale.....	42

III.2.2	Poutre en appuis simples.....	43
III.2.3	Poutre encastrée .....	44
III.2.4	Poutre encastrée à une extrémité et en appui simple à l'autre .....	46
III.2.5	Poutre encastrée à une extrémité, l'autre étant libre .....	48

**CHAPITRE IV : Modélisation de la vibration des poutres par la méthode des éléments finis**

IV.1	Introduction.....	51
IV.2	Elément poutre en flexion.....	51
IV.2.1	Hypothèses générales.....	51
IV.2.2	Approximation nodale .....	52
IV.2.3	Matrices élémentaires .....	53
IV.3	vibrations des poutres composites .....	55
IV.3.1	Conditions aux limites .....	56
IV.4	Application .....	58
	Conclusion générale.....	62
	Bibliographie.....	64

## REMERCIEMENTS

*Tout d'abord, je tiens mon sincère remerciement pour les aides précieuses, les conseils utiles et l'encouragement de madame TEKILI SABHA, pour m'avoir suivi et soutenu pour réaliser ce travail.*

*Je tiens à remercier le professeur KHADRI YUCEF qui a contribué à la traduction de nos articles.*

*Je tiens à adresser mes plus vifs remerciements aux membres du jury qui ont accepté de juger ce travail.*

*Enfin, je remercie tous les membres de ma famille et mes amis pour leur soutien.*

# Dédicaces

*Je dédie ce travail en guise de reconnaissance, d'amour et d'affection à mes parents et mes frères*

*A toutes les personnes qui ont contribuées de près ou de loin à l'élaboration de ce travail.*

*Frikî Mounir*

## Listes des tableaux

<b>Tableau : I.1</b> Classification des matériaux composites .....	2
<b>Tableau : I.2</b> Pourquoi les matériaux composites.....	3
<b>Tableau : I.3</b> Caractéristiques physiques et mécaniques de différents types de résines thermodurcissables.....	6
<b>Tableau : I.4</b> Caractéristiques des résines thermoplastiques .....	7
<b>Tableau : I-5</b> Constituants des fibres de verre.....	9
<b>Tableau : I.6</b> Caractéristiques mécaniques des verres types E et R, mesurées sur filaments à la sortie de la filière.....	11
<b>Tableau : I.7</b> Caractéristiques mécaniques des fibres de carbone HR, HM et THM .....	12
<b>Tableau : I.8</b> Caractéristiques mécaniques des fibres de monofilaments aramides .....	13
<b>Tableau : I.9</b> Caractéristiques mécaniques des fibres céramiques .....	14
<b>Tableau : III.1</b> Les valeurs des constantes $\lambda_m$ et $\gamma_m$ De poutre encastrée aux extrémités .....	45
<b>Tableau : III.2</b> Coefficient $\lambda_m$ de la fonction poutre encastrée à une extrémité Et en appui simple à l'autre .....	47
<b>Tableau : III.3</b> Coefficients de la fonction d'une poutre encastrée-libre.....	49
<b>Tableau : IV.1</b> Comparaison entre les résultats analytiques et numériques RENFORCEMENT = 5% $2H=h_{comp} = 2.0000e-04$ $2h=h_{acier} = 0.0038$ .....	59
<b>Tableau : IV.2</b> Dix premières fréquences des poutres stratifiées renforcées en composite Carbone/époxyde avec un angle d'orientation $0^\circ$ et différents taux de renforcements $2H=h_{comp} = 2.0000e-04$ $2h=h_{acier} = 0.0038$ .....	59
<b>Tableau : IV.3</b> Dix premières fréquences des poutres statifiées renforcées en composite carbone/époxyde avec un taux de renforcement de 10% et différents angle d'orientation RENFORCEMENT = 10% $h_{comp} = 2.0000e-04$ $h_{acier} = 0.0038$ .....	60
<b>Tableau : IV.4</b> Dix premières fréquences des poutres statifiées renforcées en composite Carbone/époxyde avec un angle d'orientation $0^\circ$ et un taux de renforcement de 10% RENFORCEMENT = 10% $h_{comp} = 2.0000e-04$ $h_{acier} = 0.0038$ . .....	61

## Listes des figures

### CHAPITRE I

<b>Figure : I.1</b>	Structure d'un matériau composite.....	1
<b>Figure : I.2</b>	Les constituants d'un matériau composites .....	4
<b>Figure : I.3</b>	Les divers types de résines .....	4
<b>Figure : I.4</b>	Les résines polyesters insaturés .....	5
<b>Figure : I.5</b>	Les différents types de fibres : a) fibres continues, b) fibres courtes, c) particulaire.....	8
<b>Figure : I.6</b>	Description des différentes opérations du procédé mécanique d'étirage permettant la fabrication des fibres de verre.....	10
<b>Figure : I.7</b>	Élaboration des fibres de carbone.....	12
<b>Figure : I.8</b>	Exemples de charges utilisées dans les CMO : (a) micro-billes de verre, (b) noir de carbone, (c) silice.....	15
<b>Figure : I.9</b>	Constitution d'un stratifié.....	16
<b>Figure : I.10</b>	Désignation d'un stratifié .....	17
<b>Figure : I.11</b>	Convention de signe pour la désignation des stratifiés.....	18
<b>Figure : I.12</b>	Poutre sollicitée en flexion .....	21
<b>Figure : I.13</b>	Matériaux sandwiches à âmes pleines .....	22
<b>Figure : I.14</b>	Matériaux sandwiches à âmes creuses.....	23

### CHAPITRE II

<b>Figure : II.1</b>	Élément de stratifié .....	24
<b>Figure : II.2</b>	Schématisation des résultantes en membrane des actions exercées sur un élément de stratifié.....	29
<b>Figure : II.3</b>	Schématisation des moments de flexion et de torsion .....	31
<b>Figure : II.4</b>	Élément de composite et orientation des fibres.....	33
<b>Figure : II.5</b>	Etat complet de contraintes dans le repère local .....	34
<b>Figure : II.6</b>	Sollicitation d'une poutre en flexion 3-points.....	36
<b>Figure : II.7</b>	Sollicitation d'une poutre en flexion 4-points.....	36
<b>Figure : II.8</b>	Poutre en matériaux composite .....	37

**Figure : II.9** Contraintes normales  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  et  $\tau_{xy}$  des cinq couches des poutres stratifiées renforcées en composite carbone/époxyde avec un taux de renforcement de 5%.

RENFORCEMENT = 5%    2H=hcomp = 2.0000e-04    2h=hacier = 0.0038 .....38

**Figure : II.10** Contraintes normales  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  et  $\tau_{xy}$  des cinq couches des poutres stratifiées renforcées en composite carbone/époxyde avec un taux de renforcement de 50%.

RENFORCEMENT = 50%    hcomp = 2.0000e-04    hacier = 0.0038.....39

**Figure : II.11** Déplacements, des cinq couches des poutres stratifiées renforcées en composite carbone/époxyde avec un angle d'orientation  $0^\circ$  et un taux de renforcement de 10 %, RENFORCEMENT = 50%    hcomp = 2.0000e-04    hacier = 0.0038 .....40

**Figure : II.12** Contraintes normales  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  et  $\tau_{xy}$  des cinq couches des poutres stratifiées renforcées en composite verre/époxyde avec un taux de renforcement de 50%.

RENFORCEMENT = 50%    hcomp = 2.0000e-04    hacier = 0.0038 .....41

### CHAPITRE III

**Figure : III.1** Vibration d'une poutre encastree.....46

**Figure : III.2** Vibration d'une poutre encastree à une extremité et en appui simple à l'autre extremité .....48

**Figure : III.3** Vibration d'une poutre encastree à une extremité et libre à l'autre.....50

### CHAPITRE IV

**Figure : IV.1** Discrétisation en quatre éléments finis à deux noeud.....57

**Figure : IV.2** Poutre en matériaux composite.....58

## **Résumé**

Le développement de nouveaux matériaux est soumis aux besoins des utilisateurs. Ceux-ci veulent toujours des matériaux plus performants, plus économiques et qui durent plus longtemps. Récemment, les matériaux composites (Polymère Renforcé de Fibres) PRF sont utilisés pour le renforcement des structures métalliques. Les PRF sont utilisés soit dans le but de réparer ou de renforcer la structure et comparer leur performance à la fatigue. Dans ce mémoire, l'étude des vibrations libres des poutres métalliques renforcées par les PRF a été réalisée par une méthode analytique en utilisant l'approximation modale et par la méthode des éléments finis (MEF) avec différentes conditions aux limites. Le comportement statique et dynamique des poutres métalliques renforcées par PRF a été analysé analytiquement. La théorie de poutre classique (CBT) a été utilisée pour déterminer les paramètres de rigidité des couches composites. Une étude paramétrique a été menée sur diverses configurations de la poutre renforcée afin d'analyser l'effet des différents paramètres. Les résultats obtenus dans ce travail montrent que les PRF offrent une alternative prometteuse pour le renforcement des structures métalliques. En outre ils améliorent le comportement statique et dynamique de structures telles que la réduction des vibrations et l'augmentation de l'amortissement des structures.

**Mots clés** : vibrations– poutres – composites PRF – renforcement

# Introduction générale

Les poutres renforcées par matériaux composites sont largement utilisées dans les structures de construction civiles, mécaniques, l'aéronautique et l'aérospatiale grâce à leurs propriétés spécifiques (Matériau à coefficient de dilatation nul, Rigidité, faible sensibilité à la fatigue). Le renforcement des structures par matériaux composites a pour but de réparer et de mettre en conformité des structures existantes.

L'objet de notre travail est l'analyse du comportement statique et dynamique en vibration libre des structures (poutres) renforcées par matériaux composites. Les déplacements et contraintes, ainsi que les fréquences propres sont calculées en appliquant la théorie des stratifiées et l'analyse modale pour analyser des vibrations libres. Plusieurs configurations de poutres renforcées par matériaux composites en été pris en considération :

- Poutres en acier renforcées par matériaux composites :
    - Composites Carbone/Epoxyde
    - Composites Verre/Epoxyde
- Avec différents taux de renforcements.
- Types de conditions aux limites :
    - Appuis Simple-Double

Les fréquences naturelles des poutres renforcées par matériaux composites sont déterminées pour les conditions aux limites Appuis Simple-Double. Les contraintes des poutres composites sont calculées pour différentes configurations et différentes orientations des fibres du composites.

Le mémoire comporte quatre chapitres :

Le premier chapitre est une présentation d'une manière générale des matériaux composites, de leurs différents composants, de leurs caractéristiques. Les principales propriétés des matériaux constitutifs des composites sont données avec plus de détail, telle que les l'architectures des matrices et des fibres du matériau composite.

Dans le second chapitre nous résumons la théorie des stratifiés avec différents ordres qui basée sur les équations des déplacements, des déformations et des contraintes pour décrire le comportement des matériaux composites. Une approche appropriée pour les poutres renforcée par matériaux composites est utilisée pour prendre en compte le couplage entre les comportements en membrane, flexion et torsion.

Le troisième chapitre représente l'étude analytique des vibrations libres des poutres renforcées par matériaux composites, nous allons étudier dans ce chapitre les fréquences et les modes propres d'une poutre sollicitée en flexion.

Le quatrième chapitre est consacré à la modélisation de vibration libre des poutres renforcées par matériaux composites en utilisant la méthode des éléments finis pour des poutres renforcées par matériaux composite.

Pour cela un code sous Matlab a été élaboré pour l'étude et l'analyse des contraintes et des vibrations des poutres stratifiées sollicitées aux flexions pures des poutres composites avec appuis simples.

Enfin une conclusion générale.

# **CHAPITRE I**

## **Généralités sur les matériaux composites**

## CHAPITRE I

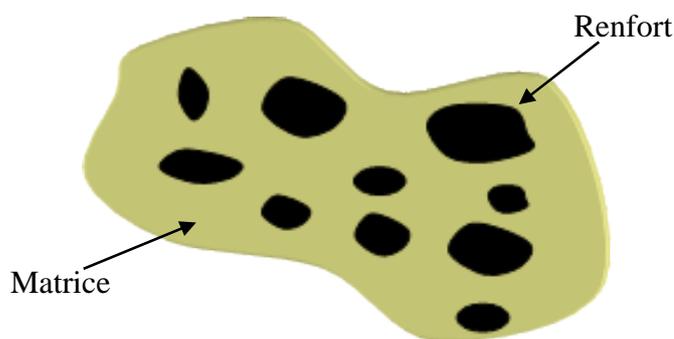
### Généralités sur les matériaux composites

#### Introduction

Le développement de nouveaux matériaux est soumis aux besoins des utilisateurs. Ceux-ci veulent toujours des matériaux plus performants, plus économiques et qui durent plus longtemps. En effet, on ne découvre plus de nouveaux matériaux, mais on crée plutôt des nouvelles associations de matériaux. L'un des résultats de cette association est l'aboutissement à un matériau composite. Ce présent chapitre est consacré à des généralités sur les matériaux composites telles que leurs compositions, leurs constituants et leurs procédés de mise en place.

#### I.1 Définition générale d'un matériau composite

« Le matériau composite est constitué de l'assemblage d'au moins deux matériaux non miscibles et de nature différente, se complétant et permettant d'aboutir à un matériau dont l'ensemble des performances est supérieur à celui des composants pris séparément. » [1]



**Figure : I.1** Structure d'un matériau composite

#### I.2 Classification des matériaux composites

Les matériaux composites peuvent être classés suivant la forme des renforts ou suivant la nature des constituants, cette classification dans tableau (I.1)

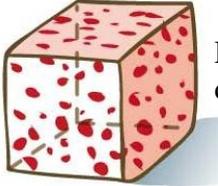
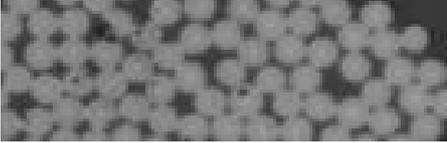
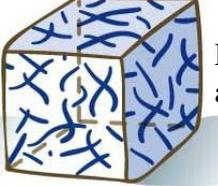
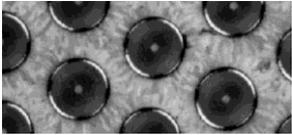
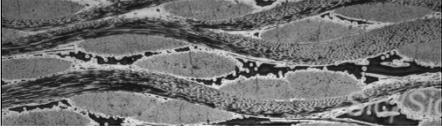
Forme des renforts	Nature des constituants
<p><b>Inclusion</b></p>  <p>Distribution aléatoire des renforts</p>	<p><b>Composites à matrice organique</b>                      Fibres céramiques (Carbone, Verre)                      Fibres organiques (Kevlar)                      Fibres métalliques (Bore, Aluminium)</p> 
<p><b>Renforts fibres courtes</b></p>  <p>Distribution et orientation aléatoire des renforts</p>	<p><b>Composites à matrice métallique</b>                      Fibres céramiques (Sic)                      Fibres métalliques (Bore)</p> 
<p><b>Renforts fibres longues</b></p>  <p>Stratifiées tissés</p>	<p><b>Composites à matrice céramique</b>                      Fibres céramiques (Sic)</p> 

Tableau : I.1 Classification des matériaux composites [2]

### I.3 Pourquoi les matériaux composites ?

Utilisation des matériaux composites principalement pour réduire la masse des structures due à leur excellent rapport : masse / rigidité / résistance, voir tableau (I.2)

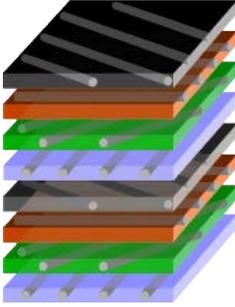
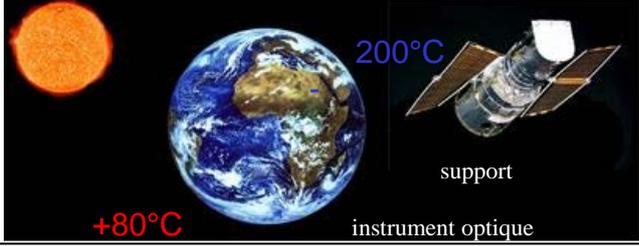
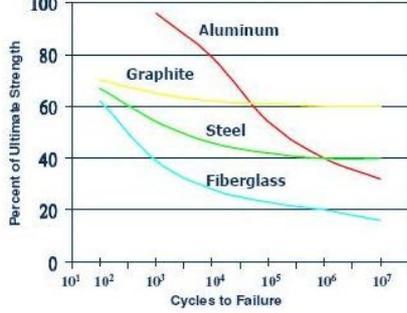
Matériaux au (juste) besoin	Obtention de propriétés spécifiques																																								
 <p><b>Rigidité :</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Pourcentage de fibre</li> <li>Choix des constituants</li> </ul> <p><b>Anisotropie :</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Orientation des fibres</li> </ul>	<p><b>Propriétés spécifiques :</b></p> <p>Matériau à coefficient de dilatation nul</p> 																																								
<p><b>Matériau multifonctionnel</b> Matériaux sandwichs</p>  <p><b>Fonctionnalités :</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Acoustique</li> <li>- Conductivité</li> <li>- Résistance au feu</li> <li>- Instrumentation</li> </ul>	<p><b>Faible sensibilité à la fatigue</b> pour les matériaux Carbone/Epoxy</p>  <table border="1"> <caption>Approximate data from the fatigue graph</caption> <thead> <tr> <th>Cycles to Failure</th> <th>Aluminum (%)</th> <th>Graphite (%)</th> <th>Steel (%)</th> <th>Fiberglass (%)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>10<sup>1</sup></td> <td>~95</td> <td>~70</td> <td>~65</td> <td>~60</td> </tr> <tr> <td>10<sup>2</sup></td> <td>~85</td> <td>~65</td> <td>~55</td> <td>~45</td> </tr> <tr> <td>10<sup>3</sup></td> <td>~75</td> <td>~60</td> <td>~50</td> <td>~35</td> </tr> <tr> <td>10<sup>4</sup></td> <td>~65</td> <td>~55</td> <td>~45</td> <td>~30</td> </tr> <tr> <td>10<sup>5</sup></td> <td>~55</td> <td>~50</td> <td>~40</td> <td>~25</td> </tr> <tr> <td>10<sup>6</sup></td> <td>~45</td> <td>~45</td> <td>~35</td> <td>~20</td> </tr> <tr> <td>10<sup>7</sup></td> <td>~35</td> <td>~40</td> <td>~30</td> <td>~15</td> </tr> </tbody> </table>	Cycles to Failure	Aluminum (%)	Graphite (%)	Steel (%)	Fiberglass (%)	10 <sup>1</sup>	~95	~70	~65	~60	10 <sup>2</sup>	~85	~65	~55	~45	10 <sup>3</sup>	~75	~60	~50	~35	10 <sup>4</sup>	~65	~55	~45	~30	10 <sup>5</sup>	~55	~50	~40	~25	10 <sup>6</sup>	~45	~45	~35	~20	10 <sup>7</sup>	~35	~40	~30	~15
Cycles to Failure	Aluminum (%)	Graphite (%)	Steel (%)	Fiberglass (%)																																					
10 <sup>1</sup>	~95	~70	~65	~60																																					
10 <sup>2</sup>	~85	~65	~55	~45																																					
10 <sup>3</sup>	~75	~60	~50	~35																																					
10 <sup>4</sup>	~65	~55	~45	~30																																					
10 <sup>5</sup>	~55	~50	~40	~25																																					
10 <sup>6</sup>	~45	~45	~35	~20																																					
10 <sup>7</sup>	~35	~40	~30	~15																																					

Tableau : I.2 pourquoi les matériaux composites [2]

#### I.4 Les constituants d'un matériau composite

Le matériau composite est constitué d'un renfort, qui contribue aux propriétés mécaniques de la pièce, et d'un liant, appelé matrice. Le rôle de la matrice est d'assurer la cohésion entre les éléments du renfort, mais aussi de transférer les flux d'efforts entre les plis, de garantir la tenue à l'environnement (corrosion, vieillissement humide) et la tenue en température. Il existe aujourd'hui un grand nombre de matériaux composites qui peuvent être classés suivant différents critères, La nature de la matrice est un de ces critères qui permet de répartir les composites en trois grandes familles :

- Les Composites à Matrices Organiques, telles que les polymères organiques (résine thermodurcissable ou thermoplastique).
- Les Composites à Matrices Céramiques, réservés aux applications à haute température.
- Les Composites à Matrice Métallique.

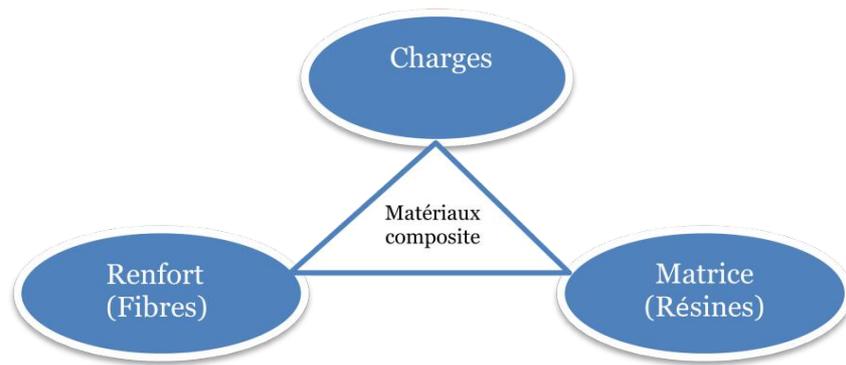


Figure : I.2 les constituants d'un matériau composites [3]

#### I.4.1 Les matrices (résines) :

La matrice a pour principal objectif de transmettre les efforts mécaniques au renfort. Elle doit aussi assurer la protection du renfort vis à vis des diverses conditions environnementales (corrosion, oxydation, vieillissement humide...) :

Les résines se subdivisent en deux grandes familles de résines polymères existant les résines thermodurcissables et thermoplastiques, voir figure (I.3)

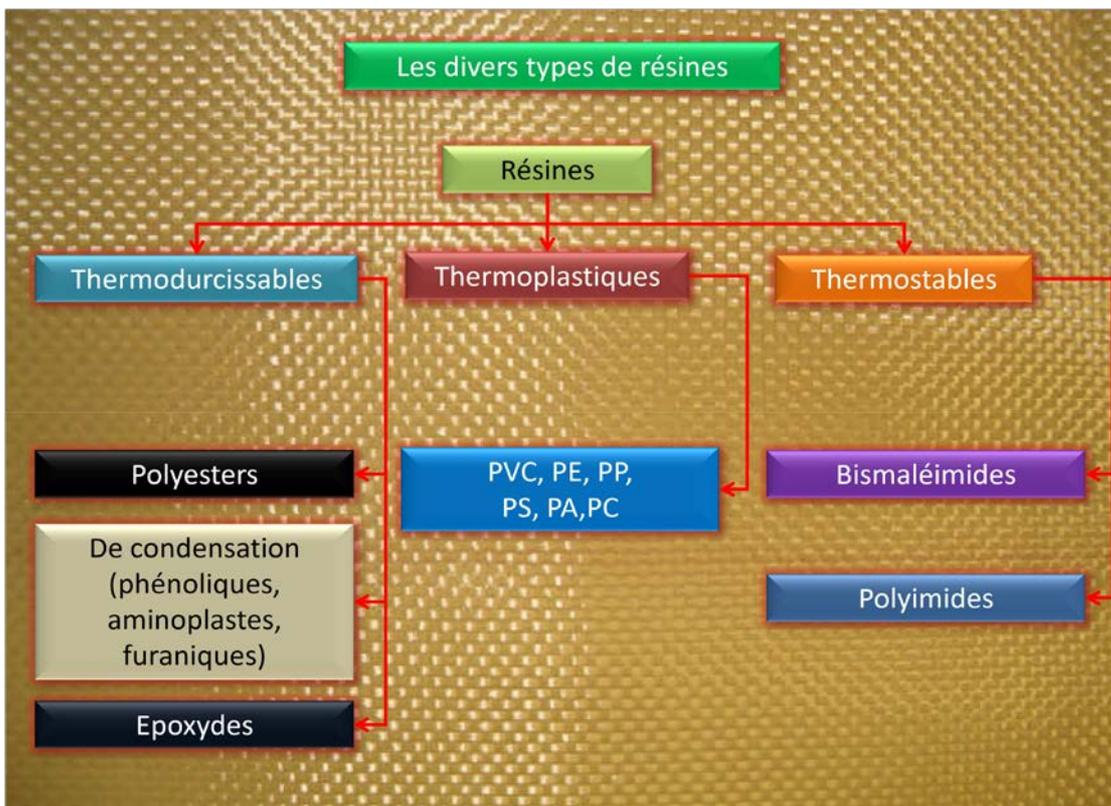


Figure : I.3 les divers types de résines [4]

## I.4.1.1 Les résines thermodurcissables

Qualifie un polymère ne pouvant être mis en œuvre qu'une seule fois et qui devient infusible et insoluble après polymérisation. Une fois durci, leur forme ne peut plus être modifiée. La polymérisation peut être engendrée par une montée en température (résines à chaud) ou de produits chimiques type catalyseurs (résines à froid). Après polymérisation et durcissement, une nouvelle montée en température ne permettra pas au produit de revenir dans son état initial (liquide).

Les résines thermodurcissables sont les produits les plus employés comme matrice de matériaux composites "structuraux", Généralement associées avec des fibres longues. Actuellement, les résines thermodurcissables principalement utilisées sont les suivantes :

- Les résines époxydes qui possèdent une Excellente adhérence sur fibres et de bonnes caractéristiques mécaniques. Elles sont souvent utilisées avec un renfort en fibres de carbone pour la réalisation de pièces structurales aéronautiques.
- Les résines phénoliques sont les plus anciennes résines thermodurcissables, découvert an début du siècle en 1909 par BAEKELAND, dont le type le plus connu la « Bakélite », elles possèdent de bonnes caractéristiques mécaniques et excellente tenue à la chaleur et au fluage et permet les inconvénients une résistance à la traction et une tenue aux chocs généralement faibles.
- Les résines polyesters

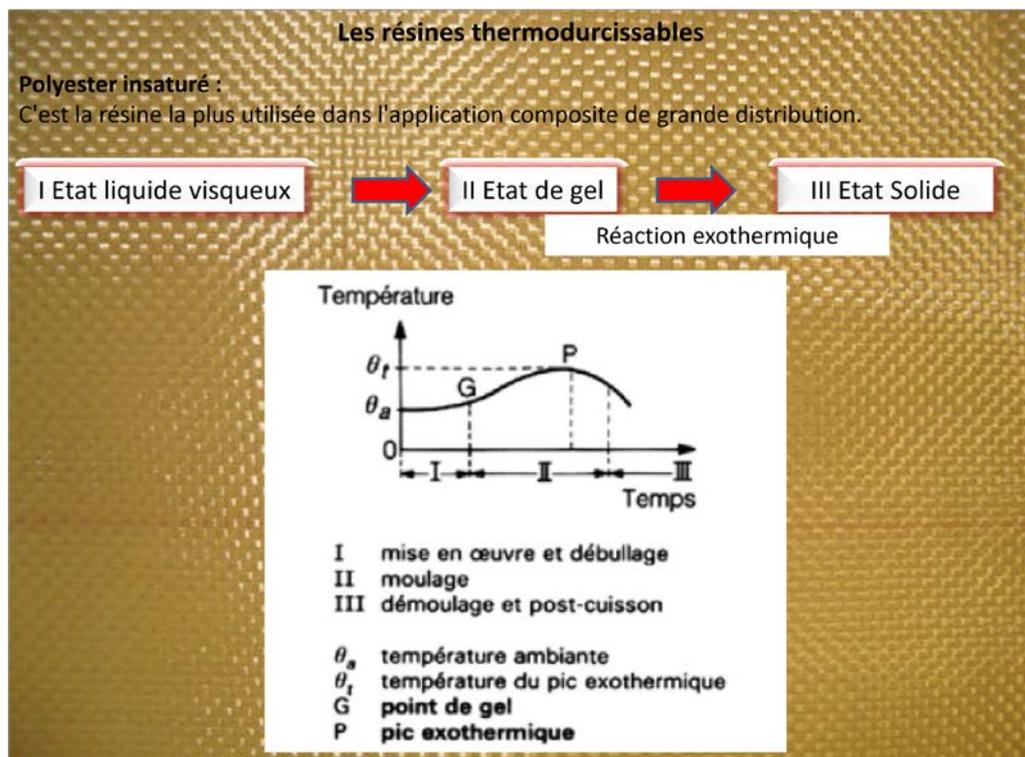


Figure : I.4 les résines polyesters insaturés [4]

En dépit de leurs bonnes tenues mécaniques, ces résines sont très sensibles aux chocs.

Afin de pallier cet inconvénient, il est possible d'améliorer leur ténacité en les mélangeant avant polymérisation à des résines thermoplastiques.

Le tableau (I.3) ci-dessous regroupe quelques caractéristiques physiques et mécaniques de différents types de résines thermodurcissables.

<b>Matrices thermo-durcissables TD</b>	<b>Masse volumique <math>[\rho]</math> en <math>kg.m^{-3}</math></b>	<b>Module élasticité <math>[E]</math> en MPA</b>	<b>Module De cisaillement <math>[G]</math></b>	<b>Coefficient De poisson <math>[\nu]</math></b>	<b>Contrainte De rupture <math>[S_r]</math></b>	<b>Allongement À la rupture [%]</b>	<b>Coefficient De dilatation Thermique <math>^{\circ}C^{-1}</math></b>
<b>Epoxyde</b>	<b>1200</b>	<b>4500</b>	<b>1600</b>	<b>0.4</b>	<b>130</b>	<b>2</b>	<b><math>11 \times 10^{-5}</math></b>
<b>Phénolique</b>	<b>1300</b>	<b>3000</b>	<b>1100</b>	<b>0.4</b>	<b>70</b>	<b>205</b>	<b><math>1 \times 10^{-5}</math></b>
<b>Polyester</b>	<b>1200</b>	<b>4000</b>	<b>1400</b>	<b>0,4</b>	<b>80</b>	<b>2,5</b>	<b><math>8 \times 10^{-5}</math></b>

**Tableau : I.3** caractéristiques physiques et mécaniques de différents types de résines thermodurcissables.

#### **I.4.1.2 Les résines thermoplastiques**

Les résines thermoplastiques sont des polymères à chaînes linéaires ou ramifiées, c'est à-dire monodirectionnelles ou bidirectionnelles. Elles sont en général fusibles et solubles. Les résines thermoplastiques présentent le gros avantage de pouvoir être alternativement ramollies par chauffage et durcies par refroidissement ce qui permet de faciliter leur moulage par viscoplasticité.

Cette transformation est par ailleurs réversible, ce qui permet de recycler ce matériau.

Les thermoplastiques sont mis en œuvre lorsque la température est voisine de leur température de transition vitreuse pour les thermoplastiques amorphes, et jusqu'à la température de fusion pour les thermoplastiques semi-cristallins. Renforcées avec des fibres courtes ou avec des fibres longues, l'utilisation de ces résines se développe fortement notamment comme matrice des composites "structuraux".

Parmi les résines thermoplastiques utilisées dans les composites aéronautiques on peut citer le polyéther-imide (PEI), le polyphénylsulfure (PPS), le polyéther-éther-cétone (PEEK), le polyéther-cétone-cétone (PEKK) qui sont présentées dans le tableau (I.4).

Matrice thermoplastique TP	Masse Volumique [ $\rho$ ] $kg.m^{-3}$	Résistance à la traction (MPa)	Module D'Young (MPa)	Allongement à la rupture [%]
PPS	1,3	65	4000	100%
PEI	1,15	105	3300	60%
PEEK	1,3	90	4000	50%

**Tableau : I.4** Caractéristiques des résines thermoplastiques.

### I.4.1.3 Les résines thermostables

Les résines thermostables se distinguent des autres résines, précédemment considérées, essentiellement par leurs performances thermiques qui conservent leurs propriétés mécaniques pour des températures plus élevées que 200°C. Dans la pratique nous retrouvons pour ces résines les deux grandes familles des résines thermoplastiques et thermodurcissables.

Les résines thermostables sont développées surtout dans les domaines de l'aviation et de l'espace, où les laboratoires cherchent à mettre au point de nouvelles résines.

Parmi les résines thermostables les plus utilisées :

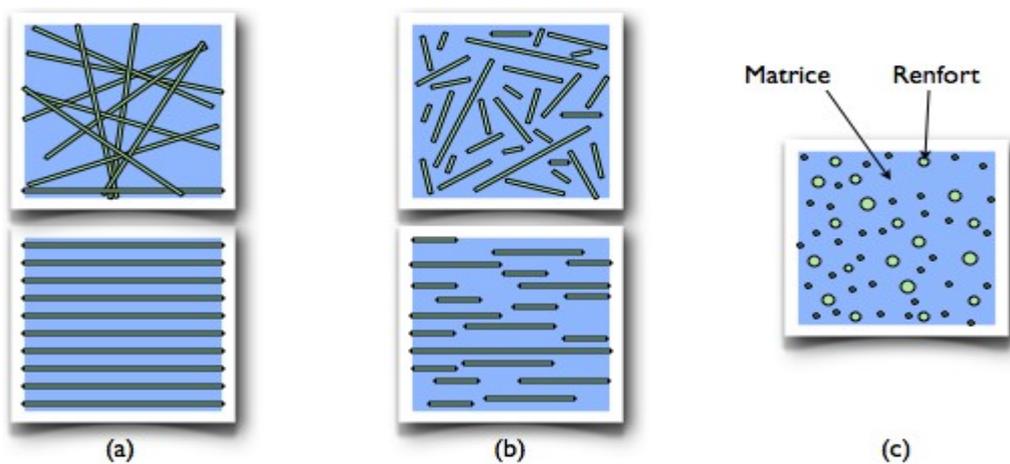
- Les résines bismaléimides : sont des résines dont le réseau est élaboré à des températures de 180 à 200°C. Les procédés de moulage sont identiques à ceux des Composites à matrice thermodurcissable de type polyester ou époxyde.
- Les résines polyimides sont surtout utilisées dans les composites HP, lorsque l'on cherche une bonne stabilité sous hautes températures (> 250 °C). Elles restent toutefois très onéreuses et difficiles à mettre en œuvre, mais présentent d'excellentes propriétés mécaniques notamment à haute température.

### I.4.2 Les renforts

Les matériaux composites tiennent l'essentiel de leurs caractéristiques mécaniques des matériaux de renfort : rigidité, résistance à la rupture, dureté, etc. Le choix approprié du renfort permet aussi d'améliorer certaines propriétés physiques d'un composite

(Comportement thermique, tenue à la température, tenue au feu, résistance à l'abrasion, propriétés électriques, etc.). Pour élaborer des composites performants, les caractéristiques recherchées pour les renforts sont caractéristiques mécaniques élevées, masse volumique faible, bonne compatibilité avec les résines, facilité de mise en œuvre, faible coût, etc. La nature des renforts (organique, minérale, synthétique...) et leurs formes sont fonctions de l'application. Toutefois les plus utilisés sont sous formes de fibres et se présentent sous différentes formes commerciales.

Le renfort du matériau composite est le constituant qui va supporter la plus grosse partie des efforts mécaniques. Il peut se présenter sous différentes formes particulière, charges sous forme de microbilles, de fibres broyées, d'écailles ou de poudre micro ou nano particulaire, fibres courtes, pour les renforts surfaciques non texturés tel que le mat, fibres continues pour les renforts texturés tels que les tissus (taffetas, sergé et satin, ...) ou les renforts unidirectionnels tels que les nappes. [5] Figure (I.5) :



**Figure : I.5** Les différents types de fibres : a) fibres continues, b) fibres courtes, c) particulaire

Il existe des architectures fibreuses complexes multidirectionnelles 2D, 3D. Le type de tissu est choisi en fonction de sa drapabilité, c'est à dire son aptitude à recouvrir la forme plus ou moins complexe de la pièce sans faire de plis. Il est aussi est surtout choisi en fonction des sollicitations mécaniques que va subir la pièce.

Parmi les fibres les plus employées, on peut citer :

### I.4.2.1 Les fibres de verre

Les fibres de verre qui sont à faible coût de production, et qui constituent le renfort le plus utilisé actuellement (bâtiment, nautisme et autres applications non structurales aéronautiques). Leur fabrication se fait en général par étirage décrit par la

Figure (I.6). Elles sont obtenues à partir des oxydes minéraux constituant la matière première silice et d'additifs (silice, alumine etc...). Le verre est coulé en fusion à 1250°C à travers une filière en platinerhodium, après refroidissement, le verre en phase plastique est simultanément étiré à grand vitesse et refroidi. Les conditions de refroidissement et de vitesse d'étirage permettent d'obtenir soit des filaments continus, soit des fibres discontinues, de diamètres déterminés, il existe deux procédés d'étirage, conduisant chacun à un type de fil déterminé :

- Étirage mécanique.
- Étirage pneumatique.

Les filaments sont étirés pour obtenir des fibres continues. Suivant les applications auxquelles elles sont destinées, les fibres de verre sont réparties en trois qualités, voir Tableau (I-5) :

Fibres E pour les composites grandes diffusions (GD) ;

Fibres D pour les applications dans la construction électrique (circuits imprimés)

Fibres R pour les composites hautes performances (HP).

L'utilisation des fibres de verre dans les composites est principalement limitée par un vieillissement accéléré au contact prolongé de l'eau, des rayonnements UV ou de T° élevées.

Constituants	Composition en masse (%)		
	Verre E	Verre D	Verre R
<b>Silice SiO<sub>2</sub></b>	53 - 54	73 - 74	
<b>Alumine Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub></b>	14 15,5		
<b>Chaux CaO</b>	20 - 24	0,5 – 0,6	
<b>Magnésie MgO</b>	20 - 24	0,5- 0,6	60
<b>Oxyde de bore B<sub>2</sub>O<sub>3</sub></b>	6,5 - 9		25
<b>Fluor F</b>	0 - 0,7	22-23	9
<b>Oxyde de fer Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub></b>	<1		6
<b>Oxyde de titane TiO<sub>2</sub></b>	< 1	0,1-0,2	
<b>Oxyde de sodium Na<sub>2</sub>O</b>	<1	1,3	
<b>Oxyde de potassium K<sub>2</sub>O</b>	<1	1,5	

**Tableau : I-5** Constituants des fibres de verre

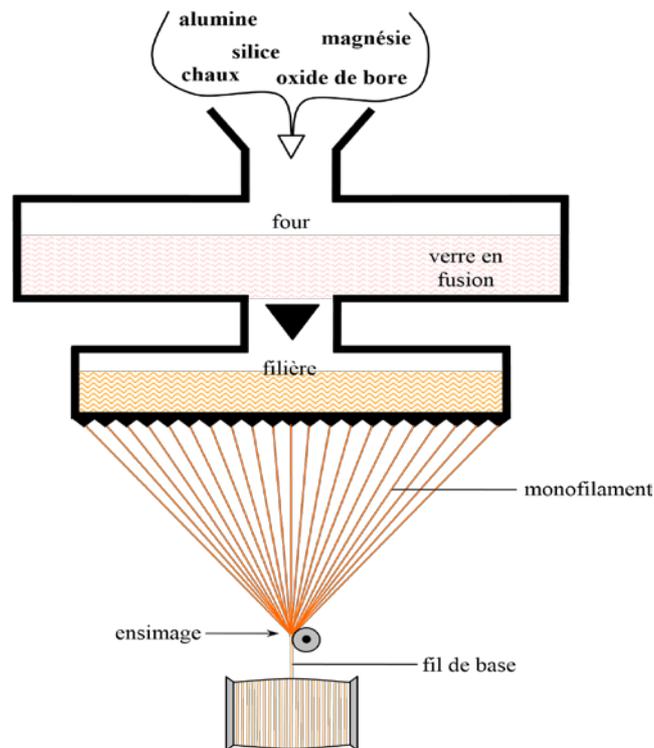
## I.4.2.1.1 Ensimage des fibres de verre

Les filaments de verre issus de la filière ne peuvent pas être utilisés directement pour diverses raisons :

- L'absence de cohésion entre les filaments, qui s'oppose à la constitution de fils
- La sensibilité du verre à l'abrasion, conduisant à une détérioration lors des manipulations postérieures au fibrage
- La sensibilité à l'attaque de l'eau
- La création de charges électrostatiques consécutive aux divers frottements

Pour remédier ces défauts, on réalise à la sortie de la filière une opération dite d'ensimage de composition complexe. A la lumière des défauts évoqués ci-avant, les diverses fonctions de l'ensimage sont :

- Établir une certaine cohésion entre les filaments
- Donner une plus ou moins grande raideur aux fils
- Protéger les filaments contre l'abrasion
- Éviter l'apparition de charges électrostatiques
- Faciliter l'immigration des filaments par la résine



**Figure : I.6** Description des différentes opérations du procédé mécanique d'étirage permettant la fabrication des fibres de verre [6]

**I.4.2.1.2 Propriétés mécaniques des fibres de verre**

Il est de coutume de donner comme caractéristiques mécaniques de référence les caractéristiques mesurées sur monofilaments prélevés à la sortie de la filière. Le tableau I.6 donne les valeurs usuelles de ces grandeurs.

Caractéristiques			Verre E	Verre R
<b>Masse volumique</b>	$\rho$	$kg/m^3$	<b>600</b>	<b>2 550</b>
<b>Module d'Young</b>	$E_f$	<b>GPa</b>	<b>73</b>	<b>86</b>
<b>Contrainte à la rupture</b>	$\sigma_{fu}$	<b>MPa</b>	<b>3400</b>	<b>4 400</b>
<b>Allongement à la rupture</b>	$\varepsilon_{fu}$	%	<b>4,4</b>	<b>5,2</b>
<b>Coefficient de Poisson</b>	$\nu_f$		<b>0,22</b>	-

**Tableau : I.6** Caractéristiques mécaniques des verres types E et R, mesurées sur filaments à la sortie de la filière.

**I.4.2.2 Les fibres de carbone**

Les fibres de carbone qui sont utilisées pour des applications structurales. Ces fibres sont généralement obtenues par pyrolyse d'un précurseur organique sous atmosphère contrôlée figure (I.7). Le plus utilisé de ces précurseurs est le Polyacrylonitrile (PAN). Celui-ci est oxydé entre 200 et 300°C sous air ambiant puis carbonisé sous azote entre 800 et 1500°C. Il ne subsiste alors que la structure lamellaire hexagonale 2-D d'atomes de carbone. Les filaments dits à Haute Résistance (HR) de 7 µm de diamètre ainsi que ceux dits à Module Intermédiaire (IM) sont ainsi obtenus. Les filaments à haut module (HM) voir très haut module (THM) (5,5 µm de diamètre) subissent en revanche une étape supplémentaire de graphitisation autour de 3000°C, sous argon. Cette graphitisation entraîne une réorientation des réseaux hexagonaux et permet d'augmenter la rigidité des fibres.

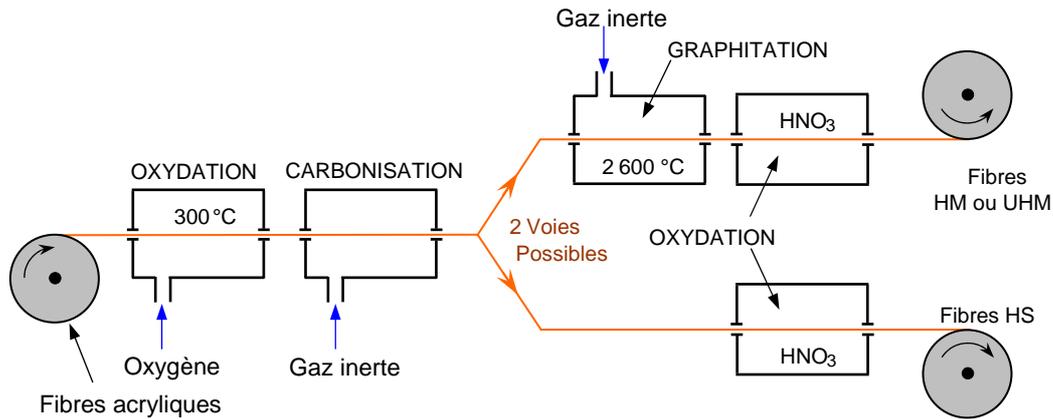


Figure : I.7 Élaboration des fibres de carbone [6]

### I.4.2.2.1 Caractéristiques mécaniques des fibres de carbone

Les fibres de carbone possèdent de très bonnes caractéristiques mécaniques, d'autant plus que leur masse volumique est faible (généralement inférieure à 2 000 kg/m<sup>3</sup>). Le tableau (I.7) donne des caractéristiques mécaniques des fibres de carbone

Caractéristiques			Carbone HR	Carbone HM	Carbone THM
Masse volumique	$\rho$	kg/m <sup>3</sup>	1 750	1 810	1 950
Diamètre		$\mu m$	5 à 7	5 à 7	5 à 7
Module d'Young	$E_f$	GPa	230	400	600
Module spécifique	$E_f/\rho$	MNm/kg	130	210	310
Contrainte à la rupture	$\sigma_{fu}$	MPa	3000–4000	2 800	2 000
Contrainte spécifique	$\sigma_{fu}/\rho$	KNm/kg	1710–2290	1 550	1 030

Tableau : I.7 caractéristiques mécaniques des fibres de carbone HR, HM et THM

### I.4.2.3 Les fibres d'aramides

Les fibres d'aramides elles sont issues de la chimie organique des polyamides aromatiques (polyaramide) par synthèse chimique à basse température, ses propriétés diffèrent des polyamides aliphatiques classiques. Les composites renforcés de fibres d'aramide offrent une bonne stabilité en température (Jusqu'à 200°C en fonction de la matrice) mais souffrent :

- D'une adhérence moyenne entre matrice et fibre,
- D'un prix encore trop élevé.

Les fibres d'aramide (plus connues sous leurs noms commerciaux Kevlar, Twaron, Technora, Nomex, etc...) [7],[5], qui sont utilisées pour des applications bien plus ciblées, tel que la protection balistique (gilets pare-balles) ou pour les réservoirs souples de carburant, par exemple.

#### **I.4.2.3.1 Caractéristiques mécaniques des fibres d'aramides**

Les caractéristiques mécaniques des fibres aramides sont reportées dans le tableau (I.8)

Caractéristiques			Kevlar 29	Kevlar 49	Kevlar 149	Twaron	Technora
Masse volumique	$\rho$	$kg/m^3$	1440	1450	1470	1440	1390
Diamètre		$\mu m$	12	12	12	12	12
Module d'Young	$E_f$	GPa	60	120	160	60	190
Module spécifique	$E_f/\rho$	$MNm/kg$	42	83	110	42	65
Contrainte à la rupture	$\sigma_{fu}$	MPa	3000	3000	2400	2600	2 800
Contrainte spécifique	$\sigma_{fu}/\rho$	$KNm/kg$	2080	2070	1630	1800	2010
Allongement à la rupture		%	3,6	1,9	1,5	3	4

**Tableau : I.8** caractéristiques mécaniques des fibres de monofilaments aramides

#### **I.4.2.4 Les fibres céramiques**

Diverses fibres de matériaux réfractaires ou céramiques (carbures, borures, nitrures, etc.) peuvent être élaborées par dépôt chimique en phase vapeur sur un fil support. Actuellement, les fibres obtenues par ce procédé, et faisant l'objet d'une production, sont :

- Les fibres de bore (B),
- Les fibres de bore (B)-carbure de bore ( $B_4C$ ),
- Les fibres de carbure de silicium (SiC),
- Les fibres de bore-carbure de silicium, appelées BorSiC.

Les fibres sont en réalité de gros filaments (diamètre de l'ordre de 100  $\mu\text{m}$ ), formés d'une âme (le fil support) en tungstène ou en carbone d'un diamètre d'environ 10  $\mu\text{m}$ , recouverts

- D'une couche de bore d'épaisseur environ 40  $\mu\text{m}$  (fibres de bore),
- D'une couche de bore d'épaisseur 40  $\mu\text{m}$  et d'une couche de carbure de bore de 4  $\mu\text{m}$  d'épaisseur (fibres B-B<sub>4</sub>C),
- D'une couche de carbure de silicium (fibres SiC),
- D'une couche de bore et d'une couche de carbure de silicium (fibres BorSiC).

Les fibres de bore et les fibres bore-carbure de silicium sont disponibles sous forme :

- De fils continus constitués de monofilaments parallèles
- De rubans préimprégnés pour enroulement filamentaire
- De tissus unidirectionnels.

Ces fibres associées avec des résines époxydes, avec lesquelles l'adhérence est très bonne, ou avec d'autres résines thermoplastiques ou thermodurcissables, sont utilisées dans les domaines des sports et des loisirs.

#### **I.4.2.4.1 Caractéristiques mécaniques des fibres céramiques**

Les caractéristiques mécaniques des fibres céramiques sont reportées dans le tableau (I.9)

Caractéristiques			Bore	Bore + B <sub>4</sub> C	SiC
Masse volumique	$\rho$	$kg\ m^3$	2600	2 600	3 000
Diamètre		$\mu\text{m}$	100–150	100–150	100–150
Module d'Young	$E_f$	Gpa	430	430	410
Module spécifique	$E_f/\rho$	MNm/kg	165	165	140
Contrainte à la rupture	$\sigma_{fu}$	Mpa	3800	4 000	3 900
Contrainte spécifique	$\sigma_{fu}/\rho$	KNm/kg	1 460	1 540	1 300

**Tableau : I.9** caractéristiques mécaniques des fibres céramiques [6]

#### **I.4.3 Charges et les additifs**

Enfin, des charges et additifs sont ajoutés au composite afin de lui conférer de nouvelles propriétés et, ainsi, de lui permettre de remplir d'avantage de fonctions techniques. De manière générale, les charges et additifs jouent un rôle essentiel dans l'obtention des propriétés des polymères, qu'ils soient utilisés seuls ou comme matrices de composites ; il en existe de très nombreux types.

Les charges sont des particules solides que l'on disperse au sein de la matrice (charges renforçant, ex : charges sphériques creuses 5 à 150 $\mu$ m). Elles peuvent être minérales, organiques (végétales ou synthétiques) ou métalliques, et s'utilisent grosso modo de la même façon que dans les plastiques "traditionnels". On peut par exemple rencontrer (Figure I.5) :

- Des micro-billes de verre creuses, ajoutées en plus des renforts principaux, qui améliorent la tenue en compression tout en allégeant la matrice
- Du noir de carbone utilisé à la fois comme pigment noir, comme barrière anti-UV et comme antioxydant
- Des particules de silice pour rendre la matrice plus isolante (thermiquement, électriquement et acoustiquement), diminuer son retrait au moulage...
- Des poudres ou paillettes métalliques pour rendre la matrice conductrice de l'électricité et de la chaleur, pour améliorer son usinabilité, sa résistance aux chocs ou à l'abrasion...
- Des billes thermoplastiques ajoutées dans les matrices thermodurcissables, pour améliorer leur ductilité et donc leur résistance à la fissuration... [3]



**Figure : I.8** Exemples de charges utilisées dans les CMO : (a) micro-billes de verre, (b) noir de carbone, (c) silice.

Les additifs possibles sont encore plus nombreux. Une classe d'additifs que l'on rencontre systématiquement est celle des agents d'interface, que l'on dépose sur les fibres pour les faire adhérer à la matrice.

On rencontre également :

- Des stabilisants, qui retardent les dégradations dues à l'oxygène, aux UV ou encore à l'ozone
- Des ignifugeants ou retardateurs de flamme (la plupart des polymères sont inflammables) : des agents de démoulage, des colorants...

Il est ainsi possible de conférer de nombreuses fonctions techniques au composite, et d'adapter finement ses propriétés aux besoins du concepteur.

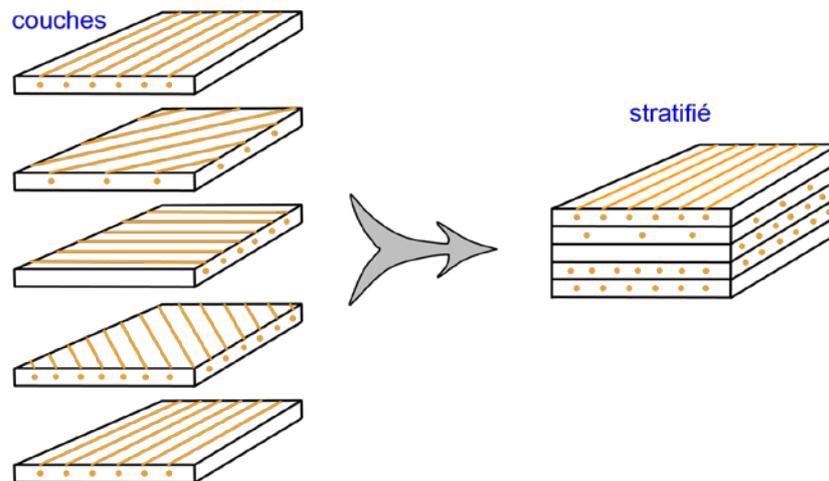
La quantité des produits ajoutés peut varier de :

- Quelques dizaines de % dans le cas de charges
- À quelques % et moins dans le cas d'additifs

### I.5 Architecture des matériaux composites

#### I.5.1 Stratifiés

Les stratifiés sont constitués (figure I.9) de couches successives (appelées parfois plis) de renforts (fils, stratifils, mats, tissus, etc.) imprégnés de résines. Nous examinons les divers types de stratifiés.



**Figure : I.9** constitution d'un stratifié [6]

##### I.5.1.1 Stratifiés à base de fils ou de tissus unidirectionnels

Les stratifiés à base de fils ou de tissus unidirectionnels constituent un type de stratifié de base auquel peut se ramener en théorie tout autre type de stratifié. Ces stratifiés sont constitués figure (I.10) de couches de fils ou de tissus unidirectionnels, dont la direction est décalée dans chaque couche.

La désignation de ces stratifiés est généralement effectuée selon le code suivant :

1. Chaque couche est désignée par un nombre indiquant la valeur en degrés de l'angle que fait la direction des fibres avec l'axe x de référence.
2. Les couches successives sont séparées par un / si leurs angles sont différents.
3. Les couches successives de même orientation sont désignées par un indice numérique.
4. Les couches sont nommées successivement en allant d'une face à l'autre. Des crochets (ou parenthèses) indiquent le début et la fin du code.

La désignation dépend du système d'axes choisi. Un exemple est donné à la figure (I.10)

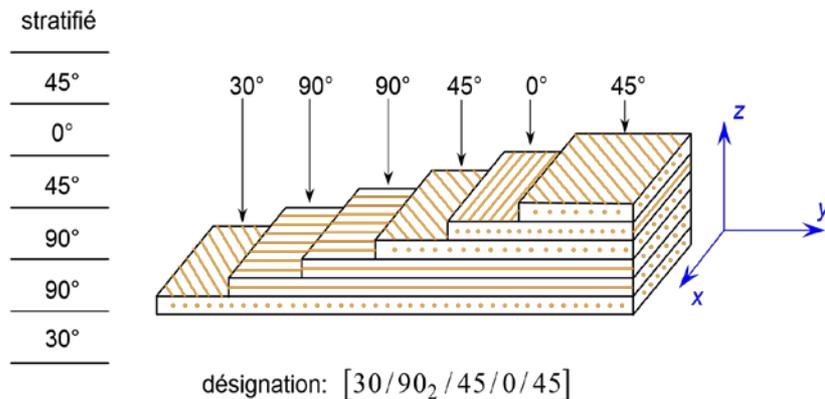
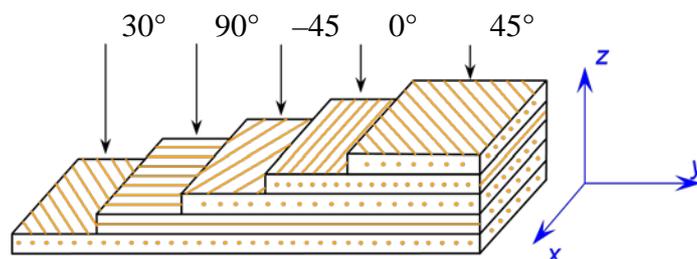
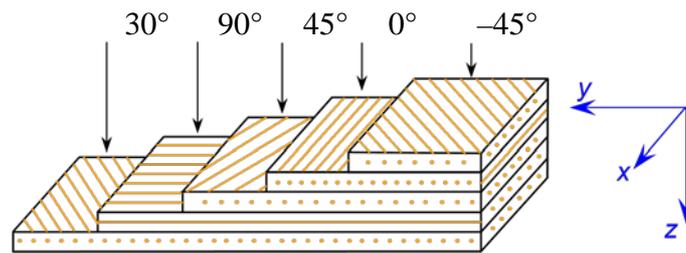


Figure : I.10 Désignation d'un stratifié

- **Angles positifs et négatifs**

Lorsque des couches sont orientées à des angles égaux en valeurs absolues, mais de signes opposés, les signes + ou - sont utilisés. La convention pour les angles positifs ou négatifs dépend du système d'axes choisi : une inversion peut apparaître suivant le choix effectué figure (I.11)





**Figure : I.11** Convention de signe pour la désignation des stratifiés.

Nous donnons ci-après quelques exemples de désignation de stratifiés.

Stratifié	Désignation
0°	
30°	
- 30°	$[\pm 45 / \mp 30 / 0]$
- 45°	
45°	
30°	
- 60°	
- 60°	$[45 / 0 / - 60_2 / 30]$
0°	
45°	
0°	
- 45°	
- 45°	$[45_2 / - 45_2 / 0]$
45°	
45°	
0°	
- 45°	
45°	$[45 / - 45_2 / 45_2 / - 45 / 0]$
- 45°	
- 45°	
45°	

- **Stratifiés symétriques**

Un stratifié est symétrique si son plan moyen est plan de symétrie. Sa désignation ne nécessite alors que la moitié des couches successives.

Si le stratifié à un nombre pair de couches, la désignation débute sur une face pour finir au plan de symétrie. Un indice S indique que le stratifié est symétrique. Par exemple :

$$\begin{array}{c} \hline 90^\circ \\ \hline 45^\circ \\ \hline 45^\circ \\ \hline 0^\circ \\ \hline 0^\circ \\ \hline 45^\circ \\ \hline 45^\circ \\ \hline 90^\circ \\ \hline \end{array} \quad [90 / 45_2 / 0]_s$$

Si le stratifié comporte un nombre impair de couches, la désignation est semblable à la précédente, la couche centrale étant surlignée. Par exemple :

$$\begin{array}{c} \hline 90^\circ \\ \hline 45^\circ \\ \hline 45^\circ \\ \hline 0^\circ \\ \hline 45^\circ \\ \hline 45^\circ \\ \hline 90^\circ \\ \hline \end{array} \quad [90 / 45_2 / \overline{0}]_s$$

- **Séquences**

La répétition de séquences peut être indiquée par un indice indiquant le nombre de fois où une séquence est successivement répétée. Par exemple :

0°		
45°		
90°		
0°		
45°	ou	[(0 / 45 / 90) <sub>2</sub> ] <sub>s</sub>
90°		
90°		
45°		
0°		
90°		
45°		
0°		

- **Stratifiés hybrides**

Les stratifiés hybrides sont constitués de couches successives comportant des fibres de natures différentes. Il sera alors nécessaire de les mentionner dans la désignation. Par exemple, pour des stratifiés avec la même résine :

0° V		
45° C		
-45° C		
90° C		
90° C		[0 <sub>v</sub> / ± 45 <sub>c</sub> / 90 <sub>c</sub> ] <sub>s</sub>
-45° C		
45° C		
0° V		

Avec :

V : verre, C : carbone

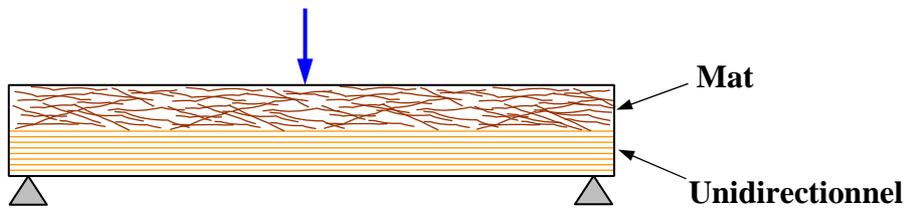


Figure : I.12 Poutre sollicitée en flexion [6]

### I.5.1.2 Structure générale d'un stratifié

Dans le cas général, le renfort de chaque couche sera de natures diverses : fils, stratifils, mats, tissus, fibres de verre, fibres de carbone, etc. Chaque couche doit alors être désignée par l'indication de la nature des fibres, du type de renfort : fils, mat, tissu avec indication de la proportion de fibres suivant le sens chaîne et trame.

Le choix de la nature et de la séquence des couches dépendra de l'utilisation du matériau composite, en l'adaptant au mieux au champ des contraintes imposé :

- Les couches unidirectionnelles ont de bonnes performances mécaniques dans la direction des fibres ;
- Les mats sont peu résistants en traction et devront être réservés aux zones comprimées : par exemple figure (I.12) couches unidirectionnelles dans la zone de traction, mat dans la zone de compression d'une poutre sollicitée en flexion.
- Une stratification croisée sera sensible au délaminage interlaminaire.
- Une stratification avec au moins trois directions de fibres sera nécessaire pour avoir une pseudo-isotropie dans le plan du stratifié.

Enfin, il est intéressant de noter qu'une stratification symétrique garantira généralement une bonne planéité du stratifié après démoulage.

- **Stratifiés hybrides**

Les stratifiés hybrides permettent d'être plus performants en utilisant au mieux les propriétés des diverses fibres disponibles. Parmi les différents hybrides, on peut distinguer

- Des hybrides intercouches, constitués d'une suite de couches, chacune de nature différente.
- Des hybrides intracouches, constitués par une séquence de couches identiques, chaque couche étant constituée de renforts différents.
- Des couches métalliques peuvent également être intercalées entre les couches.

## I.5.2 Composites sandwiches

Le principe de la technique sandwich consiste à appliquer sur une âme (constituée d'un matériau ou d'une structure légère possédant de bonnes propriétés en compression) deux "feuilles", appelées peaux, possédant de bonnes caractéristiques en traction. L'objectif d'un tel procédé est de constituer une structure permettant de concilier légèreté et rigidité.

Généralement, le choix des matériaux est fait avec pour objectif initial d'avoir une masse minimale en tenant compte ensuite des conditions d'utilisation (conditions thermiques, corrosion, prix, etc.).

Les matériaux les plus couramment utilisés sont :

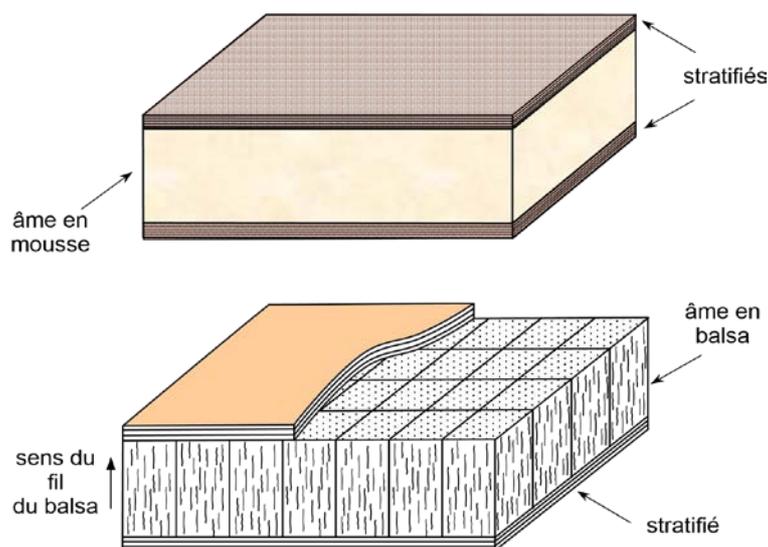
**Pour les âmes pleines, figure (I.13) :**

- Le balsa ou bois cellulaire.
- Diverses mousses cellulaires.
- Des résines chargées de microsphères creuses de verre, appelées mousses syntactiques.

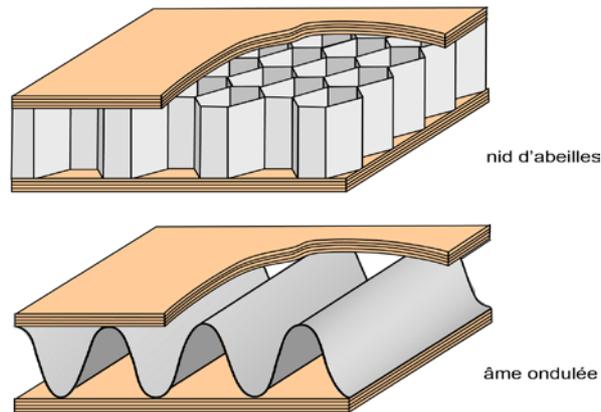
**Pour les âmes creuses, figure (I.14), essentiellement nid d'abeilles et profilés :**

- Des alliages métalliques légers.
- Du papier kraft (enduit ou non de résine).
- Du papier polyamide, type papier Nomex.

Des âmes mixtes peuvent être utilisées, Les peaux sont le plus souvent des stratifiés (verre, carbone, Kevlar) ou des feuilles d'alliages légers.



**Figure : I.13** Matériaux sandwichs à âmes pleines



**Figure : I.14** Matériaux sandwichs à âmes creuses

Pour que les structures sandwichs jouent pleinement leur rôle, il est nécessaire de veiller à avoir une solidarisation parfaite de l'ensemble âme-peaux, de manière à répartir les efforts entre âme et peaux. L'assemblage est réalisé par un collage à l'aide de résines compatibles avec les matériaux en présence.

### **I.5.3 Autres architectures**

Les autres architectures des matériaux composites peuvent être schématiquement classées en : plastiques renforcés et composites volumiques.

#### **I.5.3.1 Plastiques renforcés**

Ces matériaux sont constitués de résines ou matrices dans lesquelles sont introduits des renforts de type :

- Fibres courtes.
- Billes pleines ou billes creuses.
- Poudres : métalliques, de graphite.

Les renforts permettent généralement d'augmenter le module d'élasticité d'un facteur 2 à 5. Le comportement mécanique de ces matériaux peut être homogénéisé, et son étude est ramenée à celle d'un matériau usuel isotrope.

#### **I.5.3.2 Composites volumiques**

Les composites volumiques ont été introduits pour des besoins spécifiques de l'aéronautique. Ils sont élaborés à partir de tissages volumiques (paragraphe 2.4.4.2). Ces matériaux sont très onéreux. Outre des intérêts spécifiques, ils permettent d'obtenir des caractéristiques mécaniques très élevées, avec un comportement sensiblement isotrope en volume.

## **CHAPITRE II**

### **La Théorie des Stratifiés**

## CHAPITRE II

### La Théorie des Stratifiés

#### II.1 Introduction

Au chapitre I, nous avons mis en évidence l'architecture des stratifiés qui résulte de la conception des pièces en matériaux composites :

- Suivant des plaques ou coques.
- Par stratification de couches successives.

Les notations utilisées sont reportées sur la figure (II.1) Le stratifié est constitué de  $n$  couches, numérotées de la face inférieure à la face supérieure. La surface moyenne est choisie comme plan de référence  $Oxy$  et l'axe  $\vec{oz}$  est dirigé dans le sens croissant des numéros des couches. Chaque couche  $k$  est repérée par les cotes algébriques de sa face inférieure ( $h_{k-1}$ ) et de sa face supérieure ( $h_k$ ).

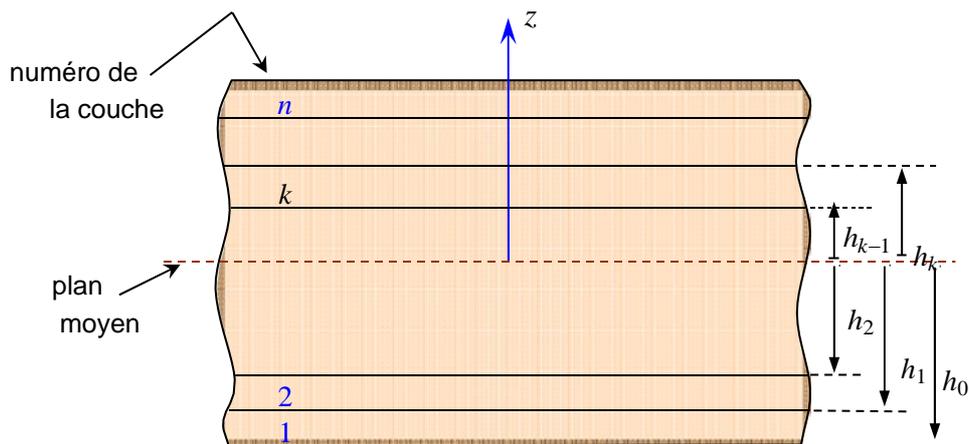


FIGURE II.1 Élément de stratifié

## II.2 CHAMP DES DÉPLACEMENTS

### II.2.1 Expressions générales

L'hypothèse de base de la théorie générale des plaques réside dans l'expression des déplacements en tout point  $M$  d'une plaque, de coordonnées  $(x, y, z)$  sous la forme de polynômes en  $z$ , généralement limités au degré 3, et de coefficients dépendant de  $(x, y)$  le champ des déplacements est alors écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, y, z) &= \mathbf{u}(x, y, \mathbf{0}) + z\boldsymbol{\varphi}_x(x, y) + z^2\Psi_x(x, y) + z^3\boldsymbol{\phi}_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v(x, y, \mathbf{0}) + z\varphi_y(x, y) + z^2\Psi_y(x, y) + z^3\phi_y(x, y) \\ \mathbf{w}(x, y, z) &= \mathbf{w}(x, y, \mathbf{0}) + z\varphi_z(x, y) + z^2\Psi_z(x, y) \end{aligned} \quad (\text{II.1})$$

Cette forme du champ des déplacements répond aux conditions de compatibilité des déformations, et permet de prendre en compte un gauchissement éventuel de la section droite des plaques lors de la déformation. Dans le cas de problèmes de dynamique, le facteur temps doit être introduit dans les relations (II.1)

Le déplacement d'un point quelconque  $M(x, y, z)$  est donc développé, suivant (II.1), en série de la variable  $z$  à coefficients en  $(x, y)$ , à partir du point de référence  $M_0(x, y, 0)$  du plan  $(Oxy)$ .

Le champ de déplacement du point  $M_0$  sera noté par la suite suivant l'une des notations :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_0(x, y, z, t) &= \mathbf{u}_0(x, y) = \mathbf{u}(x, y, \mathbf{0}) \\ v_0(x, y, z, t) &= v_0(x, y) = v(x, y, \mathbf{0}) \\ \mathbf{w}_0(x, y, z, t) &= \mathbf{w}_0(x, y) = \mathbf{w}(x, y, \mathbf{0}) \end{aligned} \quad (\text{II.2})$$

### II.2.2 Schémas du premier degré

Les schémas les plus simples et les plus utilisés (par exemple schéma de Hencky-Mindlin, schéma de Kirchhoff) pour décrire le comportement des plaques se réduisent à des schémas du premier degré de la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, y, z) &= \mathbf{u}(x, y, \mathbf{0}) + z\boldsymbol{\varphi}_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v(x, y, \mathbf{0}) + z\varphi_y(x, y) \\ \mathbf{w}(x, y, z) &= \mathbf{w}(x, y, \mathbf{0}) \end{aligned} \quad (\text{II.3})$$

$$\begin{aligned}
 \text{Où : } \quad \mathbf{u}(x, y, z) &= \mathbf{u}_0(x, y) + z\boldsymbol{\varphi}_x(x, y) \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\boldsymbol{\varphi}_y(x, y) \\
 w(x, y, z) &= w_0(x, y)
 \end{aligned} \tag{II.4}$$

## II.3 CHAMP DES DÉFORMATIONS

### II.3.1 Expressions générales

Dans le cas d'une théorie générale du troisième ordre, le champ des déformations se déduit de l'expression (II.1) du champ des déplacements. Soit :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial x} + z \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_x}{\partial x} + z^2 \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}_x}{\partial x} + z^3 \frac{\partial \boldsymbol{\phi}_x}{\partial x} \\
 \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_y}{\partial y} + z^2 \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}_y}{\partial y} + z^3 \frac{\partial \boldsymbol{\phi}_y}{\partial y} \\
 \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} = \boldsymbol{\varphi}_z(x, y) + 2z\boldsymbol{\Psi}_z(x, y)
 \end{aligned} \tag{II.5}$$

$$\gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \left( \boldsymbol{\varphi}_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + z \left( 2\boldsymbol{\Psi}_y + \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_z}{\partial y} \right) + z^2 \left( 3\boldsymbol{\phi}_y + \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}_z}{\partial y} \right)$$

$$\gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \left( \boldsymbol{\varphi}_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + z \left( 2\boldsymbol{\Psi}_x + \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_z}{\partial x} \right) + z^2 \left( 3\boldsymbol{\phi}_x + \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}_z}{\partial x} \right)$$

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left( \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + z \left( \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_x}{\partial y} + \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_y}{\partial x} \right) + z^2 \left( \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}_x}{\partial y} + \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}_y}{\partial x} \right) + z^3 \left( \frac{\partial \boldsymbol{\phi}_x}{\partial y} + \frac{\partial \boldsymbol{\phi}_y}{\partial x} \right)$$

### II.3.2 Schéma du premier degré :

Dans le cas d'un schéma du premier degré, le champ des déplacements est exprimé par les relations (II.4). Le champ des déformations se déduit alors simplement des relations (II.5) et s'écrit :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial x} + z \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_x}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_y}{\partial y}$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0$$

$$\gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (\text{II.6})$$

$$\gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}$$

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + z \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right)$$

On considère que les déformations sont nulles :  $\gamma_{yz} = \mathbf{0}$ ,  $\gamma_{xz} = \mathbf{0}$

Ce champ des déformations est celui d'un schéma du premier degré avec émet en hypothèse que le cisaillement transverse est négligé, [6]

Donc :

$$\varphi_x(x, y) = -\frac{\partial w_0}{\partial x} \quad \text{et} \quad \varphi_y(x, y) = -\frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (\text{II.7})$$

Finalement Le champ des déformations s'écrit :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (\text{II.8})$$

Le tenseur des déformations en un point M est :

$$\varepsilon(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \mathbf{0} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{II.9})$$

Le champ des déformations est la superposition :

- Des déformations en membrane :

$$\varepsilon_m(M) = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.10})$$

- Des déformations en flexion et en torsion :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_f(\mathbf{M}) = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{xx}^f \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{yy}^f \\ \boldsymbol{\gamma}_{xy}^f \end{Bmatrix} = \mathbf{z} \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = \mathbf{z} \begin{Bmatrix} \mathbf{k}_x \\ \mathbf{k}_y \\ \mathbf{k}_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.11})$$

$$\text{Avec les courbures en flexion : } \mathbf{k}_x = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}, \mathbf{k}_y = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}, \mathbf{k}_{xy} = -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \quad (\text{II.12})$$

$$\text{Il vient : } \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{M}) = \boldsymbol{\varepsilon}_m(\mathbf{M}) + \boldsymbol{\varepsilon}_f(\mathbf{M}) = \boldsymbol{\varepsilon}_m(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathbf{z}\mathbf{k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (\text{II.13})$$

## II.4 Analyse du comportement mécanique des poutres en matériaux composites

- **But de l'étude**

L'importance de développer une analyse sur le comportement en flexion des poutres est liée d'une part à l'utilisation des poutres comme éléments de base dans la réalisation des structures, et d'autre part à la caractérisation des propriétés mécaniques des matériaux stratifiés et des matériaux sandwiches à partir d'essais de flexion et de traction réalisés sur des éprouvettes en forme de poutres [8]

### II.4.1 Détermination des contraintes

Pour déterminer les contraintes dans le système de coordonnées  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  du pli, les déformations sont multipliées par la matrice  $[\mathbf{Q}]$  du pli  $\mathbf{k}$  :

$$\{\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\}_k = [\mathbf{Q}']_k \{\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\}_k \quad (\text{II.14})$$

Les déformations dans le  $k^e$  pli en fonction de la position  $z$  par rapport au plan moyen de ce pli deviennent :

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_x \\ \boldsymbol{\varepsilon}_y \\ \boldsymbol{\gamma}_{xy} \end{Bmatrix}_{(k)} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_x^0 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_y^0 \\ \boldsymbol{\gamma}_{xy}^0 \end{Bmatrix}_{(k)} + \mathbf{z} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\kappa}_x^0 \\ \boldsymbol{\kappa}_y^0 \\ \boldsymbol{\kappa}_{xy}^0 \end{Bmatrix}_{(k)} \quad (\text{II.15})$$

D'où les contraintes dans le  $k^e$  pli sont :

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_x \\ \boldsymbol{\sigma}_y \\ \boldsymbol{\tau}_{xy} \end{Bmatrix}_k = [\mathbf{Q}']_k \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_x^0 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_y^0 \\ \boldsymbol{\gamma}_{xy}^0 \end{Bmatrix}_{(k)} + [\mathbf{Q}']_k \mathbf{z} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\kappa}_x \\ \boldsymbol{\kappa}_y \\ \boldsymbol{\kappa}_{xy} \end{Bmatrix}_{(k)} \quad (\text{II.16})$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{Q}'_k \boldsymbol{\varepsilon}_m(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathbf{Q}'_k \mathbf{z} \mathbf{k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (\text{II.17})$$

## II.5 RÉSULTANTES ET MOMENTS

### II.5.1 Résultantes en membrane

Le champ des résultantes en membrane, noté  $N(x, y)$ , est défini par :

$$N(x, y) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_k(M) dz \quad (\text{II.18})$$

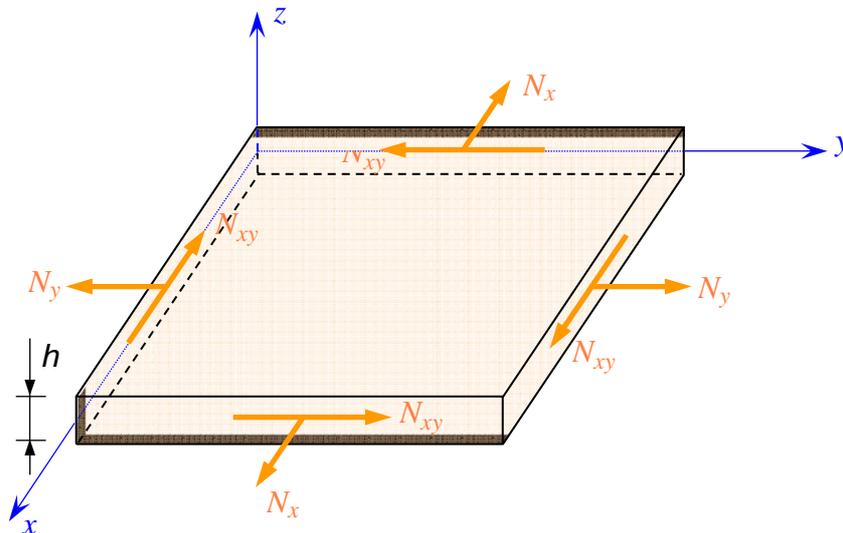
Où  $\sigma_k(M)$  est la matrice des contraintes en membrane  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{xy}$  dans la couche.

Soit :

$$N(x, y) = \begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{pmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} dz \quad (\text{II.19})$$

$$\text{Avec : } \sigma_k(M) = \sigma_k(x, y, z) = Q'_k \varepsilon_m(x, y) + z Q'_k k(x, y) \quad (\text{II.20})$$

Les composantes  $N_x$ ,  $N_y$ ,  $N_{xy}$  sont les résultantes, par unité de longueur de plaque, respectivement des contraintes normales (suivant  $x$  et suivant  $y$ ) et des contraintes de cisaillement, dans le plan  $(x, y)$ . Elles sont schématisées symboliquement sur la figure (II.2) [6]



**FIGURE II.2** Schématisation des résultantes en membrane des actions exercées sur un élément de stratifié.

La discontinuité des contraintes en passant d'une couche à l'autre conduit à réécrire la relation (II.19) sous la forme :

$$N(x, y) = \begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix}_k dz \quad (\text{II.21})$$

En introduisant l'expression (II.20) dans l'expression (II.18) :

$$N(x, y) = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} [Q'_k \varepsilon_m(x, y) + z Q'_k k(x, y)] dz$$

$$\text{Soit : } N(x, y) = \sum_{k=1}^n [Q'_k \varepsilon_m(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} dz + Q'_k k(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz]$$

Avec l'intégrale dans l'épaisseur on trouve :

$$N(x, y) = \left[ \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) Q'_k \right] \varepsilon_m(x, y) + \frac{1}{2} \left[ \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) Q'_k \right] k(x, y)$$

Avec les matrices :

$$A = \left[ \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) Q'_k \right]$$

$$\text{Tel que : } A = [A_{ij}] = \left[ \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) Q'_{ij} \right]_k \quad (\text{II.22})$$

$$B = \frac{1}{2} \left[ \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) Q'_k \right]$$

$$\text{Tel que : } B = [B_{ij}] = \frac{1}{2} \left[ \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) (Q'_{ij})_k \right] \quad (\text{II.23})$$

$$(i, j) = (x, y)$$

L'expression de la matrice des résultantes peut finalement s'écrire sous la forme :

$$N(x, y) = A \varepsilon_m(x, y) + B k(x, y) \quad (\text{II.24})$$

## II.5.2 Moments de flexion et de torsion

Les relations fondamentales des stratifiés font également intervenir les moments résultants des contraintes exercées sur un élément du stratifié.

Les moments de flexion et de torsion sont définis par :

$$\mathbf{M}_f(x, y) = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} z \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix}_k dz \quad (\text{II.25})$$

Les composantes  $M_x$  et  $M_y$  sont les moments de flexion suivant les directions  $x$  et  $y$  respectivement, et la composante  $M_{xy}$  est le moment de torsion. Ces composantes sont schématisées sur la figure (II.3) [6].

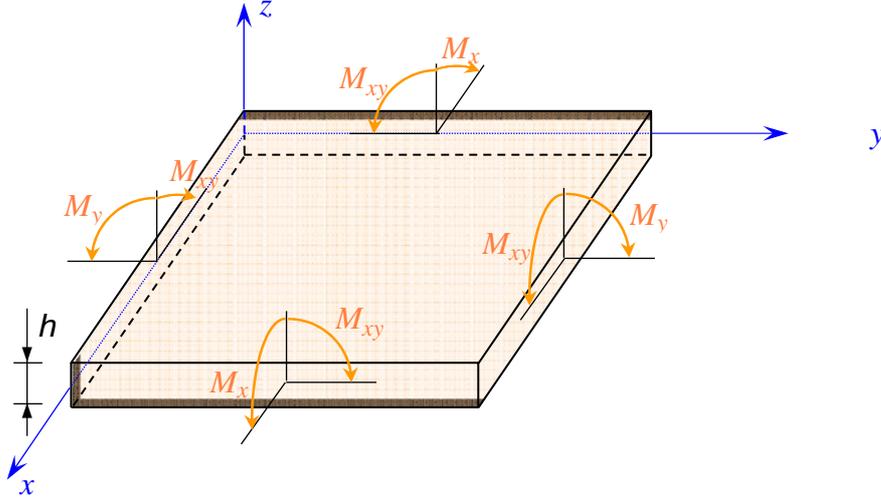


FIGURE II.3 Schématisation des moments de flexion et de torsion.

En introduisant l'expression (II.20) dans l'expression (II.25) :

$$\mathbf{M}_f(x, y) = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} [z \mathbf{Q}'_k \boldsymbol{\varepsilon}_m(x, y) + z^2 \mathbf{Q}'_k \mathbf{k}(x, y)] dz$$

Avec l'intégrale on trouve :

$$\mathbf{M}_f(x, y) = \left[ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) \mathbf{Q}'_k \right] \boldsymbol{\varepsilon}_m(x, y) + \frac{1}{3} \left[ \sum_{k=1}^n (h_k^3 - h_{k-1}^3) \mathbf{Q}'_k \right] \mathbf{k}(x, y)$$

Avec les matrices :

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2} \left[ \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) \mathbf{Q}'_k \right] \text{ tel que : } \mathbf{B} = [\mathbf{B}_{ij}] = \frac{1}{2} \left[ \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) (\mathbf{Q}'_{ij})_k \right] \quad (\text{II.26})$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{3} \left[ \sum_{k=1}^n (h_k^3 - h_{k-1}^3) \mathbf{Q}'_k \right] \text{ tel que : } \mathbf{D} = [\mathbf{D}_{ij}] = \frac{1}{3} \left[ \sum_{k=1}^n (h_k^3 - h_{k-1}^3) (\mathbf{Q}'_{ij})_k \right] \quad (\text{II.27})$$

L'expression de la matrice des moments peut finalement s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{M}_f(x, y) = \mathbf{B} \boldsymbol{\varepsilon}_m(x, y) + \mathbf{D} \mathbf{k}(x, y) \quad (\text{II.28})$$

La relation reliant les déformations du plan moyen d'un pli stratifié en fonction des forces et des moments appliqués sur ce plan moyen est donnée à l'équation suivante : [8]

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{Bmatrix}_{(k)} = [E]^{-1} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = [ABD]^{-1} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.29})$$

Où matrice  $[ABD]^{-1}$  de dimensions  $6 \times 6$  est l'inverse de la matrice  $[ABD]$ , qui représente le regroupement des matrices  $[A]$ ,  $[B]$  et  $[D]$ .

$$[E]^{-1} = [ABD]^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & | & \mathbf{B} \\ \hline - & | & - \\ \mathbf{B} & | & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} \quad (\text{II.30})$$

La matrice  $[A]$  est appelée matrice de rigidité en membrane, donnée par :

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \quad [A_{ij}] = [\sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1})(Q'_{ij})_k] \quad (\text{II.31})$$

La matrice  $[B]$  est appelée matrice de couplage membrane-flexion, donnée par :

$$[B] = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \quad [B_{ij}] = \frac{1}{2} [\sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2)(Q'_{ij})_k] \quad (\text{II.32})$$

La matrice  $[D]$  est appelée matrice de rigidité en flexion, donnée par :

$$[D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \quad [D_{ij}] = \frac{1}{3} [\sum_{k=1}^n (h_k^3 - h_{k-1}^3)(Q'_{ij})_k] \quad (\text{II.33})$$

$$[ABD]^{-1} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \end{bmatrix}^{-1} \quad (\text{II.34})$$

La matrice  $Q'$  est déduite par intermédiaire de la matrice de rigidité dans le repère local  $Q$  en tenant compte de la rotation des axes avec un angle  $\theta$  [Figure (II.4)]. L'angle de rotation des systèmes d'axes  $\theta$  est considéré comme positif lorsqu'il faut tourner dans le sens trigonométrique pour passer de l'axe  $1$  vers l'axe  $x$

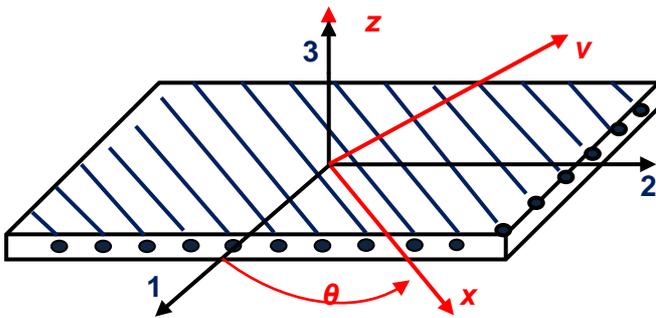


FIGURE II.4 Élément de composite et orientation des fibres

Les équations de transformation relatives aux déformations sont tout à fait similaires à celles des contraintes :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \frac{\gamma_{12}}{2} \end{Bmatrix} = [T(\theta)] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.35})$$

Où  $[T]$  est la matrice de changement de repère :

$$[T(\theta)] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \cos \theta \sin \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \cos \theta \sin \theta \\ -\cos \theta \sin \theta & \cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \text{ Matrice bijective} \quad (\text{II.36})$$

$$[T(\theta)]^{-1} = [T(\theta)]^T$$

La matrice  $Q'$  est calculée comme suit :

$$[Q'] = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix} = [T(\theta)]^{-1} \times [Q] \times [T(\theta)] = [T(\theta)]^T \times [Q] \times [T(\theta)] \quad (\text{II.37})$$

$$[T(\theta)]^T = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \cos \theta \sin \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \cos \theta \sin \theta \\ -\cos \theta \sin \theta & \cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ 2 \cos \theta \sin \theta & -2 \cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (\text{II.38})$$

L'état complet de contraintes dans le repère local (1,2) d'un pli est représenté par la Figure (II.5). Ainsi les propriétés mécaniques du pli ont été mesurées dans ce repère local.

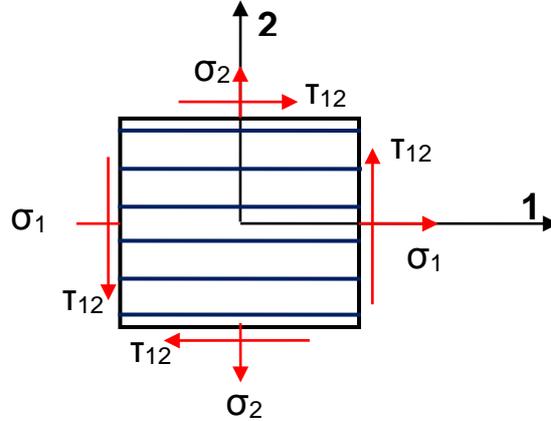


FIGURE II.5 Etat complet de contraintes dans le repère local

Les relations entre les contraintes et les déformations d'un pli soumis à un état complet de Contraintes dans le repère local (1,2), sont définies par l'équation suivante :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_6 = \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.39})$$

Pour un matériau orthotrope soumis à un état plan de contrainte, on obtient :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.40})$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.41})$$

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}^{-1} \quad (\text{II.42})$$

Où :  $S_{11} = \frac{1}{E_1}$ ,  $S_{22} = \frac{1}{E_2}$ ,  $S_{12} = S_{21} = -\frac{\nu_{21}}{E_2} = -\frac{\nu_{12}}{E_1}$ ,  $S_{66} = \frac{1}{G_{12}}$

$[Q'] =$

$$\begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \cos \theta \sin \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \cos \theta \sin \theta \\ -\cos \theta \sin \theta & \cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ 2 \cos \theta \sin \theta & -2 \cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix}$$

Les éléments de la matrice sont déterminés par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} Q'_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta \\ Q'_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + Q_{12}(\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) \\ Q'_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta \\ Q'_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \cos^3 \theta \sin \theta - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66}) \cos \theta \sin^3 \theta \\ Q'_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \cos \theta \sin^3 \theta - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66}) \cos^3 \theta \sin \theta \\ Q'_{66} &= (Q_{11} + Q_{12} - 2Q_{22} - 2Q_{66}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + Q_{66}(\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) \end{aligned} \quad (\text{II.43})$$

## II.6 Calcul des contraintes

### II.6.1 Calcul des contraintes dans le cas traction-compression

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k = [Q']_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix}_{(k)} \rightarrow \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix}_{(k)} = [A]^{-1} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = [A]^{-1} \begin{Bmatrix} N_x \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.44})$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k = [Q']_k [A]^{-1} \begin{Bmatrix} N_x \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.45})$$

### II.6.2 Calcul des contraintes dans le cas flexion pure

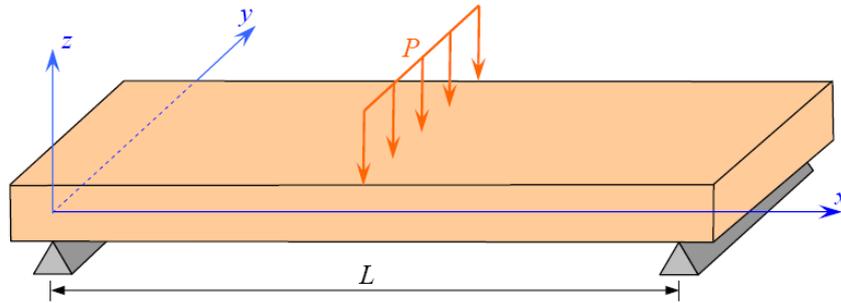


FIGURE II.6 Sollicitation d'une poutre en flexion 3-points

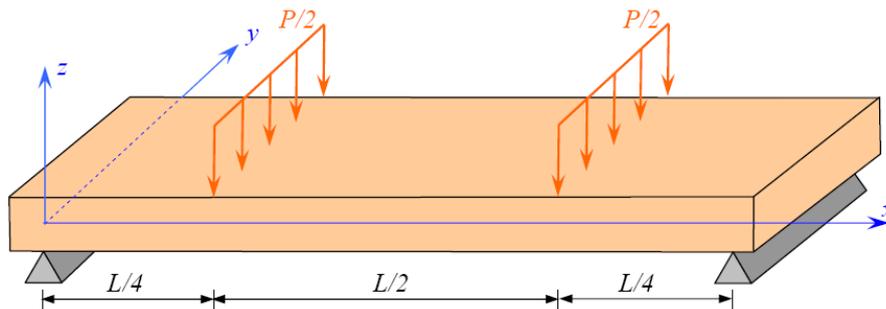


FIGURE II.7 Sollicitation d'une poutre en flexion 4-points.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k = [Q']_k z_k \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}_{(k)} \rightarrow \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}_{(k)} = [D]^{-1} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = [D]^{-1} \begin{Bmatrix} M_x \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.46})$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k = [Q']_k z_k [D]^{-1} \begin{Bmatrix} M_x \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.47})$$

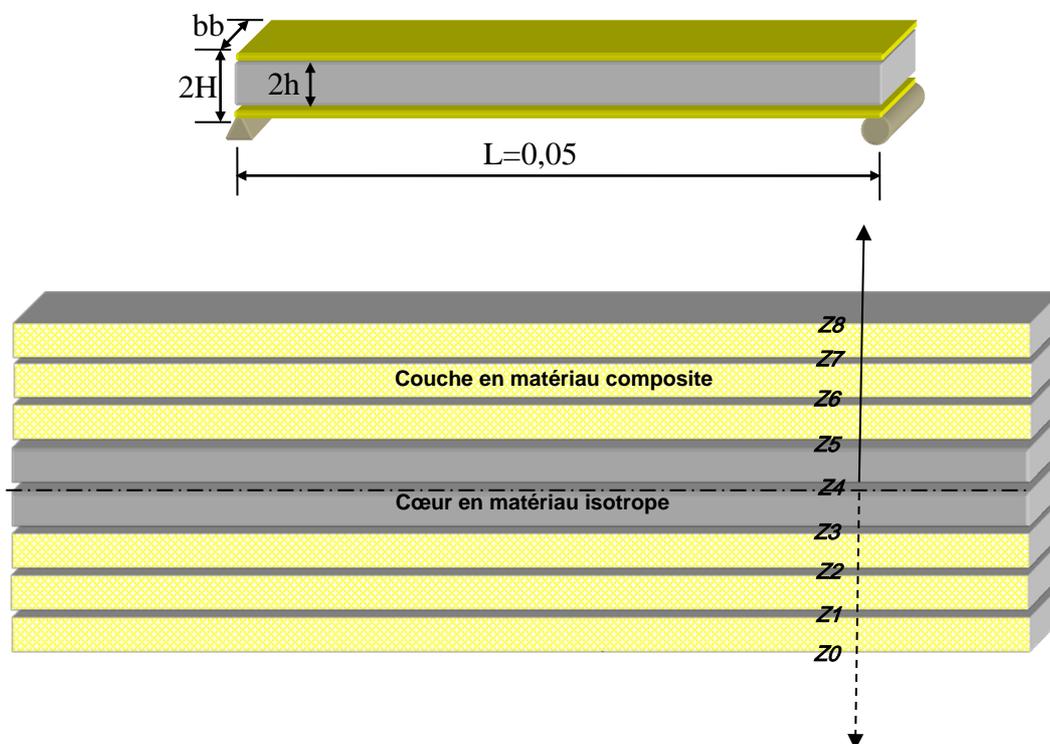
### II.6.3 Calcul des contraintes dans le cas flexion + traction

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k = [Q']_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix}_{(k)} + [Q']_k z_k \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (II.48)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k = [Q']_k [A]^{-1} \begin{Bmatrix} N_x \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + [Q']_k z_k [D]^{-1} \begin{Bmatrix} M_x \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (II.49)$$

### II.7 Application

Le premier est une poutre isotrope en acier et les deux autres modèles de poutres composites sont en verre/époxyde et carbone/époxyde., Ces deux modèles poutres composites sont à huit couches composites stratifiées avec différentes orientations. Le module de Young ( $E$ ) et la masse volumique ( $\rho$ ) sont les caractéristiques propres au matériau. La section ( $A$ ), le moment quadratique ( $I$ ), la largeur ( $b$ ), la hauteur ( $2H$ ) et la longueur de la poutre ( $L$ ) sont les paramètres géométriques à prendre en compte pour la résolution du problème. Considérons une poutre composite multicouche sur deux appuis simples fig.II.8.

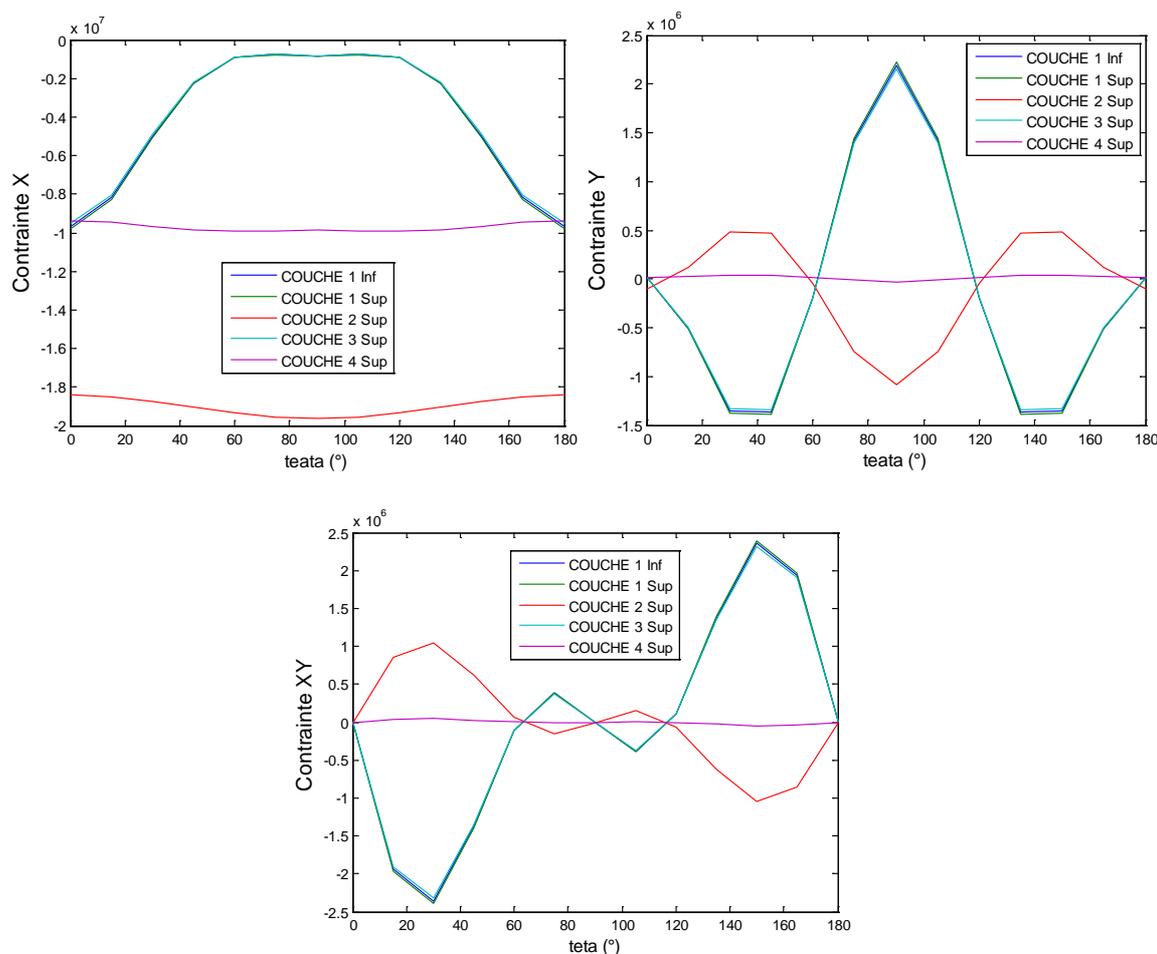


**Fig.II.8** Poutre en matériaux composite

Notre travail est basé sur l'étude des comportements mécanique à deux appuis, avec ces

différentes configurations de longueur **0.5 m** et de largeur **0.05 m** et hauteur de **0.008 m**. Les propriétés mécaniques de l'acier sont :  $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$ ,  $E = 206 \text{ GPa}$  et  $\nu = 0.3$ . Les propriétés mécaniques du matériau composite carbone/époxyde sont :  $\rho = 1580 \text{ kg/m}^3$ ,  $E_x = 147 \text{ GPa}$ ,  $E_y = E_z = 9 \text{ GPa}$ ,  $G_{xz} = 0.3 \text{ GPa}$ ,  $G_{xy} = G_{yz} = 5 \text{ GPa}$ ,  $\nu_{xy} = 0.3$ ,  $\nu_{yz} = \nu_{xz} = 0.4$ .

Les figures II.9 représentent les contraintes  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  et  $\tau_{xy}$ , des cinq couches des poutres stratifiées renforcées en composite carbone/époxyde avec un taux de renforcement de 5%.



**Fig.II.9** Contraintes normales  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  et  $\tau_{xy}$  des cinq couches des poutres stratifiées renforcées en composite carbone/époxyde avec un taux de renforcement de 5%.  
 RENFORCEMENT = 5%    2H=hcomp = 2.0000e-04    2h=hacier = 0.0038

Pour les angles d'orientation des fibres ( $\theta = 60^\circ$  jusqu'à  $\theta = 120^\circ$ ) on obtient la contrainte minimale dans les couches 1 (inférieure et supérieure) et la couche 3.

La contrainte dans la couche 4 est plus grand  $\sigma_x = -0,9 * 10^7 \text{ pa}$  au sens négatif. La contrainte dans la couche 2 est maximale  $\sigma_x = -1,9 * 10^7 \text{ pa}$  au sens négatif.

Pour l'angle de l'orientation des fibres ( $\theta = 90^\circ$ ) on obtient la contrainte maximale au sens positif dans les couches 1 (inférieure et supérieure) et la couche 3,  $\sigma_y = 2,4 * 10^6 \text{ pa}$ .

Pour l'angle de l'orientation des fibres ( $\theta = 30^\circ$  jusqu'à  $45^\circ$ ) et ( $\theta = 135^\circ$  jusqu'à  $150^\circ$ ), On obtient la contrainte maximale au sens négatif en la couche 1

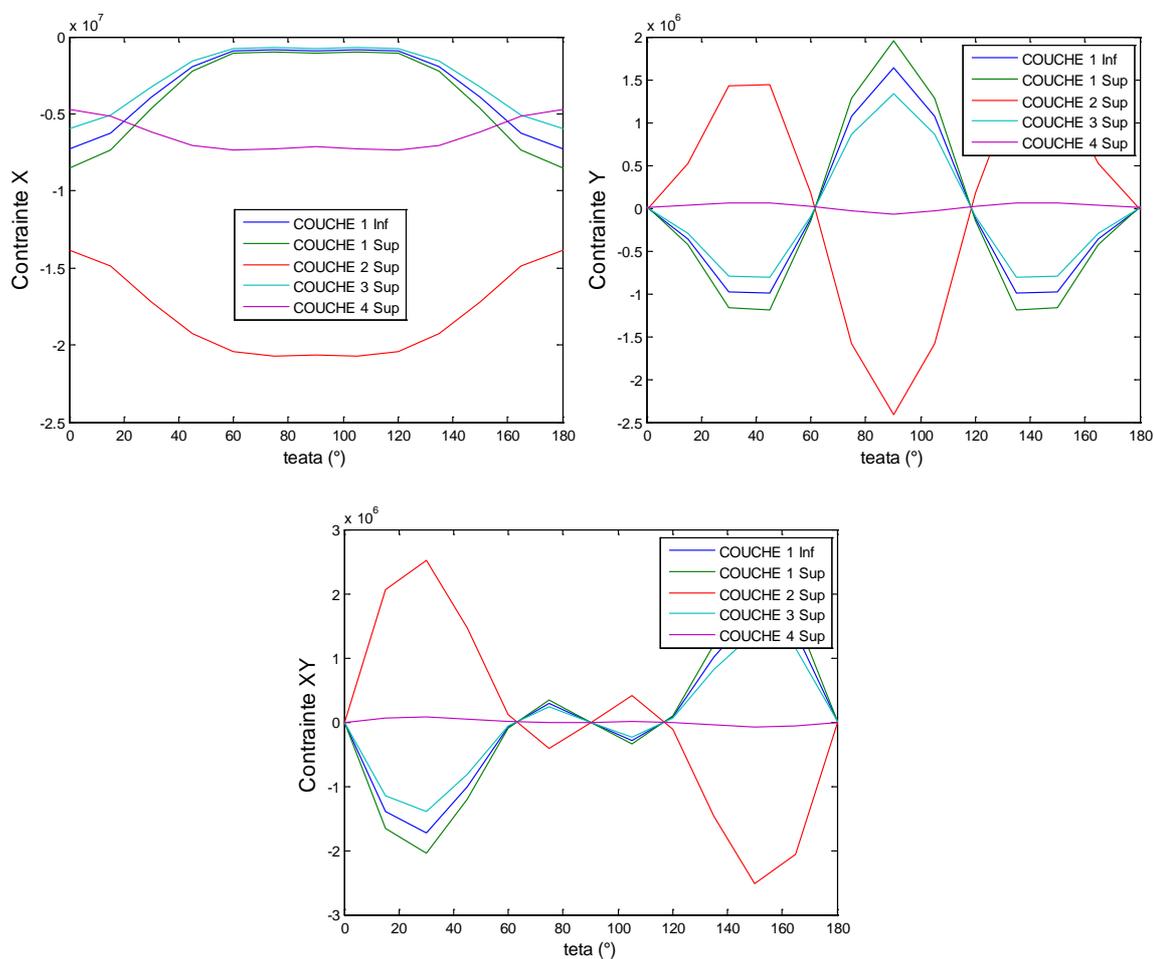
(inférieure et supérieure) et la couche 3,  $\sigma_y = -1,4 * 10^6 pa$ .

Pour l'angle de l'orientation des fibres ( $\theta = 0^0$ ), ( $\theta = 60^0$ ), ( $\theta = 120^0$ ) et ( $\theta = 180^0$ )  
 Les contraintes en la couche 1 (inférieure et supérieure), la couche 3 et la couche 2, sont nulles.

La contrainte en la couche 4 est nulle,  $\sigma_y = 0$ .

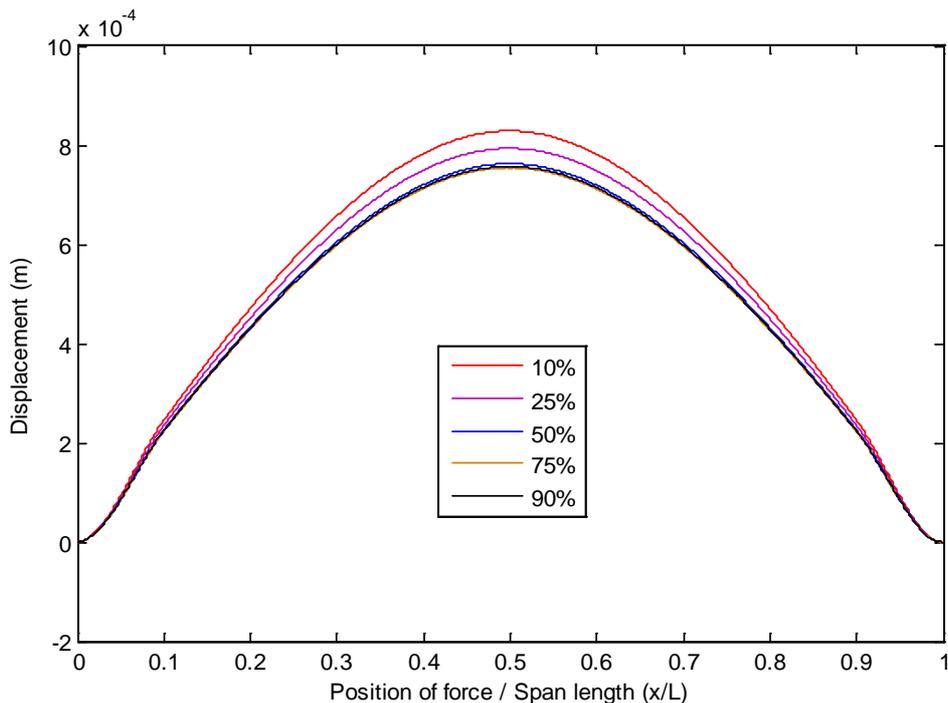
La contrainte en la couche 2 est la contrainte la plus petite au cœur de matériaux composites suivant y :  $\sigma_y = -0,1 * 10^7 pa$  au sens négatif et  $\sigma_y = 0,5 * 10^6 pa$  au sens positif.

Les figures II.10 représentent les contraintes  $\sigma_x$ ,  $\sigma_x$  et  $\tau_{xy}$ , des cinq couches des poutres statifiées renforcées en composite carbone/époxyde avec et un taux de renforcement de 50 %.



**Fig.II.10** Contraintes normales  $\sigma_x$ ,  $\sigma_x$  et  $\tau_{xy}$  des cinq couches des poutres statifiées renforcées en composite carbone/époxyde avec et un taux de renforcement de 50%.  
 RENFORCEMENT = 50% hcomp = 2.0000e-04 hacier = 0.0038

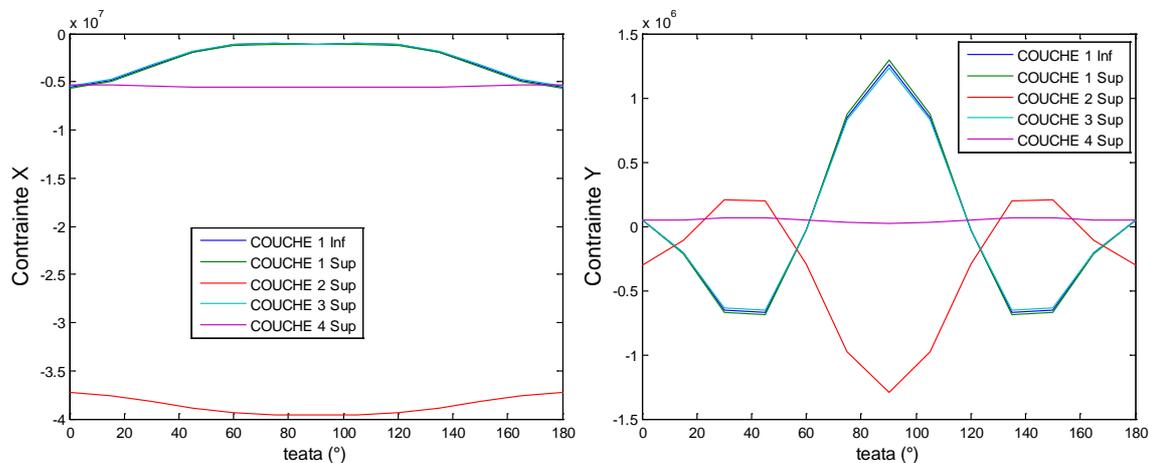
Les figures II.11 représentent les déplacements, des cinq couches des poutres statifiées renforcées en composite carbone/époxyde avec un angle d'orientation  $0^0$  et un taux de renforcement de 10 %.

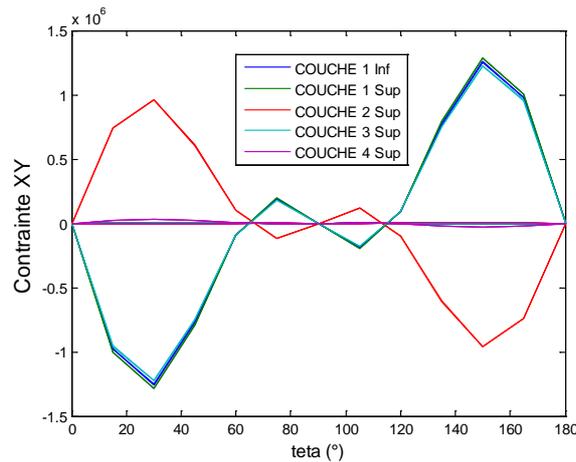


**Fig.II.11** Déplacements, des cinq couches des poutres statifiées renforcées en composite carbone/époxyde avec un angle d'orientation  $0^\circ$  et un taux de renforcement de 10 %.  
 RENFORCEMENT = 50% hcomp = 2.0000e-04 hacier = 0.0038

La flèche est maximale pour le renforcement de 10%, et le déplacement maximal =  $8 * 10^{-4}m$ . La flèche est minimale pour le renforcement de 50% et le déplacement =  $7.1 * 10^{-4}m$ .

Les figures II.12 représentent les contraintes  $\sigma_x$ ,  $\sigma_x$  et  $\tau_{xy}$ , des cinq couches des poutres statifiées renforcées en composite verre/époxyde avec un taux de renforcement de 50 %.





**Fig.II.12** Contraintes normales  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  et  $\tau_{xy}$  des cinq couches des poutres statifiées renforcées en composite verre/époxyde avec un taux de renforcement de 50 %  
 RENFORCEMENT = 50% hcomp = 2.0000e-04 hacier = 0.0038

La contrainte dans la couche 4 est plus grande  $\sigma_x = -0,5 * 10^7 pa$  au sens négatif. La contrainte dans la couche 2 est maximale  $\sigma_x = -3,9 * 10^7 pa$  au sens négatif. La contrainte en la couche 1 (inférieure et supérieure) et la couche 3 est la plus petite (Minimale) au cœur de matériaux composites suivant  $x$  :  $\sigma_x = -0,1 * 10^7 pa$  au sens négatif. Pour l'angle d'orientation des fibres ( $\theta = 90^0$ ) on obtient la contrainte maximale au sens positif dans la couche 1 (inférieure et supérieure),  $\sigma_y = 1,4 * 10^6 pa$ . La contrainte en la couche 4 est nulle,  $\sigma_y = 0$ . Pour l'angle d'orientation des fibres ( $\theta = 150^0$ ) on obtient la contrainte maximale au sens positif en la couche 1 (inférieure et supérieure),  $\tau_{xy} = 1,3 * 10^6 pa$ . La contrainte dans la couche 4 est nulle,  $\tau_{xy} = 0$ . La contrainte dans la couche 2 est la contrainte la plus petite au cœur de matériaux composites suivant  $xy$  :  $\sigma_{xy} = -0,2 * 10^6 pa$  au sens négatif et  $\sigma_{xy} = 0,15 * 10^6 pa$  au sens positif.

## **CHAPITRE III**

### **Vibration des poutres stratifiées**

### **Chapitre III**

#### **Vibration des poutres stratifiées**

##### **III.1 Introduction**

Dans le cas où le temps est pris en compte, le champ général des déplacements en un point  $(x, y, z)$  à l'instant  $t$  s'écrit pour un schéma du premier ordre sous la forme :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) + z\varphi_x(x, y, t) \\
 v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) + z\varphi_y(x, y, t) \\
 w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t)
 \end{aligned}
 \tag{III.1}$$

Les fonctions  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $w_0$ ,  $\varphi_x$  et  $\varphi_y$  sont solutions des relations fondamentales. En l'absence de cisaillement transverse, les fonctions  $\varphi_x$  et  $\varphi_y$  s'expriment en fonction de  $w_0$ , et le champ des déplacements est entièrement déterminé par la connaissance des fonctions  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $w_0$ , l'analyse de la vibration consiste d'abord à rechercher les fréquences propres de vibration. Cette recherche s'effectue généralement en exprimant, par exemple en absence de cisaillement transverse, le champ des déplacements sous la forme :

$$\begin{aligned}
 u_0(x, y, t) &= u_0(x, y)e^{i\omega t} \\
 v_0(x, y, t) &= v_0(x, y)e^{i\omega t} \\
 w_0(x, y, t) &= w_0(x, y)e^{i\omega t}
 \end{aligned}
 \tag{III.2}$$

Où  $\omega$  est la fréquence de vibration. La détermination des fréquences propres est obtenue ensuite en reportant ces expressions dans les relations fondamentales.[6].

##### **III.2 VIBRATION DES POUTRES**

###### **III.2.1 Équation générale**

Dans le cas d'une poutre soumise à une compression, la relation fondamentale des vibrations est donnée par les expressions :

L'équation de la théorie des poutres est :

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + N_x^i \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \quad (\text{III.3})$$

Dans le cas de la flexion d'une poutre constitué d'un matériau stratifié, il est usuel d'écrire

$$: \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = -\frac{M}{E_x I} = -b \frac{M_x}{E_x I} \quad \rightarrow \quad M_x = -\frac{E_x I}{b} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \quad (\text{III.4})$$

Avec le moment quadratique  $I$  de la section droite de la poutre par rapport au plan  $(x, y)$

$$I = I_{xy} = \frac{bh^3}{12}$$

Le moment  $M$  de flexion :  $M = bM_x$  et  $E_x$  est le module de la poutre

On introduire le moment et le module de la poutre dans l'expression (III.3) s'écrit :

$$-\frac{E_x I}{b} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + N_x^i \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \quad (\text{III.5})$$

Dans notre cas la poutre soumise à une compression uniforme  $N_x^i = -N_0$  ou en introduisant

le moment quadratique  $I$  dans l'équation (III.5) se met sous la forme :

$$-\frac{E_x h^3}{12} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} - N_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + \frac{12}{E_x h^3} (N_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}) = 0 \quad (\text{III.6})$$

La théorie des poutres fait l'hypothèse supplémentaire que la flèche n'est fonctionnée que de

$$x : w_0 = w_0(x)$$

L'équation aux fréquences propres est obtenue en écrivant  $w_0$  sous la forme habituelle :

$$w_0(x, t) = w_0(x) e^{i\omega t} \quad (\text{III.7})$$

On dérive l'expression (III.7) par rapport le temps et en reportant dans (III.6), nous obtenons :

$$\frac{d^4 w_0}{dx^4} + \frac{12}{E_x h^3} (N_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - \rho_s \omega^2 w_0) = 0 \quad (\text{III.8})$$

### III.2.2 Poutre en appuis simples

Pour une poutre en appuis simples, les conditions aux frontières sont :

$$\text{Appui } x = 0 : \quad w_0(0) = 0, \quad M(0) = 0 \quad (\text{III.9})$$

$$\text{Appui } x = L : \quad w_0(L) = 0, \quad M(L) = 0 \quad (\text{III.10})$$

Une solution de l'équation (III.8), satisfaisant aux conditions aux frontières, est de la forme :

$$w_0(x) = C_m \sin m\pi \frac{x}{a}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{III.11})$$

En reportant l'expression (III.11) dans (III.8), il vient :

$$\left[ \frac{m^4 \pi^4}{L^4} - \frac{12}{E_s h^3} \left( \frac{m^2 \pi^2}{L^2} N_0 + \rho_s \omega^2 \right) \right] C_m = 0 \quad (\text{III.12})$$

Il y'a une solution non nulle seulement ou le coefficient  $C_m = 0$

$$\left[ \frac{m^4 \pi^4}{L^4} - \frac{12}{E_s h^3} \left( \frac{m^2 \pi^2}{L^2} N_0 + \rho_s \omega^2 \right) \right] = 0$$

$$\omega_m = \frac{m\pi}{L} \sqrt{\frac{1}{\rho_s} \left( \frac{m^2 \pi^2 E_s h^3}{L^2} - N_0 \right)}, \quad N_0 > 0 \quad (\text{III.13})$$

Si :  $N_0 = 0$  l'expression (II.13) se réduit à :

$$\omega_m = \frac{m^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{E_s h^3}{12 \rho_s}} \quad (\text{III.14})$$

Dans le cas d'une compression initiale  $-N_0 < N_{critique}$

Donc ( $m = 1$ ) la fréquence fondamentale égale :

$$\omega_1 = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{1}{\rho_s} \left( \frac{\pi^2 E_s h^3}{L^2} - N_0 \right)} \quad \text{Avec : } 0 \leq N_0 \leq \frac{\pi^2 E_s h^3}{L^2} \quad (\text{III.15})$$

Dans le cas de traction  $+N_0$  les fréquences propres égalent :

$$\omega_m = \frac{m\pi}{L} \sqrt{\frac{1}{\rho_s} \left( \frac{m^2 \pi^2 E_s h^3}{L^2} + N_0 \right)} \quad N_0 > 0 \quad (\text{III.16})$$

En la présence d'une charge de traction, les valeurs des fréquences propres augmentent.

### III.2.3 Poutre encastree

Pour une poutre encastree aux extremités, les conditions aux frontières sont :

$$\text{Extrémités } x = 0 : \quad w_0(0) = 0, \quad \frac{dw_0}{dx}(0) = 0 \quad (\text{III.17})$$

$$\text{Extrémités } x = L : \quad w_0(L) = 0, \quad \frac{dw_0}{dx}(L) = 0 \quad (\text{III.18})$$

Une solution de l'équation (III.8), satisfaisant aux conditions aux frontières, est de la forme :

$$w_0(x) = C_m X_m(x), \quad m = 1, 2, 3 \dots \quad (\text{III.19})$$

Où :  $X_m(x)$  s'exprime suivant :

$$X_m(x) = \cos\lambda_m \frac{x}{L} - \cosh\lambda_m \frac{x}{L} - \gamma_m \left( \sin\lambda_m \frac{x}{L} - \sinh\lambda_m \frac{x}{L} \right) \quad (\text{III.20})$$

Avec les valeurs des constantes  $\lambda_m$  et  $\gamma_m$  de la fonction poutre encastree aux extremités suivant tableaux (III.1) :

Avec :  $(\cos^2\lambda_m + \sin^2\lambda_m = 1)$ ,  $(\cos^2\lambda_m - \sin^2\lambda_m = 1)$

Et :  $(\cos\lambda_m \cosh\lambda_m = 1)$  ,  $(\gamma_m = \frac{\cos\lambda_m - \cosh\lambda_m}{\sin\lambda_m - \sinh\lambda_m})$

$$\lambda_m = (m + 0,5)\pi$$

$m$	$\lambda_m$	$\gamma_m$
1	4,7300408	0,98250222
2	7,8532046	1,00077731
3	10,9956078	0,99996645
4	14,1371655	1,00000145
5	17,2787596	0,99999994
6	20,4203522	1
7	23,5619449	1
8	26,7035376	1

**Tableau III.1** les valeurs des constantes  $\lambda_m$  et  $\gamma_m$  de poutre encastree aux extremités

En reportant l'expression (III.19) dans (III.8) avec l'absence de charge initiale en membrane  $N_0 = 0$  , il vient :

$$\left( \frac{\lambda_m^4}{L^4} - \frac{12}{E_s h^3} \rho_s \omega^2 \right) C_m X_m(x) = 0 \quad (\text{III.21})$$

Il y'a une solution non nulle ou le coefficient  $C_m = 0$  les fréquences propres de vibration

égale :  $\omega_m = \frac{\lambda_m^2}{L^2} \sqrt{\frac{E_s h^3}{12\rho_s}}$  (III.22)

Où :  $\omega_1 = \frac{22,37328}{L^2} \sqrt{\frac{E_s h^3}{12\rho_s}}$  (III.23)

Donc :  $\omega_0 = \sqrt{\frac{E_s h^3}{12\rho_s L^4}}$  (III.24)

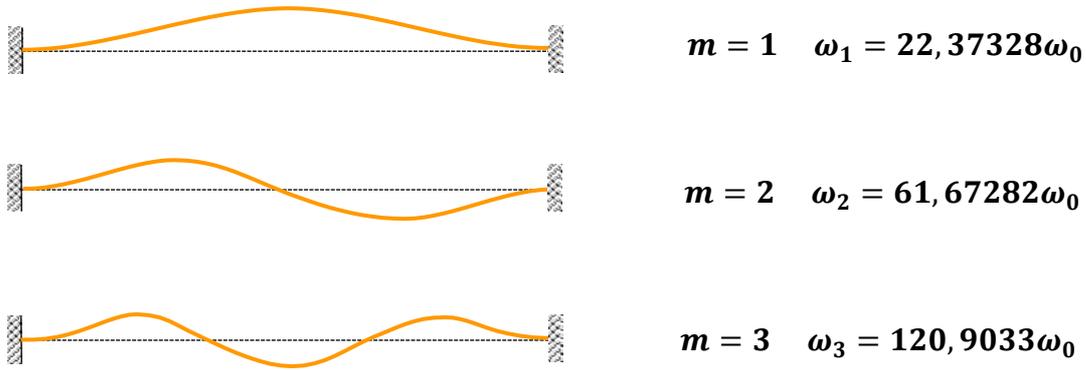


FIGURE III.1 Vibration d'une poutre encastree [6].

La déformée obtenue par la relation (III.19) est reportée sur la figure (III.1) pour  $m = 1, 2, 3$

La valeur de l'amplitude  $C_m$  des vibrations dépend de la déformation initiale imposée.

### III.2.4 Poutre encastree à une extrémité et en appui simple à l'autre

Pour une poutre encastree à une extrémité et en appui simple à l'autre, les conditions aux frontières sont :

$$\text{Extrémités } x = 0 : \quad w_0(0) = 0, \quad \frac{dw_0}{dx}(0) = 0 \quad (\text{III.25})$$

$$\text{Extrémités } x = L : \quad w_0(L) = 0, \quad M(L) = 0 \quad (\text{III.26})$$

$$\text{D'après (II.25) : } \quad \left( \frac{d^2 w_0}{dx^2} = -\frac{M}{E_x I} \right)$$

$$\text{La condition imposée sur le moment est équivalente à : } \left[ \frac{d^2 w_0}{dx^2}(L) = 0 \right] \quad (\text{III.27})$$

Nous exprimons la flèche sous la forme introduite en (II.40)

$$w_0(x) = C_m X_m(x), \quad m = 1, 2, 3 \dots$$

$$\text{Où : } X_m(x) = \cos \lambda_m \frac{x}{L} - \cosh \lambda_m \frac{x}{L} - \gamma_m \left( \sin \lambda_m \frac{x}{L} - \sinh \lambda_m \frac{x}{L} \right)$$

Ces fonctions ou  $x = 0$ , il reste à vérifier les conditions :

$$X_m(L) = 0 \quad \frac{d^2 X_m}{dx^2}(L) = 0 \quad (\text{III.28})$$

$$\cos\lambda_m - \cosh\lambda_m - \gamma_m(\sin\lambda_m - \sinh\lambda_m) = 0 \quad (\text{III.29})$$

$$\cos\lambda_m + \cosh\lambda_m - \gamma_m(\sin\lambda_m + \sinh\lambda_m) = 0$$

$$\cos\lambda_m - \cosh\lambda_m = \gamma_m(\sin\lambda_m - \sinh\lambda_m) = 0$$

$$\cos\lambda_m + \cosh\lambda_m = \gamma_m(\sin\lambda_m + \sinh\lambda_m) = 0$$

$$\frac{\cos\lambda_m - \cosh\lambda_m}{\sin\lambda_m - \sinh\lambda_m} = \frac{\cos\lambda_m + \cosh\lambda_m}{\sin\lambda_m + \sinh\lambda_m} = \gamma_m \text{ Lorsque : } \gamma_m \neq 0 \quad (\text{III.30})$$

Les valeurs de  $\gamma_m$  en pratique =1

Et il noter que des valeurs assez élevées de  $\gamma_m$  :

$$\tan\lambda_m = \tanh\lambda_m = 1 \quad (\text{III.31})$$

$$\text{Les solutions de cette équation sont : } \lambda_m = (m + 0,25)\pi \quad (\text{III.32})$$

Avec l'équation (III.32) les trois premières solutions sont reportées dans le tableau (III.2) :

$m$	1	2	3
$\lambda$	3,92699	7,06858	10,21017

**Tableau III.2** Coefficient  $\lambda_m$  de la fonction poutre encastree à une extrémité et en appui simple à l'autre

Les fréquences propres des vibrations sont obtenues en reportant (III.19) en (III.8)

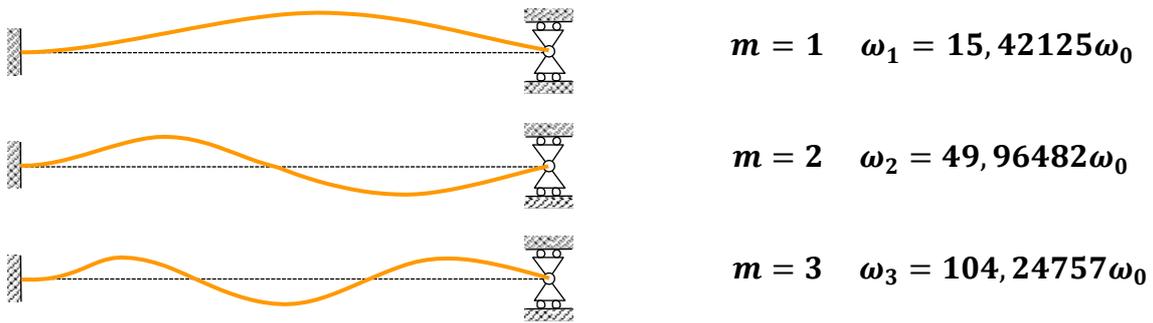
$$\text{Avec } N_0 = 0 \text{ l'expression obtenue est : } \omega_m = \frac{\lambda_m^2}{L^2} \sqrt{\frac{E_s h^3}{12\rho_s}} \quad (\text{III.33})$$

Par exemple ou ( $m = 2$  ,  $\lambda_m = 7,06858$ ) suivant tableau (III.2)

La fréquence égale :

$$\omega_2 = \frac{49.96482}{L^2} \sqrt{\frac{E_s h^3}{12\rho_s}} \quad (\text{III.34})$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{E_s h^3}{12\rho_s L^4}}$$



**FIGURE III.2** Vibration d'une poutre encastree à une extrémité et en appui simple à l'autre extrémité [6].

### III.2.5 Poutre encastree à une extrémité, l'autre étant libre :

Pour une poutre encastree à l'extrémité et libre à l'autre extrémité, les conditions aux frontières sont :

$$\text{Extrémités } x = 0 : \quad w_0(0) = 0, \quad \frac{dw_0}{dx}(0) = 0 \quad (\text{III.35})$$

Extrémités  $x = L$  : d'après la relation constitue la condition de frontières de **Kirchhoff** dans le cas d'un bord libre les efforts exercées sont nuls,

$$\text{Soit : } M_x = 0, \quad Q_x = 0$$

$$M_x(L) = 0, \quad Q_x(L) = 0 \quad (\text{III.36})$$

Aussi d'après (III.4) : La condition imposée sur le moment est :  $\left[ \frac{d^2 w_0}{dx^2}(L) = 0 \right]$

$$\text{Et avec la condition : } \frac{dM_x}{dx} = Q_x \quad (\text{III.37})$$

Donc à l'extrémité au bord libre :  $x = L$

$$\text{Il vient : } M_x(L) = \frac{d^2 w_0}{dx^2}(L) = 0 \quad \text{et} \quad Q_x(L) = \frac{d^3 w_0}{dx^3}(L) = 0 \quad (\text{III.38})$$

Au : ( $x = 0$ ) la flèche toujours exprimée sous la forme de (III.19) ou la fonction  $X_m(x)$  Satisfaisant les conditions d'encastrement à l'extrémité, il reste de vérifier :

$$\frac{d^2 X_m}{dx^2}(L) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^3 X_m}{dx^3}(L) = 0 \quad (\text{III.39})$$

Soit

$$\cos\lambda_m + \cosh\lambda_m - \gamma_m(\sin\lambda_m + \sinh\lambda_m) = 0 \quad (\text{III.40})$$

$$\sin\lambda_m - \sinh\lambda_m + \gamma_m(\cos\lambda_m + \cosh\lambda_m) = 0$$

$$\cos\lambda_m + \cosh\lambda_m = \gamma_m(\sin\lambda_m + \sinh\lambda_m) = 0$$

$$\sin\lambda_m - \sinh\lambda_m = -\gamma_m(\cos\lambda_m + \cosh\lambda_m) = 0$$

$$\frac{\cos\lambda_m + \cosh\lambda_m}{\sin\lambda_m + \sinh\lambda_m} = -\frac{\sin\lambda_m - \sinh\lambda_m}{\cos\lambda_m + \cosh\lambda_m} = \gamma_m \text{ Lorsque } \gamma_m \neq 0 \quad (\text{III.41})$$

$$\cos\lambda_m \cosh\lambda_m = -1 \quad (\text{III.42})$$

Les trois premières solutions de l'équation (III.42) sont reportées dans le tableau (III.3) avec les valeurs correspondantes de  $\gamma_m$ , pour des valeurs assez élevées de  $\lambda_m$ . Des valeurs approchées peuvent être exprimées sous forme :

$$\lambda_m = (m - 0,5)\pi \quad (\text{III.43})$$

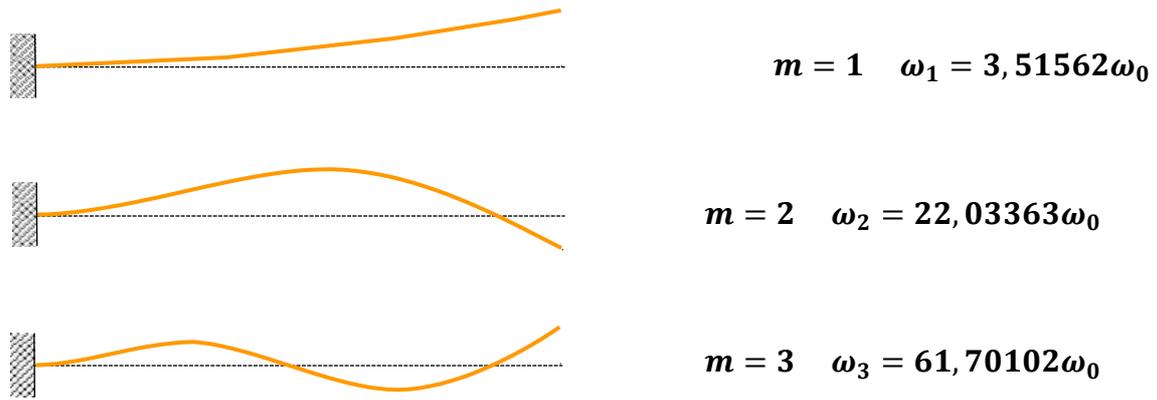
$m$	1	2	3
$\lambda_m$	1,875	4,694	7,855
$\gamma_m$	0,734	1,018	0,999
$(m - 0,5)\pi$	1,571	4,712	7,854

**TABLEAU III.3** Coefficients de la fonction d'une poutre encastree-libre.

Les fréquences propres sont obtenues en reportant l'expression (III.19) de la flèche dans l'équation (III.8), ce qui conduit à l'expression (III.22) donc les fréquences propres des vibrations :

$$\omega_m = \frac{\lambda_m^2}{L^2} \sqrt{\frac{E_s h^3}{12\rho_s}} \text{ Exemple : } \omega_3 = \frac{61,70102}{L^2} \sqrt{\frac{E_s h^3}{12\rho_s}} \text{ ou } \omega_0 = \sqrt{\frac{E_s h^3}{12\rho_s L^4}} \quad (\text{III.44})$$

La déformée exprimée par la relation (III.19) avec les valeurs de  $\lambda_m$  et  $\gamma_m$  du tableau (III.3) est reportée sur la figure (III.3) pour  $m = 1,2,3$



**FIGURE III.3** Vibration d'une poutre encastree à une extrémité et libre à l'autre [6].

## **CHAPITRE IV**

### **Modélisation de la vibration des poutres par la méthode des éléments finis**

## CHAPITRE IV

### Modélisation de la vibration des poutres par la méthode des éléments finis

#### IV.1 Introduction

L'élément poutre tridimensionnel est obtenu par superposition de la traction, de la torsion et des deux flexions dans les deux plans principaux d'inertie de la section droite. Les degrés de liberté correspondants sont :

	Ddl en jeu	Caractéristiques mécaniques
Traction	$u$	$(ES, \rho_s)$
Torsion	$\theta_x$	$(GJ, \rho I)$
Flexion dans le plan $xoy$	$v, \theta_z$	$EI_z, \rho_s$
Flexion dans le plan $xoz$	$w, \theta_y$	$EI_y, \rho_s$

Ce modèle correspond à un élément à deux nœuds et 12 degrés de liberté.

Les variables nodales  $\langle u, v, w, \theta_x, \theta_y, \theta_z \rangle$  sont définies dans

Une base locale de l'élément. Celle-ci est définie par :

$(O, \vec{x}_e)$  axe neutre de la poutre et  $(O, \vec{y}_e)$  et  $(O, \vec{z}_e)$  axes principaux d'inertie de la section droite.

Dans le paragraphe précédent, nous avons construit l'élément basé sur le modèle barre. L'élément associé à la torsion est identique en remplaçant  $ES$  par  $GJ$  et  $\rho_s$  par  $\rho I$ . Il nous reste donc à définir l'élément associé au modèle de flexion plane.

#### IV.2 Élément poutre en flexion

##### IV.2.1 Hypothèses générales

Considérons une poutre rectiligne ne travaillant qu'en flexion dans le plan  $xoy$ , et plaçons nous dans le cadre des hypothèses suivantes:

- Petits déplacements et hypothèses de Bernoulli

$$\theta = v_x \vec{z}_0 \quad \text{et} \quad \vec{u} = (M, t) = \begin{pmatrix} -y v_x \\ v \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.1})$$

- Petite déformation :  $\epsilon_{xx} = -y\nu_{x^2}$  (IV.2)

- Milieu isotrope homogène élastique :

- Etat de contrainte uni axiale :  $\sigma_{xx} = E\epsilon_{xx}$  (IV.3)

Intégrons les contraintes sur la section, nous obtenons la loi de comportement intégrée des poutres :

$$M_f = E I \nu_{x^2} \tag{IV.4}$$

Négligeons le moment dynamique de rotation des sections, l'équation de moment nous donne:

$$T = M_{fx} = E I \nu_{x^3} \tag{IV.5}$$

### IV.2.2 Approximation nodale

Pour chaque élément de longueur  $l_e$ , nous utilisons comme variables nodales :

Les déplacements nodaux des extrémités  $V_i(t)$  et  $V_j(t)$ , et les rotations  $\theta_i(t)$  et  $\theta_j(t)$ ,

Ce qui nous conduit à chercher une approximation polynomiale cubique de la forme :

$$v^*(x, t) = \langle \mathbf{1} \quad x \quad x^2 \quad x^3 \rangle \begin{pmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \\ a_3(t) \\ a_4(t) \end{pmatrix} \tag{IV.6}$$

Identifions les variables nodales avec l'expression de l'approximation du champ de déplacement, nous obtenons la relation matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} V_i(t) \\ \theta_i(t) \\ V_j(t) \\ \theta_j(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^*(0, t) \\ v_x^*(0, t) \\ v^*(l_e t) \\ v_x^*(l_e t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & l_e & l_e^2 & l_e^3 \\ 0 & 1 & 2l_e & 3l_e^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \\ a_3(t) \\ a_4(t) \end{pmatrix} \tag{IV.7}$$

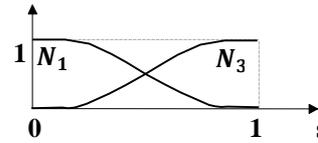
Inversons cette relation et reportons le résultat dans l'expression de  $v^*(x, t)$ , nous obtenons les fonctions d'interpolation de l'élément poutre à deux noeuds. C'est un élément de type l'Hermite car il utilise comme variables nodales le champ de déplacement et sa dérivée première :

$$v^*(x, t) = \langle N(x) \rangle_e \{u(t)\} = \langle N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4 \rangle \begin{pmatrix} V_i(t) \\ \theta_i(t) \\ V_j(t) \\ \theta_j(t) \end{pmatrix} \tag{IV.8}$$

En posant :  $s = \frac{x}{l_e}$

$$N_1(s) = 1 - 3s^2 + 2s^3 \quad (IV.9)$$

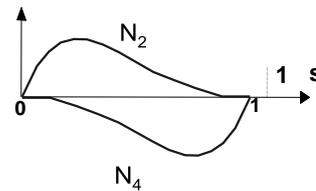
$$N_3(s) = 3s^2 - 2s^3 \quad (IV.10)$$



Remarque :  $N_1$  et  $N_3$  sont symétriques. Ces fonctions représentent la déformée d'une poutre bi - encastée pour laquelle on impose un déplacement unité à une des deux extrémités.

$$N_2(s) = l_e(s - 2s^2 + s^3) \quad (IV.11)$$

$$N_4(s) = l_e(-s^2 + 2s^3) \quad (IV.12)$$



Remarque :  $N_2$  et  $N_4$  sont symétriques. Ces fonctions représentent la déformée d'une poutre encastée à une extrémité. Pour laquelle on impose une rotation unité à l'autre extrémité [9].

### IV.2.3 Matrices élémentaires

$$\text{Matrice masse élémentaire : } [M_e] = \int_{D_e} \langle N_{(M)} \rangle^T \rho \langle N_{(M)} \rangle dv \quad (IV.13)$$

$$\text{Matrice raideur élémentaire : } [K_e] = \int_{D_e} [B_{(M)}]^T [D_{(M)}][B_{(M)}]dv \quad (IV.14)$$

En petits déplacements, les intégrales sont calculées dans l'état de référence (configuration de Lagrange).

La matrice  $[B]$  est calculée à partir de la relation (IV.2) :  $\epsilon_{xx} = -y v_{x^2}$  sur chaque élément de calcul

analytique conduit à :

$$\epsilon_{xx} = -y \langle N_{x^2} \rangle_e \{U\}_e = -y \langle B \rangle_e \{U\}_e \quad (IV.15)$$

$$\text{avec : } \langle B \rangle_e = \langle N_{x^2} \rangle_e = \langle N_{(1,2,3,4),x^2} \rangle_e$$

$$\langle B \rangle_e = \left\langle \frac{6}{l_e^2}(-1 + 2s), \frac{2}{l_e}(-2 + 3s), \frac{6}{l_e^2}(1 - 2s), \frac{2}{l_e}(-1 + 3s) \right\rangle_e \quad (IV.16)$$

Remarque : les champs des déformations et par conséquent celui des contraintes varient linéairement sur chaque élément.

Le calcul analytique des matrices nous donne:

**Matrice de masse :**

$$[M_e] = \rho_s l_e \begin{bmatrix} \frac{13}{35} & \frac{11l_e}{210} & \frac{9}{70} & \frac{-13l_e}{420} \\ \frac{11l_e}{210} & \frac{l_e^2}{105} & \frac{13l_e}{420} & \frac{-l_e^2}{140} \\ \frac{9}{70} & \frac{13l_e}{420} & \frac{13}{35} & \frac{-11l_e}{210} \\ \frac{-13l_e}{420} & \frac{-l_e^2}{140} & \frac{-11l_e}{210} & \frac{l_e^2}{105} \end{bmatrix} \quad \text{(IV.17)}$$

**Matrice de raideur :**

$$[K_e] = \frac{EI_z}{l_e^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l_e & -12 & 6l_e \\ 6l_e & 4l_e^2 & -6l_e & 2l_e^2 \\ -12 & -6l_e & 12 & -6l_e \\ 6l_e & 2l_e^2 & -6l_e & 4l_e^2 \end{bmatrix} \quad \text{(IV.18)}$$

### **IV.3 vibrations des poutres composites**

L'équation de la vibration libre non amortie de poutres renforcées par composites peut être exprimée comme suit :

$$M \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + K u_i = 0 \quad \text{(IV.19)}$$

Si le système vibre dans un mode normal, on obtient un problème de valeur propre en tant que [10] :

$$([K] - \omega_j^2 [M])\{\phi\} = 0 \quad \text{(IV.20)}$$

Où  $\omega_j$  est la j-ième fréquence naturelle et  $\phi$  les déplacements nodaux correspondants.

En multipliant l'équation (IV.20) par  $[M^{-1}]$  on obtient :

$$([K][M^{-1}] - \omega_j^2 [M][M^{-1}])\{\phi\} = 0 \quad \text{(IV.21)}$$

Où  $[K][M^{-1}] = [A]$  s'appelle noyau du système. (IV.22)

Le vecteur déplacement recherché est sous forme [11] :

$$\{\phi(t)\} = q \cdot \cos(\omega t - \varphi) \quad \text{(IV.23)}$$

Introduisant les expressions (IV.22) et (IV.23) dans (IV.21), il vient :

$$[A] - \omega_j^2 [I] q \cdot \cos(\omega t - \varphi) = 0 \quad \text{(IV.24)}$$

Avec cette écriture par convention :  $\lambda = \omega^2$  , il vient :

$$[A] - \lambda[I]q = 0 \tag{IV.25}$$

Il s'agit d'un système d'équations homogènes qui admet des solutions non nulles si son déterminant est nul :

$$\mathbf{det}[A] - \lambda[I] = 0$$

Après développement on obtient :

$$\begin{bmatrix} [a_{11} - \lambda] & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & [a_{nn} - \lambda] \end{bmatrix} \tag{IV.26}$$

**Les scalaires**  $\lambda = \omega^2$  sont ainsi les valeurs propres de la matrice noyau **A** :

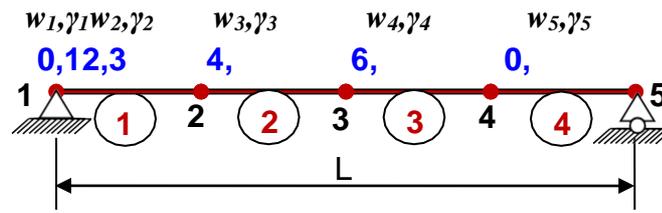
$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + a_3\lambda^{n-3} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \tag{IV.27}$$

Les racines de l'équation (IV.27) sont les valeurs caractéristiques :

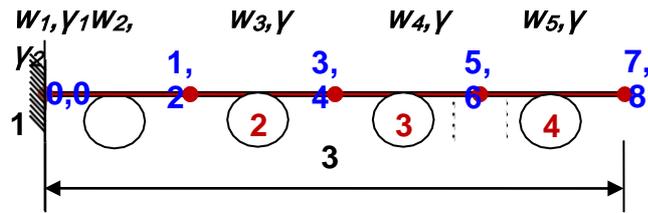
$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + a_3\lambda^{n-3} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = \omega_j^2 \tag{IV.28}$$

### **IV.3.1 Conditions aux limites**

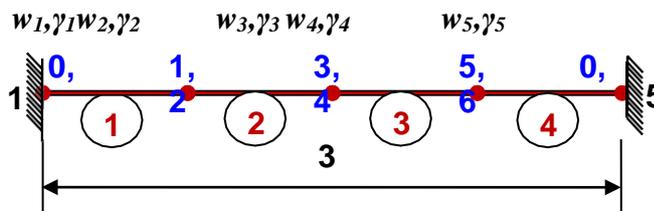
Pour étudier l'influence des conditions aux limites de la poutre sur les premières fréquences naturelles, quatre différentes conditions aux limites ont été imposées à la poutre : simplement appuyée-simplement appuyée (S-S), encastree-encastree (E-E), encastree -libre (E-L), et encastree - simplement appuyée (E-S). La prise en compte des conditions aux limites de la poutre dans la méthode des éléments finis est plus simple. Si on suppose que notre poutre est discrétisée en quatre éléments finis ( $ne = 4$ ) à deux nœuds et deux degré de liberté par nœud ( $w_i, \gamma_i$ ) les conditions aux limites sont introduites selon les degrés de libertés de la structures comme indiqué dans la figure (IV.1).



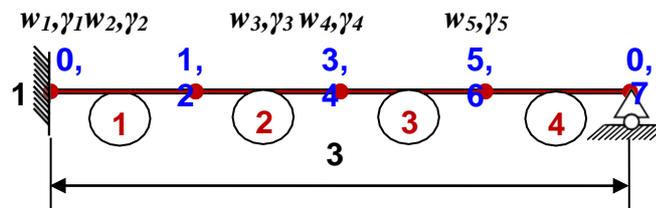
(a) Appuyé simple – Appuyé simple



(b) Encastré – Libre



(c) Encastré – Encastré



(d) Appuyé – Encastré

FIGURE IV.1 Discretisation en quatre éléments finis à deux nœuds.

#### IV.4 Application

Le premier cas est une poutre isotrope en acier et les deux autres modèles de poutres composites sont en verre/époxyde et carbone/époxyde. Ces deux modèles poutres composites sont à huit couches composites stratifiées avec différentes orientations. Le module de Young ( $E$ ) et la masse volumique ( $\rho$ ) sont les caractéristiques propres au matériau. La section ( $A$ ), le moment quadratique ( $I$ ), la largeur ( $b$ ), la hauteur ( $2H$ ) et la longueur de la poutre ( $L$ ) sont les paramètres géométriques à prendre en compte pour la résolution du problème. Considérons une poutre composite multicouche sur deux appuis simples fig.1.

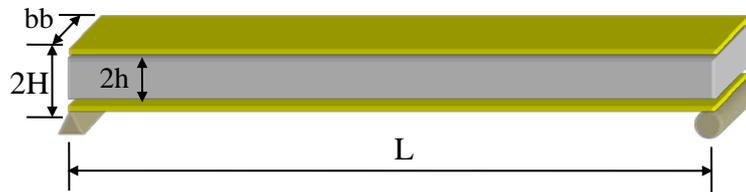


FIGURE IV.2 Poutre en matériaux composite

Notre travail est basé sur l'étude des modes et des fréquences propres de la poutre à deux appuis, avec ces différentes configurations de longueur **0.5 m** et de largeur **0.05 m** et hauteur de **0.008 m**.

Les propriétés mécaniques de l'acier sont :  $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$ ,  $E = 206 \text{ GPa}$  et  $\nu = 0.3$ .

Les propriétés mécaniques du matériau composite **carbone/époxyde** sont :

$\rho = 1580 \text{ kg/m}^3$ ,  $E_x = 147 \text{ GPa}$ ,  $E_y = E_z = 9 \text{ GPa}$ ,  $G_{xz} = 0.3 \text{ GPa}$ ,  $G_{xy} = G_{yz} = 5 \text{ GPa}$ ,  $\nu_{xy} = 0.3$ ,  $\nu_{yz} = \nu_{xz} = 0.4$ .

La résolution du problème vibratoire est réalisée d'une part par la méthode analytique et d'autres parts par la méthode numérique (Méthode des éléments finis)

- **Calcul des fréquences propres**
- **Flexion pure**
- **Carbone/époxyde**

Le tableau IV.1 représente la comparaison entre les résultats analytiques et numériques des dix premières fréquences des poutres stratifiées renforcées en composite carbone/époxyde avec un angle d'orientation  $0^\circ$  et un taux de renforcement de 5%.

**Tableau IV.1** Comparaison entre les résultats analytiques et numériques  
 RENFORCEMENT = 5%    2H=hcomp = 2.0000e-04    2h=hacier = 0.0038

<b>Fréquences</b>	<b>Fr_An 1.0e+04 *</b>	<b>Fr_Nu 1.0e+04 *</b>	<b>Erreur relatif %</b>
<i>f<sub>1</sub></i>	0.0875	0.0870	0.57
<i>f<sub>2</sub></i>	0.3500	0.3421	2.25
<i>f<sub>3</sub></i>	0.7876	0.7492	4.87
<i>f<sub>4</sub></i>	1.4002	1.2864	8.12
<i>f<sub>5</sub></i>	2.1878	1.9299	11.78
<i>f<sub>6</sub></i>	3.1504	2.6564	15.68
<i>f<sub>7</sub></i>	4.2880	3.4406	19.76
<i>f<sub>8</sub></i>	5.6007	4.2443	24.21
<i>f<sub>9</sub></i>	7.0884	4.9705	29.87
<i>f<sub>10</sub></i>	8.7511	5.3200	39.20

Le tableau IV.2 représente les résultats numériques des dix premières fréquences des poutres statifiées renforcées en composite carbone/époxyde avec un angle d'orientation 0° et différents taux de renforcement qui varie 5% à 40%.

**Tableau IV.2** Dix premières fréquences des poutres statifiées renforcées en composite carbone/époxyde avec un angle d'orientation 0° et différents taux de renforcement  
 2H=hcomp = 2.0000e-04    2h=hacier = 0.0038

<b>Fréquences-Nu 1.0e+04 *</b>	<b>5%</b>	<b>10%</b>	<b>20%</b>	<b>30%</b>	<b>40%</b>
<i>f<sub>1</sub></i>	0.0870	0.0621	0.0446	0.0322	0.0289
<i>f<sub>2</sub></i>	0.3421	0.2441	0.1753	0.1265	0.1138
<i>f<sub>3</sub></i>	0.7492	0.5347	0.3840	0.2771	0.2493
<i>f<sub>4</sub></i>	1.2864	0.9181	0.6593	0.4758	0.4281
<i>f<sub>5</sub></i>	1.9299	1.3774	0.9891	0.7138	0.6422
<i>f<sub>6</sub></i>	2.6564	1.8959	1.3615	0.9824	0.8839
<i>f<sub>7</sub></i>	3.4406	2.4556	1.7634	1.2725	1.1449
<i>f<sub>8</sub></i>	4.2443	3.0292	2.1753	1.5697	1.4123
<i>f<sub>9</sub></i>	4.9705	3.5475	2.5475	1.8383	1.6539
<i>f<sub>10</sub></i>	5.3200	3.7970	2.7266	1.9676	1.7703

Le tableau IV.3 représente les résultats numériques des dix premières fréquences des poutres statifiées renforcées en composite carbone/époxyde avec un taux de renforcement de 10% et différents angle d'orientation des fibres qui varie 0° à 90°.

**Tableau IV.3** Dix premières fréquences des poutres statifiées renforcées en composite carbone/époxyde avec un taux de renforcement de 10% et différents angle d'orientation  
 RENFORCEMENT = 10%    hcomp = 2.0000e-04    hacier = 0.0038

<b>Fréquences 1.0e+04 *</b>	<b>0°</b>	<b>30°</b>	<b>45°</b>	<b>60°</b>	<b>75°</b>	<b>90°</b>
<i>f<sub>1</sub></i>	0.0621	0.0605	0.0598	0.0595	0.0596	0.0597
<i>f<sub>2</sub></i>	0.2441	0.2380	0.2351	0.2341	0.2345	0.2348
<i>f<sub>3</sub></i>	0.5347	0.5213	0.5148	0.5127	0.5135	0.5143
<i>f<sub>4</sub></i>	0.9181	0.8951	0.8839	0.8803	0.8817	0.8831
<i>f<sub>5</sub></i>	1.3774	1.3429	1.3261	1.3207	1.3227	1.3248
<i>f<sub>6</sub></i>	1.8959	1.8484	1.8253	1.8178	1.8206	1.8235
<i>f<sub>7</sub></i>	2.4556	2.3941	2.3642	2.3545	2.3581	2.3618
<i>f<sub>8</sub></i>	3.0292	2.9533	2.9164	2.9044	2.9089	2.9135
<i>f<sub>9</sub></i>	3.5475	3.4586	3.4154	3.4013	3.4067	3.4120
<i>f<sub>10</sub></i>	3.7970	3.7019	3.6556	3.6406	3.6462	3.6519

Le tableau IV.4 représente la comparaison entre les résultats des dix premières fréquences des poutres statifiées renforcées en composite carbone/époxyde avec un angle d'orientation 0° et un taux de renforcement de 10%.

**Tableau IV.4** Dix premières fréquences des poutres statifiées renforcées en composite carbone/époxyde et verre/époxyde avec un angle d'orientation  $0^\circ$  et un taux de renforcement de 10%.

RENFORCEMENT = 10%    hcomp = 2.0000e-04    hacier = 0.0038

Fréquences 1.0e+04 *	Carbone/époxyde	Verre/époxyde
$f_1$	0.0621	0.0509
$f_2$	0.2441	0.2002
$f_3$	0.5347	0.4385
$f_4$	0.9181	0.7529
$f_5$	1.3774	1.1296
$f_6$	1.8959	1.5547
$f_7$	2.4556	2.0137
$f_8$	3.0292	2.4841
$f_9$	3.5475	2.9091
$f_{10}$	3.7970	3.1137

### Interprétation résultats

- Les fréquences propres  $\omega_0$  augmentent aux modes.
- Les fréquences analytiques plus grandes que ceux du numériques mais plus proches en les premières fréquences.
- L'erreur relative augmente avec l'augmentation des modes.
- Les fréquences propres  $\omega_0$  diminuent avec l'augmentation du taux des renforcements.
- Les fréquences propres  $\omega_0$  diminuent avec orientations des fibres lentement pour ( $\theta = 0^\circ$  jusqu'à  $\theta = 60^\circ$ ) Et augmentent pour ( $\theta = 60^\circ$  jusqu'à  $\theta = 90^\circ$ ).
- Les fréquences propres  $\omega_0$  de la poutre renforcée par composite carbone/époxyde sont plus grandes que ceux des fréquences propres  $\omega_0$  de la poutre renforcée par le matériau composite verre/époxyde.

### Conclusion Générale

Le comportement dynamique de la poutre renforcées par des matériaux composites carbone/époxyde et verre époxyde, simplement appuyée renforcée par couches composites soumis est prédit par une méthode analytique et numérique (méthode des éléments finis). L'étude du comportement statique (calcul des contraintes et la flèche au centre de la poutre est réalisée par la MEF. Les effets l'orientation des fibres sur la fréquence naturelle, sur les contraintes et les déplacements sont discutés en détail.

Les conclusions suivantes peuvent être tirées de cette étude :

- L'orientation des fibres à  $0^\circ$  donne la plus grande fréquence naturelle ;
- Les fréquences propres  $\omega_0$  augmentent aux modes.
- Les fréquences analytiques plus grandes que ceux du numériques mais plus proches en les premières fréquences. L'erreur augmente avec les fréquences cela est due d'une part au terme  $j^2$  de l'équation des pulsations propres et d'autre part aux dimensions de la poutre. Les fréquences propres files plus élevée sont celle du carbone/époxyde suivi par l'acier, enfin du verre/époxyde.
- L'erreur relative augmente avec l'augmentation des modes.
- Les fréquences propres  $\omega_0$  diminuent avec l'augmentation du taux de renforcement.
- Les fréquences propres  $\omega_0$  diminuent avec orientations des fibres lentement pour ( $\theta = 0^\circ$  jusqu'à  $\theta = 60^\circ$ ) Et augmentent pour ( $\theta = 60^\circ$  jusqu'à  $\theta = 90^\circ$ ).
- Les fréquences propres  $\omega_0$  de la poutre renforcée par composite carbone/époxyde sont plus grandes que ceux des fréquences propres  $\omega_0$  de la poutre renforcée par le matériau composite verre/époxyde.
- Pour les angles d'orientation des fibres ( $\theta = 60^\circ$  jusqu'à  $\theta = 120^\circ$ ) on obtient la contrainte minimale dans les couches 1 (inférieure et supérieure) et la couche 3.
- Pour l'angle de l'orientation des fibres ( $\theta = 90^\circ$ ) on obtient la contrainte maximale au sens positif dans les couches 1 (inférieure et supérieure) et la couche 3,  $\sigma_y = 2,4 * 10^6 \text{pa}$ .
- Pour l'angle de l'orientation des fibres ( $\theta = 30^\circ$  jusqu'à  $45^\circ$ ) et ( $\theta = 135^\circ$  jusqu'à  $150^\circ$ ), On obtient la contrainte maximale au sens négatif en la

couche 1 (inférieure et supérieure) et la couche 3,  $\sigma_y = -1,4 * 10^6 pa$ .

- Pour l'angle de l'orientation des fibres ( $\theta = 0^0$ ), ( $\theta = 60^0$ ), ( $\theta = 120^0$ ) et ( $\theta = 180^0$ ) Les contraintes en la couche 1 (inférieure et supérieure), la couche 3 et la couche 2, sont nulles.
- La contrainte en la couche 4 est nulle,  $\sigma_y = 0$ .
- La contrainte en la couche 2 est la contrainte la plus petite au cœur de matériaux composites suivant  $y$  :  $\sigma_y = -0,1 * 10^7 pa$  au sens négatif et  $\sigma_y = 0,5 * 10^6 pa$  au sens positif.

On peut dire que les poutres revêtues fournissent les possibilités d'améliorer les capacités d'amortissement des poutres métalliques.

## **Bibliographie**

- [1] Jean-Marie Berthelot, “*Matériaux composites : comportement mécanique et analyse des structures*”, Masson, Paris, 1992.
- [2] Frédéric Laurin, *Les composites–De l’élaboration du matériau aux performances des structures*, Aussois 2011.
- [3] Nedri Kadda, *Analyse de la vibration libre des plaques composites sur fondation élastique*, Thèse de Doctorat de l’université DJILLALI LIABES de SIDI BEL ABBES, 04/11/2015.
- [4] Mr. Menail Younes, *Cours Matériaux Composites*, 2018.
- [5] G. Chrétien, ‘*Matériaux composites*’, *Edition Technique et Documentation (Lavoisier)*, ISBN 2 85206 325 5, 1986.
- [6] Jean-Marie Berthelot, ‘*Matériaux composites : Comportement mécanique et analyse des structures*’, 5e édition, Le Mans, avril 2012.
- [7] J.L. Billoët, ‘*Introduction aux matériaux composites à hautes performances*’, *Edition Broché*, 1993.
- [8] Tekili Sabiha, *Comportement sous sollicitations dynamiques des structures renforcées par matériaux composites*, Thèse de Doctorat de l’université de BADJI MOKHTAR – ANNABA, 2017.
- [9] Mr. Khadri Youcef, *cours méthode des éléments finis*, 2018.
- [10] Dubigeon S., *Mécanique des milieux continus*, 2ème édition, Tec & Doc, 1998.
- [11] Zienkiewicz O.C., *The finite element method*, 4Th edition, 2 volumes, McGraw Hill, 1989.