

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

BADJI MOKHTAR ANNABA-UNIVERSITY
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR ANNABA



FACULTE DES SCIENCES DE L'INGENIORAT
DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

MEMOIRE

PRESENTE EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME DE MASTER

INTITULE

MODELISATION MECANIQUE D'UN ASSEMBLAGE FRETTE

DOMAINE : SCIENCES ET TECHNIQUES

FILIERE : GENIE MECANIQUE

SPECIALITE : MECANIQUE AVANCEE

PRESENTE PAR : BEDDAZEKRI ABDELOUAHAB

DIRECTEUR DU MEMOIRE : BOUARICHA AMOR

DEVANT LE JURY

PRESIDENT : Pr BEY KAMEKL

EXAMINATEURS : Pr HAIAHEM AMMAR

Dr BENAMIRA MOHAMED

Dr CHEMAMI ABDENACER

Mr AIT SAID AHCEN

Année: 2015/2016

DEDICACE

Je dédie ce modeste travail

A mes parents

A mes frères

A toute la famille

A mes amis

BEDDA ZEKRI.Abdelouahab

Remerciements

Au terme de ce travail, je tiens à présenter mes plus vifs remerciements à M. AMOR BOUARICHA, pour avoir suivi et dirigé ce travail.

Mes remerciements vont également aux tous les enseignants de département de Génie Mécanique.

Notre gratitude va également aux membres du jury pour honorer notre soutenance et pour l'effort fourni afin juger ce travail.

Qu'il me soit permis de remercier toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce modeste travail.

BEDDA ZEKRI.Abdelouahab

SOMMAIRE.

Chapitre I :

- 1. Introduction Générale.....7
- 2. Description de l'opération du frettage.....8

Chapitre II : Les études théoriques

- 1. Etude théorique du montage fretté d'un moyeu sur un arbre creux es éléments du montage sont considérés des cylindres à parois épaisses.....9
- 2. Calcul des cylindres compound16
- 3. Contraintes thermiques.....18

Chapitre III : Application au cas pratique

- 1. Position du problème.....25
- 2. Détermination de la pression du contact du frettage et le serrage mini correspondant....25
 - 2.1. Condition de montage dilatation..... 29
- 3. Les Contraintes crée par pression de contact agissante.....30
- 4. Les Contraintes crée par la température extérieur.....38
- 5. Les contraintes résultent.....47
 - a. La contrainte résultent radiale.....47
 - b. Les contrainte résultent tonjontial.....49
- 6. Les contraintes radiales totales de l'assemblage arbre-roue.....51
- 7. Les contraintes tonjontials totales de l'assemblage arbre-roue.....52
- 8. Conclusion Générale.....53
- 9. Références bibliographiques.....54

Chapitre I :

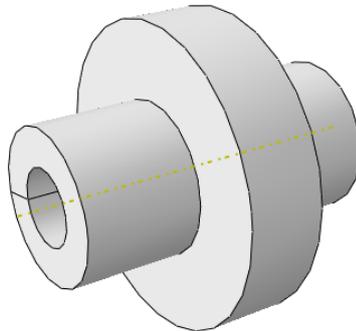
LES INTRODUCTIONS

GENERALE

1. INTRODUCTION GENERALE:

Le frettage est une opération qui consiste à réaliser un assemblage avec serrage entre deux pièces, l'une appelée frette (alésage, moyeu), l'autre l'arbre ou l'axe. Le plus souvent, l'assemblage est obtenu soit en chauffant la frette, soit en refroidissant la frettée. Le serrage souhaité est obtenu à la température ambiante de l'assemblage par contraction de la première ou dilatation de la deuxième. A noter que la deuxième solution est plus coûteuse. L'avantage de ce procédé est d'éviter l'emploi d'une pièce pour la liaison de l'assemblage.

Généralement, les deux pièces sont cylindriques ou coniques (voir la figure.A).



(FIG. A). un assemblage avec serrage entre deux pièces

Ce procédé était peu utilisé du fait qu'il était mal connu. En effet, sa modélisation reposait jusqu'à ces dernières années sur des règles très simplificatrices valables pour des formes simples. Aujourd'hui, il est très employé du fait des développements des moyens de calculs et des outils de modélisation, d'ailleurs, les normes incitent, au-delà de l'utilisation de ces règles simples, à effectuer des modélisations par éléments finis.

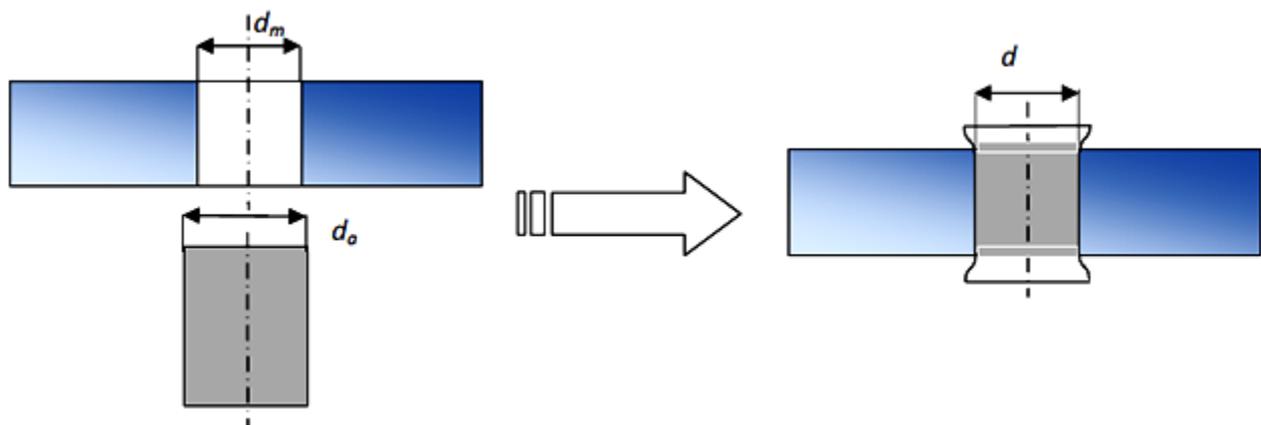
Dans cet axe de recherche, on trouve deux travaux de recherche importants, celui de I.E. SIALA [SIA,96] qui a traité le frettage en tenant compte du défaut de forme, et celui de G.M. YANG [YAN,98] qui a étudié le frettage en tenant compte de l'état de surface. Le présent travail se positionne comme étant une synthèse de ces travaux où nous avons ajouté, en plus de la pression de contact l'effet de la température sur l'état de contraintes au niveau des zones voisines de la surface de contact. Ce travail se présente en tant qu'étude du processus de frettage intégrant les défauts de surfaces dans les calculs.

La présente étude permet de dresser un plan de calcul permettant de fixer les conditions d'un contact sur et fiable pouvant assurer sa fonction sans risque de défaillance non prévue. Comme le

problème abordé est vaste et complexe, l'étude présentera un caractère restrictif : seul l'alésage du moyeu est considéré comme géométriquement quelconque. Dans l'esprit de ce travail, l'alésage (frette) appartient à une roue dentée qui reçoit la puissance motrice qu'elle doit transmettre ailleurs par l'intermédiaire de la condition du frettage.

2. DESCRIPTION DE L'OPERATION DE FRETAGE

Les assemblages frettés interviennent de plus en plus comme solution performante du point de vue technologique et économique dans les mécanismes composant les produits de commerce. L'absence de pièces ou d'éléments intermédiaires entre les deux pièces à assembler permet de simplifier notablement le procédé d'assemblage, donc de diminuer les coûts d'obtention. L'ajustement entre les deux pièces assemblées est serré c'est-à-dire que le diamètre de l'axe (arbre) est plus grand que le diamètre de l'alésage. Le serrage provoqué par l'assemblage des deux pièces induit une pression qui les maintient solidaires grâce au frottement entre les 2 surfaces de contact (voir la figure. B), empêchant ainsi tout mouvement relatif entre elles.



(FIG. B) Description du opération de frettage

Plusieurs possibilités existent pour réaliser l'assemblage. La pièce présentant l'alésage peut être chauffée et du fait de sa dilatation, il est alors possible d'insérer l'axe librement. On peut procéder de la manière inverse : On refroidit l'axe qui, par sa contraction, peut être inséré librement dans l'alésage. Une troisième manière consiste à réaliser l'emmanchement sous une presse. Il est alors nécessaire de contrôler que les surfaces ne soient pas détériorées lors du glissement. Enfin, le gonflement de l'alésage peut être obtenu par une pression (hydraulique par exemple). Cette dernière technique nécessite cependant des appareillages adaptés et que la pression puisse être assurée à l'interface des deux pièces. Elle présente toutefois l'avantage d'un démontage possible de l'ensemble.

Les propriétés de résistance mécanique de l'assemblage réalisé dépendent fortement de la nature des matériaux mais aussi des dimensions, formes et état des surfaces des pièces réalisées. Assurer une bonne résistance de l'assemblage nécessite donc de prévoir son comportement en fonction de ces paramètres d'influence. Depuis plusieurs décennies, les ingénieurs utilisent des méthodes qui sont normalisées [NF, 84]. Ces règles de calcul n'ont pas changé depuis cinquante ans. Elles sont basées sur les solutions classiques du tube à paroi épaisse avec des pressions internes. Ce modèle considère de simples pièces cylindriques de géométries parfaites qui ne donnent pas la possibilité de simuler le comportement de la plupart des cas industriels. Les techniques par éléments finis sont de plus en plus utilisées aujourd'hui pour compléter le modèle des normes et affiner les résultats au cas traité précisément. Peu d'études ont été réalisées pour faire évoluer les règles de calcul. Toutefois, depuis une dizaine d'années, on constate un regain d'intérêt pour ce principe d'assemblage. Et son étude a suscité des travaux permettant d'en mieux comprendre et maîtriser ses caractéristiques- [BOU, 12].

Chapitre II :

Les études

théoriques

1. Etude théorique du montage fretté d'un moyeu sur un arbre creux.

Les éléments du montage sont considérés des cylindres à parois épaisses et supposés soumis à une pression interne p_1 et externe p_2 .

Un cylindre est dit à parois épaisses si l'épaisseur de sa paroi est plus grande que le dixième de son rayon moyen. Examinons un cylindre à parois épaisses se trouvant sous l'action d'une pression d'une interne (p_1) et d'une pression externe (p_2) (FIG. 1); r_1 et r_2 sont respectivement les rayons interne et externe du cylindre. Suite à la symétrie axiale ainsi que des sollicitations, les contraintes et déformations dans celui-ci seront également symétriques par rapport à son axe.

A l'aide de deux sections pratiquées perpendiculairement à l'axe du cylindre délimitons un anneau de longueur unitaire (FIG. 1). Découpons de cet anneau un $adbc$ (FIG. 2a) à l'aide de deux plans coupant l'axe du cylindre et formant entre eux un angle égale à $d\theta$, ainsi que de deux surfaces cylindriques de rayons r et $r+dr$ (FIG. 2b). Sur les arêtes de cet élément vont agir les contraintes σ_r et tangentielles σ_θ qui remplacent l'influence de la partie éloignée du cylindre et qui satisfont aux conditions d'équilibre de l'élément. Il est évident que σ_θ et σ_r seront des contraintes principales. Commençons par déterminer $\sigma_r = f(P_1, P_2, r)$ et de $\sigma_\theta = f_1(P_1, P_2, r)$ en considérant le cas général où les pression intérieures et extérieures sont différentes de zéro.

l'analyse statique du problème ; établissons les équations de l'équilibre dans le repère lié au système des coordonnées adopté (FIG. 2c): $\sum X = 0$; $\sum Y = 0$.

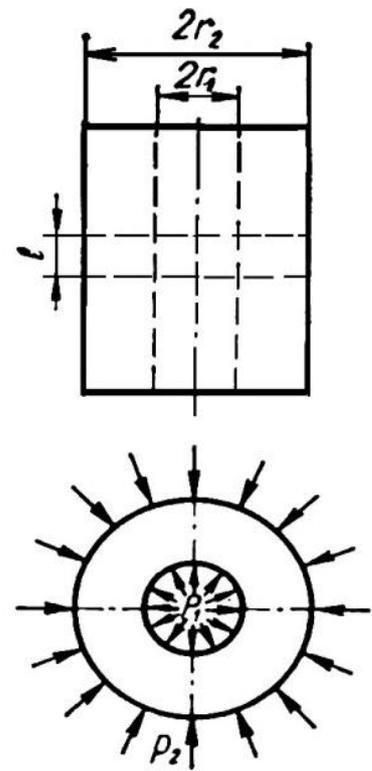


FIG. 1

A cause de la symétrie de l'élément, la deuxième condition se réalise automatiquement tandis que la première, après l'introduction des expressions pour les efforts, pendra la forme suivante.

$$\sum X = -\sigma_r r d\theta + (\sigma_r + d\sigma_r)(r+dr) d\theta - 2(\sigma_\theta dr \sin \frac{d\theta}{2}) = 0.$$

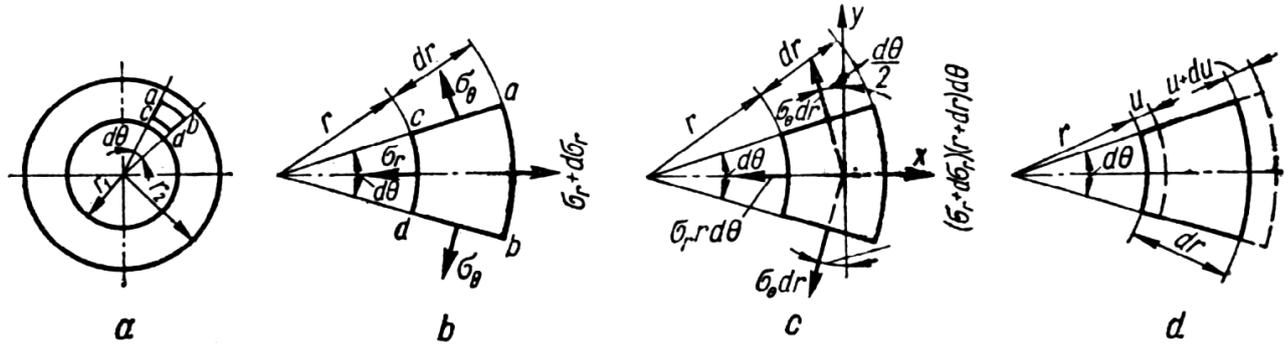


FIG. 2

posant $\sin \frac{d\theta}{2} \cong \frac{d\theta}{2}$ et rejetant les grandeurs du deuxième ordre de petitesse, nous aurons

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r - \sigma_\theta = 0 \quad (1)$$

Cette équation contient deux inconnues: les contraintes σ_θ et σ_r . Pour la détermination de ces, dernières il faut considérer les aspects géométrique, métrique et physique du problème, ce qui permettra de présenter l'équation (1) par l'intermédiaire des déplacement.

Désignons par u le déplacement radial d'une surface cylindrique de rayon r (FIG. 2d) le déplacement d'une surface cylindrique de rayon $r+dr$ sera alors $u+du$. L'allongement relatif d'un élément de longueur dr se traduira par la formule.

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} \quad (2)$$

L'allongement relatif dans la direction tangentielle sera égal à

$$\varepsilon_\theta = \frac{(r+u)d\theta - rd\theta}{rd\theta} = \frac{u}{r} \quad (3)$$

Considérant l'aspect physique du problème, écrivons dans la formes ci-dessous les dépendances entre les contraintes et les déformations en accord avec la loi de Hooke généralisée pour le cas d'état de contrainte plan :

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_r + \mu\varepsilon_\theta);$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_\theta + \mu\varepsilon_r).$$

Compte tenu de (2) et (3) nous aurons

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{du}{dr} + \mu \frac{u}{r} \right); \\ \sigma_\theta = \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{u}{r} + \mu \frac{du}{dr} \right). \end{cases} \quad (4)$$

Introduisant (4) dans (1), nous obtiendrons une équation différentielle explicitée à travers les déplacements

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0 \quad (5)$$

En mettant cette équation sous la forme .

$$\frac{d}{dr^2} \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{d(ur)}{dr} \right] = 0,$$

nous trouverons, après l'avoir intégrée deux fois, la solution générale suivante :

$$u = C_1 + C_2 \frac{1}{r}, \quad (6)$$

où C_1 et C_2 sont les constantes d'intégration qu'on détermine à partir des conditions limites.

Dans notre cas, ces conditions sont :

$$(\sigma_r)_{r=r_1} = 0 \text{ et } (\sigma_r)_{r=r_2} = 0$$

Introduisant (6) dans (4), nous aurons.

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2} \left[(1+\mu)C_1 - \frac{1-\mu}{r_2} C_2 \right]; \quad (7)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\mu^2} \left[(1+\mu)C_1 + \frac{1-\mu}{r_2} C_2 \right]. \quad (8)$$

Introduisant les conditions limites dans (7), nous obtiendrons.

$$-P_1 = \frac{E}{1-\mu^2} \left[(1+\mu)C_1 - \frac{1-\mu}{r_1} C_2 \right];$$

$$-P_2 = \frac{E}{1-\mu^2} \left[(1+\mu)C_1 + \frac{1-\mu}{r_2} C_2 \right].$$

En résolvant ensemble ces équations, on obtient.

$$C_1 = \frac{1 - \mu}{E} \cdot \frac{r_1^2 P_1 - r_1^2 P_2}{r_2^2 - r_1^2} ;$$

$$C_2 = \frac{1 + \mu}{E} \cdot \frac{r_1^2 r_1^2 (P_1 - P_2)}{r_2^2 - r_1^2} .$$

En mettant les valeurs des constantes C_1 et C_2 dans (6)-(8), nous obtiendrons les formules définitives permettant de déterminer le déplacement radial u et les contraintes (*formules de Lamé*):

$$u = \frac{1 - \mu}{E} \cdot \frac{r_1^2 p_1 - r_2^2 p_2}{r_2^2 - r_1^2} r + \frac{1 + \mu}{E} \times \frac{r_1^2 r_2^2 (P_1 - P_2)}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r} \quad (9)$$

$$\sigma_r = \frac{r_1^2 p_1 - r_2^2 p_2}{r_2^2 - r_1^2} - \frac{r_1^2 r_2^2 (P_1 - P_2)}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r^2} \quad (10)$$

$$\sigma_\theta = \frac{r_1^2 p_1 - r_2^2 p_2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{r_1^2 r_2^2 (P_1 - P_2)}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r^2} \quad (11)$$

Additionnant (10) et (11), on constate que

$$\sigma_r + \sigma_\theta = \text{const},$$

par conséquent,

$$\varepsilon_z = -\frac{u}{E} (\sigma_r + \sigma_\theta) = \text{const},$$

Autrement dit, en déformation les sections transversales du cylindre restent planes. Les formules (9)-(11) sont valables pour un cylindre de longueur infinie et ne peuvent s'employer que pour les sections suffisamment éloignées des fonds, si évidemment le cylindre en est doté.

Quand on se trouve en présence de charges axiales N agissant sur le cylindre, et si, en particulier, le cylindre est doté de fonds, les contraintes axiales apparaissent dans ses parois :

$$\sigma_z = \frac{N}{F} = \frac{N}{\pi(r_2^2 - r_1^2)} . \quad (12)$$

Dans (9) apparaît alors le terme.

$$\Delta u = -\mu \frac{\sigma_z}{E} r , \quad (13)$$

alors que les contraintes σ_r et σ_θ restent inchangées.

Dans un cas particulier lorsque la *pression extérieure ne se manifeste pas* ($P_2 = 0$), seule la *pression de contact entre le moyeu et l'arbre doit être prise en considération* ($P_1 = p_{\min}$).

Les formules permettant de déterminer les contraintes et les déplacements dans un cylindre à parois épaisses peuvent s'écrire sous la forme suivante.

$$\sigma_r = \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 - \frac{r_2^2}{r^2} \right) p_{min} ; \quad (14)$$

$$\sigma_\theta = \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 + \frac{r_2^2}{r^2} \right) p_{min} ; \quad (15)$$

$$u = \frac{1 - \mu}{E} \cdot \frac{r_1^2 p}{r_2^2 - r_1^2} r + \frac{1 + \mu}{E} \times \frac{r_1^2 r_2^2 p}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r} . \quad (16)$$

En même temps.

$$\begin{cases} (\sigma_r)_{max} = (\sigma_r)_{r=r_1} = -p_{min} ; \\ (\sigma_\theta)_{max} = (\sigma_\theta)_{r=r_1} = \frac{1 + k^2}{1 - k^2} p_{min} , \end{cases} \quad (17)$$

avec

$$k = \frac{r_1}{r_2}$$

Le déplacement radial de la surface interne, c'est-à-dire l'accroissement du rayon interne, est égal à

$$(u)_{r=r_1} = \frac{r_1}{E} \left(\frac{1 + k^2}{1 - k^2} + \mu \right) p_{min} . \quad (18)$$

Pour la surface externe du cylindre nous aurons:

$$(\sigma_r)_{r=r_2} = 0 ;$$

$$(\sigma_\theta)_{r=r_2} = \frac{2k^2}{1 - k^2} p ; \quad (19)$$

$$(u)_{r=r_2} = \frac{r_2}{E} \cdot \frac{2k^2}{1 - k^2} p . \quad (20)$$

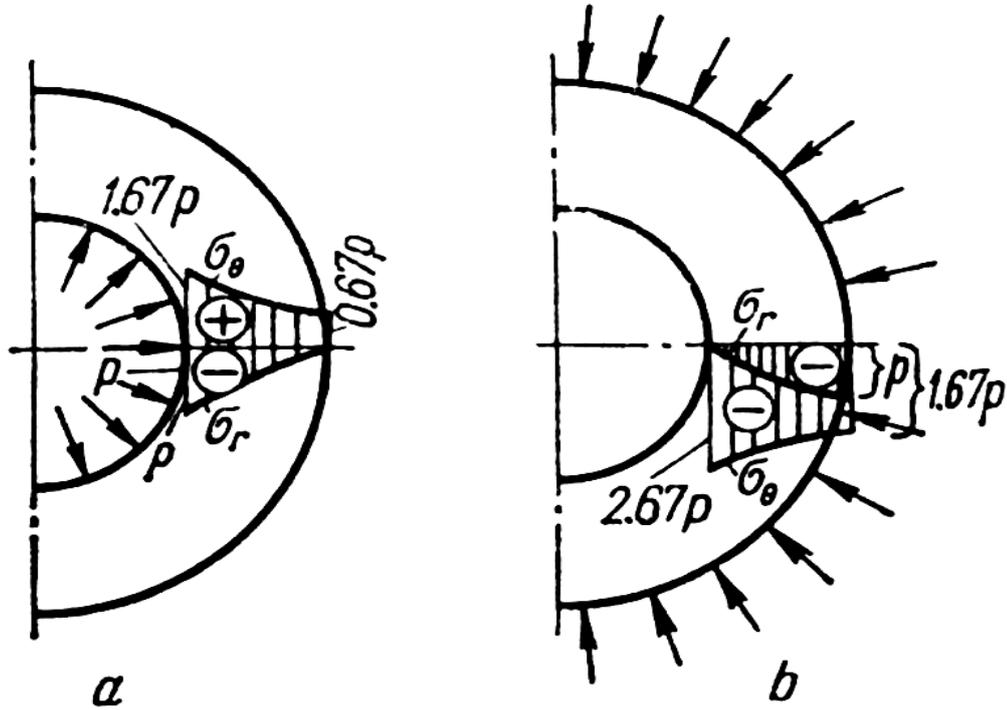


FIG. 3

La (FIG. 3a), montre les diagrammes des contraintes pour le cas étudié avec $k = \frac{r_1}{r_2} = 0,5$. Le long du rayon les contraintes varient selon une fonction hyperbolique. Les points dangereux (Les points correspondant aux contraintes maximales) sont situés sur la surface externe du cylindre, lorsque $r = r_1$

De l'analyse de (15.17), il vient que pour $r_2 \rightarrow \infty$ et $k \rightarrow 0$

$$(\sigma_r)_{r=r_1} = -p ; (\sigma_\theta)_{r=r_1} = p .$$

En nous servant, par exemple, de la troisième théorie de résistance, nous aurons

$$\sigma_{\text{éqIII}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma] . \quad (21)$$

Dans le cas limite étudié ($k \rightarrow 0$)

$$\sigma_1 = (\sigma_\theta)_{r=r_1} = p ; \sigma_3 = (\sigma_r)_{r=r_1} = -p$$

la condition de résistance (15.21) prendra la forme suivante

$$2p \leq [\sigma] ,$$

d'où

$$p \leq \frac{[\sigma]}{2} .$$

Ainsi, un cylindre doté d'une paroi assez épaisse n'admet pas une pression intérieure plus grande qu'une valeur déterminée, autrement dit, l'augmentation de l'épaisseur de la paroi d'un cylindre est loin

d'être toujours une, mesure efficace d'augmentation de sa résistance.

Etudions un autre cas particulier lorsque la *pression intérieure ne se manifeste pas* ($P_1 = 0$, $P_2 = p$). Les formules (9)-(11) prendront la forme suivante .

$$u = -\frac{1-\mu}{E} \cdot \frac{r_2^2 p}{r_2^2 - r_1^2} r - \frac{1+\mu}{E} \cdot \frac{r_1^2 r_2^2 p}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r} ; \quad (22)$$

$$\sigma_r = -\frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 - \frac{r_2^2}{r^2}\right) p ; \quad (23)$$

$$\sigma_\theta = -\frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 + \frac{r_2^2}{r^2}\right) p . \quad (24)$$

Comme il ressort de (23) et (24), les deux contraintes sont, dans ce cas, les contraintes de compression, et $|\sigma_\theta| > |\sigma_r|$. Sur la surface interne.

$$(\sigma_r)_{r=r_1} = 0 ; \quad (25)$$

$$(\sigma_\theta)_{r=r_1} = -\frac{2}{1-k^2} p ; \quad (26)$$

$$(u)_{r=r_1} = \frac{r_1}{E} \cdot \frac{2}{1-k^2} p . \quad (27)$$

Sur la surface externe du cylindre

$$(\sigma_r)_{r=r_2} = -p ;$$

$$(\sigma_\theta)_{r=r_2} = \frac{1+k^2}{1-k^2} p ; \quad (28)$$

$$(u)_{r=r_2} = \frac{r_2}{E} \left(\frac{1+k^2}{1-k^2} - \mu \right) p . \quad (29)$$

La (FIG. 3b) montre les diagrammes des contraintes σ_θ et σ_r pour $k = \frac{r_1}{r_2} = 0,5$. La contrainte maximale en valeur absolue σ_θ se retrouve sur la surface interne du cylindre; ces points présentent également du danger. Posant dans la formule (22) $r_1 = 0$ et $r = r_2$, nous obtiendrons la valeur du déplacement de la surface externe pour un cylindre plein:

$$(u)_{r=r_2} = -p \frac{r_2}{E} (1-\mu) . \quad (30)$$

2. Calcul des cylindres compound :

Dans le but d'atteindre une distribution plus régulière des contraintes sur l'épaisseur de la paroi ainsi qu'un déchargement des couches internes par une meilleure mise à profit des couches externes, on fabrique des cylindres compound par voie de revêtement avec serrage d'un cylindre dans l'autre (d'ordinaire à l'aide d'un ajustement bloqué par dilatation). La valeur de la pression interne admissible de tels cylindres peut être sensiblement plus élevée que celle des cylindres fabriqués en une pièce. C'est pour cette raison que ce procédé est utilisé dans la fabrication des canons et pièces d'artillerie.

Lors du revêtement avec serrage d'un cylindre dans l'autre, les contraintes tangentielles deviennent des contraintes de compression dans le cylindre interne et des contraintes de traction dans le cylindre externe. La (FIG. 4a), *a* montre le diagramme des contraintes qui apparaissent après le revêtement.

Quand un cylindre compound se trouve sous l'action d'une pression interne, on y voit apparaître des contraintes que l'on détermine, tout comme pour un cylindre fait en une seule pièce, d'après les formules (14) et (15) et dont les diagrammes sont représentés sur la (FIG. 4b).

Additionnant les diagrammes des contraintes représentés sur les (FIG. 4a), et (FIG. 4b) nous obtiendrons le diagramme réel (FIG. 4c) qui a lieu dans un cylindre compound soumis à une pression intérieure.

On voit de ce diagramme résultant que les contraintes fatiguant la paroi d'un cylindre compound sont distribuées de façon plus régulière

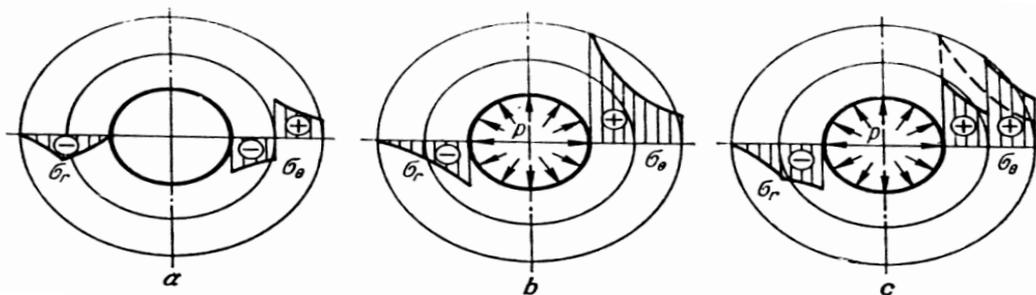


FIG. 4

que dans un cylindre fait en une pièce (le diagramme montré en pointillé); aussi, les cylindres compound se distinguent-ils par une exploitation du matériau plus rationnelle que dans des cylindres non composés.

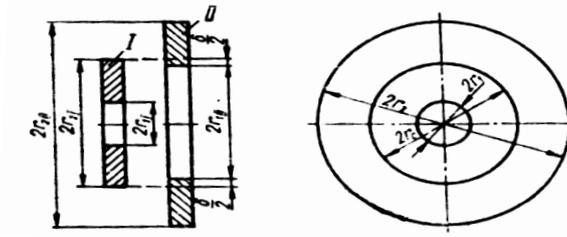


FIG. 5

Quand on calcule les cylindres compound, l'étape essentielle consiste dans la détermination de la valeur de la pression P_c que supporte la surface de contact pour un serrage donné δ représentant la différence entre le diamètre extérieur du cylindre interne I et le diamètre intérieur du cylindre externe II (FIG. 5) . Il est évident que la diminution du rayon extérieur du cylindre interne u_I et l'accroissement du rayon intérieur du cylindre externe u_{II} font la moitié du serrage.

$$|u_I| + |u_{II}| = \frac{\delta}{2} . \quad (31)$$

Tenant compte de ce que δ est trop petit par comparaison avec le rayon de la surface de contact, on peut poser $r_{2I} = r_{2II} = r_c$ (r_c est le rayon de la surface de contact du cylindre compound).

La pression de contact P_c sera une pression extérieure pour le cylindre interne et une pression intérieure pour le cylindre externe.

Introduisons la désignation:

$$k_1 = \frac{r_1}{r_c} ; k_2 = \frac{r_c}{r_2} .$$

Le déplacement radial de la surface de contact du cylindre internes s'obtient de la formule (29):

$$|u_I| = \frac{r_c}{E_1} \left(\frac{1 + k_1^2}{1 - k_1^2} - \mu_1 \right) p_c , \quad (32)$$

Celui du cylindre externe, de la formule (18):

$$|u_{II}| = \frac{r_c}{E_2} \left(\frac{1 + k_2^2}{1 - k_2^2} - \mu_2 \right) p_c . \quad (33)$$

Mettant les valeurs absolues de ces déplacements dans (31), nous aurons

$$\frac{r_c}{E_1} \left(\frac{1 + k_1^2}{1 - k_1^2} - \mu_1 \right) p_c + \frac{r_c}{E_2} \left(\frac{1 + k_2^2}{1 - k_2^2} - \mu_2 \right) p_c = \frac{\delta}{2} ,$$

d'où, en résolvant l'équation par rapport à p_c , nous trouverons.

$$p_c = \frac{\frac{\delta}{2}}{\frac{r_c}{E_1} \left(\frac{1+k_1^2}{1-k_1^2} - \mu_1 \right) p_c + \frac{r_c}{E_2} \left(\frac{1+k_2^2}{1-k_2^2} - \mu_2 \right) p_c} . \quad (34)$$

Si les constituants d'un cylindre compound sont fabriqués en un même matériau, la formule se simplifie pour prendre la forme suivante:

$$p_c = \frac{\delta E}{2r_c} \cdot \frac{(1-k_1^2)(1-k_2^2)}{(1+k_1^2)(1-k_2^2) + (1+k_2^2)(1-k_1^2)} . \quad (35)$$

C'est à partir de la valeur de P_c ainsi obtenue $P_c = f(\delta)$ qu'on détermine les contraintes initiales dans le cylindre interne (formules (23), et dans le cylindre externe (formules (14), (15)). Les formules (34) (35) ne sont valables que si les contraintes ne dépassent pas la limite de proportionnalité. Si des déformations plastiques apparaissent lors du frettage, les efforts réels P_c seront inférieurs à ceux que donnent les calculs.

3. Contraintes thermiques :

Dans le cas d'un échauffement inégal des cylindres à parois épaisses, on voit apparaître des contraintes thermiques. Pour le calcul de ces dernières, l'équation d'équilibre (1) et les relations géométriques (2) et (3) obtenues antérieurement restent valables, seules les relations physiques seront quelque peu modifiées

Désignons par $t(r)$ l'augmentation de la température qui est fonction du rayon courant r et par α le coefficient de dilatation linéaire. Adoptant E et μ , pour les valeurs du module d'élasticité et du coefficient de Poisson correspondant à la température moyenne de la paroi, nous pouvons écrire la loi de Hooke généralisée dans la forme suivante.

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_z = \frac{1}{E} (\sigma_z - \mu\sigma_r + \mu\sigma_\theta) + \alpha t(r) = const ; \\ \varepsilon_r = \frac{1}{E} (\sigma_r - \mu\sigma_z + \mu\sigma_\theta) + \alpha t(r) ; \\ \varepsilon_\theta = \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \mu\sigma_z + \mu\sigma_r) + \alpha t(r) . \end{array} \right. \quad (36)$$

Résolvant ces équations par rapport aux contraintes, nous aurons

$$\sigma_z = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} [(1-\mu)\varepsilon_z + \mu\varepsilon_r + \mu\varepsilon_\theta - (1+\mu)\alpha T(r)] ; \quad (37)$$

$$\sigma_r = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} [(1-\mu)\varepsilon_r + \mu\varepsilon_\theta + \mu\varepsilon_z - (1+\mu)\alpha T(r)] ; \quad (38)$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{E}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} [(1 - \mu)\varepsilon_{\theta} + \mu\varepsilon_r + \mu\varepsilon_z - (1 + \mu)\alpha T(r)] . \quad (39)$$

Vu que $\varepsilon_r = \frac{du}{dr}$ et $\varepsilon_{\theta} = \frac{u}{r}$. (40)

et après avoir introduit dans l'équation (1) les expressions (38) et (39), on obtient

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \alpha \frac{dt(r)}{dr} . \quad (41)$$

Connaissant la loi de variation de la "température" $t = f(r)$, on peut déterminer le déplacement à partir de l'équation (41).

Mettant (41) dans la forme suivante

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{d(ur)}{dr} \right] = \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \alpha \frac{dt(r)}{dr} .$$

et intégrant deux fois cette équation, nous obtiendrons

$$u = \frac{1}{r} \cdot \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \int_{r_1}^r \alpha t(r) r dr + C_1 r + \frac{C_2}{r} . \quad (42)$$

Les constantes d'intégration C_1 et C_2 s'obtiennent des conditions qui caractérisent σ_r sur les faces interne et externe du cylindre

$$(\sigma_r)_{r=r_1} = 0 ; (\sigma_r)_{r=r_2} = 0 . \quad (43)$$

Introduisant (40) et (42) dans (38), nous aurons

$$\sigma_r = \frac{E}{1 + \mu} \left[-\frac{1}{r^2} \cdot \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \int_{r_1}^r \alpha t(r) r dr + \frac{C_1}{1 - 2\mu} + \frac{C_2}{r^2} + \frac{\mu}{1 - 2\mu} \varepsilon_z \right] .$$

Après avoir mis cette expression dans (43) et résolu par rapport aux constantes d'intégration le système de deux équations ainsi obtenu, nous aurons.

$$C_1 = \frac{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}{1 - \mu} \cdot \frac{1}{r_2^2 - r_1^2} \int_{r_1}^{r_2} \alpha t(r) r dr - \mu \varepsilon_z ;$$

$$C_2 = \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \cdot \frac{1}{r_2^2 - r_1^2} \int_{r_1}^{r_2} \alpha t(r) r dr .$$

En mettant (40) dans (37) - (39), compte tenu de (42) et des valeurs trouvées de C_1 et de C_2 , nous obtiendrons

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu} \left[-\frac{1}{r^2} \int_{r_1}^r \alpha t(r) r dr + \frac{r^2 - r_1^2}{(r_2^2 - r_1^2) r^2} \int_{r_1}^{r_2} \alpha t(r) r dr \right]; \quad (44)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\mu} \left[-\frac{1}{r^2} \int_{r_1}^r \alpha t(r) r dr + \frac{r^2 - r_1^2}{(r_2^2 - r_1^2) r^2} \int_{r_1}^{r_2} \alpha t(r) r dr - \alpha t(r) \right]; \quad (45)$$

$$\sigma_z = \frac{E}{1-\mu} \left[\frac{2\mu}{r_2^2 - r_1^2} \int_{r_1}^{r_2} \alpha t(r) r dr + (1-\mu) \varepsilon_z - \alpha t(r) \right]. \quad (46)$$

La grandeur inconnue ε_z qui entre dans la dernière formule peut être déterminée, dans le cas d'une dilatation non gênée du cylindre, de la condition exprimant l'absence de l'effort longitudinal dans la section transversale du cylindre:

$$N = \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \sigma_z r dr d\varphi = 0; \quad (47)$$

ou

$$\int_{r_1}^{r_2} \sigma_z r dr = 0 .$$

Plaçant dans cette dernière égalité l'expression pour σ_z (46), trouvons

$$\varepsilon_z = \frac{2}{r_2^2 - r_1^2} \int_{r_1}^{r_2} \alpha t(r) r dr.$$

Compte tenu de l'expression de ε_z qui vient d'être obtenue, la formule (46) prendra la forme suivante:

$$\sigma_z = \frac{E}{1-\mu} \left(\frac{2}{r_2^2 - r_1^2} \int_{r_1}^{r_2} \alpha t(r) r dr - \alpha t(r) \right). \quad (48)$$

Si l'on connaît la loi de variation de la température $T(r)$ sur l'épaisseur de la paroi, on peut calculer l'intégrale $\int_{r_1}^{r_2} \alpha t(r) r dr$ et déterminer les contraintes.

Si la variation de la température obéit à une loi linéaire,

$$T(r) = T \frac{r_2 - r}{r_2 - r_1} , \quad (49)$$

Avec $T = T_1 - T_2$; T_1 et T_2 , températures sur les faces interne et externe du cylindre respectivement.

Plaçant (49) dans (44), (45) et (48), nous aurons après intégration.

$$\sigma_r = \frac{E\alpha T}{3(1-\mu)(r_2-r_1)} \left[r - \frac{r_1^3}{r^2} - \left(1 - \frac{r_1^2}{r^2} \right) \frac{r_2^3 - r_1^3}{r_2^2 - r_1^2} \right] ; \quad (50)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E\alpha T}{3(1-\mu)(r_2-r_1)} \left[2r - \frac{r_1^3}{r^2} - \left(1 + \frac{r_1^2}{r^2} \right) \frac{r_2^3 - r_1^3}{r_2^2 - r_1^2} \right] ; \quad (51)$$

$$\sigma_z = \frac{E\alpha T}{3(1-\mu)(r_2-r_1)} \left[3r - \frac{2(r_2^3 - r_1^3)}{r_2^2 - r_1^2} \right] . \quad (52)$$

Sur la face interne du cylindre, lorsque $r = r_1$ les contraintes seront

$$\begin{cases} (\sigma_r)_{r=r_1} = 0 \\ (\sigma_\theta)_{r=r_1} = (\sigma_z)_{r=r_1} = \frac{E\alpha T}{3(1-\mu)(r_2-r_1)} \left[3r_1 - \frac{2(r_2^3 - r_1^3)}{r_2^2 - r_1^2} \right] \end{cases} \quad (53)$$

Sur la face externe , lorsque $r = r_2$,

$$\begin{cases} (\sigma_r)_{r=r_2} = 0 \\ (\sigma_\theta)_{r=r_2} = (\sigma_z)_{r=r_2} = \frac{E\alpha T}{3(1-\mu)(r_2-r_1)} \left[3r_2 - \frac{2(r_2^3 - r_1^3)}{r_2^2 - r_1^2} \right] \end{cases} \quad (54)$$

La (FIG. 6a) montre les diagrammes de distribution des contraintes thermiques sur l'épaisseur de la paroi du cylindre caractérisé par la relation

$$k = \frac{r_1}{r_2} = 0,5 \text{ pour } \mu = 0,3.$$

Dans le cas ou la *variation de la température* sur l'épaisseur de la paroi d'un cylindre à parois paisses obéit a une loi logarithmique .

$$T(r) = \frac{T}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \ln \frac{r_2}{r_1} . \quad (55)$$

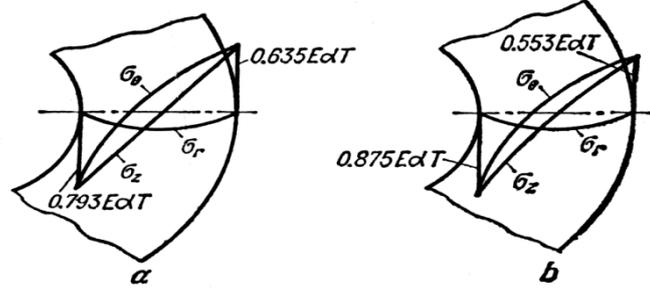


FIG. 6

Après introduction de (55) dans (44), (45), (48) et intégration, les formules permettant de déterminer les contraintes σ_r, σ_θ et σ_z seront respectivement de la forme suivante:

$$\sigma_r = -\frac{E\alpha T}{2(1-\mu)\ln\frac{r_2}{r_1}} \left[\ln\frac{r_2}{r} + \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 - \frac{r_2^2}{r^2} \right) \ln\frac{r_2}{r_1} \right]; \quad (56)$$

$$\sigma_\theta = -\frac{E\alpha T}{2(1-\mu)\ln\frac{r_2}{r_1}} \left[1 - \ln\frac{r_2}{r} - \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 - \frac{r_2^2}{r^2} \right) \ln\frac{r_2}{r_1} \right]; \quad (57)$$

$$\sigma_z = -\frac{E\alpha T}{2(1-\mu)\ln\frac{r_2}{r_1}} \left[1 - 2\ln\frac{r_2}{r} - \frac{2r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \ln\frac{r_2}{r_1} \right]. \quad (58)$$

Sur la face interne du cylindre, quand $r = r_1$, les contraintes seront

$$\begin{aligned} (\sigma_r)_{r=r_1} &= 0; \\ (\sigma_\theta)_{r=r_1} &= (\sigma_z)_{r=r_1} = \frac{E\alpha T}{2(1-\mu)\ln\frac{r_2}{r_1}} \left[1 - \frac{2r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \ln\frac{r_2}{r_1} \right]. \end{aligned} \quad (59)$$

Sur la face externe, quand $r = r_2$,

$$\begin{aligned} (\sigma_r)_{r=r_2} &= 0; \\ (\sigma_\theta)_{r=r_2} &= (\sigma_z)_{r=r_2} = \frac{E\alpha T}{2(1-\mu)\ln\frac{r_2}{r_1}} \left[1 - \frac{2r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \ln\frac{r_2}{r_1} \right]. \end{aligned} \quad (60)$$

Pour le cas où la température varie suivant une fonction logarithmique, Les diagrammes de répartition des contraintes thermiques sur l'épaisseur de la paroi d'un cylindre ayant la relation $k = \frac{r_1}{r_2} = 0,5$ quand $\mu = 0,3$ prennent La forme de la (FIG. 6b).

Au voisinage des bouts du cylindre les contraintes déterminées à l'aide des formules données plus

haut ne peuvent avoir lieu que si les bouts sont sollicités par une charge superficielle variant suivant la formule exprimant σ_z .

Chapitre III :
Application
au cas
pratique

1. Position du problème :

Cette présente étude, vient en réponse à problème posé suivant: Etant donné un système de transmission composé d'un engrenage, déterminer la valeur minimale du serrage nécessaire à assurer entre l'arbre creux et le moyeu (la frette ou la roue dentée) pour permettre la transmission de la puissance (couple) de la roue à l'arbre ou l'inverse sans risque de déplacement relatif. Après la détermination du serrage et la pression de contact correspondante, vérifier si une variation de température (dans les conditions de fonctionnement du système mécanique) ne compromette pas les conditions de résistance des deux composant du mécanisme de transmission.

2. Détermination de la pression du contact du frettage et le serrage mini

correspondant:

Pour permettre la transmission de la puissance nécessaire P le coupler moyeu et arbre creux doivent assurer par le biais du serrage et du frottement la sortie d'un couple C .

$$C = \frac{P}{\omega}$$

Où P [Watt] est la puissance à transmettre

ω [rd/s] est la fréquence de rotation tel que : $\omega = 2\pi N/60$

N [tr/mn] est la fréquence de rotation en tours par minute.

Le serrage nécessaire à assurer le couple n'est autre que la force de frottement par unité de la surface de contact.

$$p_{min} = \frac{2C}{\pi f l d^2}$$

On a $P = 9 \text{ ch}$, $N = 2000 \text{ tr/min}$, $f = 0.15$ (Coefficient de frottement) .

$D = 220[\text{mm}]$ (Diametre de la roue: Frette) .

$d = 70[\text{mm}]$ (diametre extérieur de l'arbre creux).

$l = 16 \text{ mm}$ (Largeur de la denture de la frette) , $\mu = 0.3$ (Coefficient de poisson).

$E = 200.10^9 \text{ N/m}^2$ (Module de Young du matériaux de l'arbre creux et de la frette).

On a $C = \frac{P}{\omega} = \frac{9 \times 736 \times 60}{2000 \times 2\pi} = \frac{6 \times 9 \times 736}{400\pi} = \frac{39744}{1256} = 31,64 [N.m]$

Alors, la valeur minimale de la pression de fretage P_{min} :

$$p_{min} = \frac{2C}{\pi f l d^2} = \frac{2 \times 31,64}{3,14 \times 0,15 \times 0,016 \times 0,07^2}$$

$$p_{min} = \frac{31,64}{3,69264 \times 10^{-5}} = 8,56839 \times 10^5$$

$$p_{min} = 856,84 [kPa] = 0.857 [MPa]$$

La valeur minimale du serrage théorique sera alors Δ :

$$\frac{\Delta_{min}}{d} = \frac{2p_{min}}{E} \left(\frac{D^2}{D^2 - d^2} \right) = \frac{2 \cdot p_{min}}{E} \left(\frac{D^2}{D^2 - d^2} \right)$$

D'où : $\Delta_{min} = \frac{2p_{min}}{E} \left(\frac{D^2}{D^2 - d^2} \right) d = \frac{2 \times 0,016 \times 856,84 \times 10^3}{200 \times 10^9} \left(\frac{0,22^2}{0,22^2 - 0,07^2} \right)$

$$\Delta_{min} = 1,37 \times 10^{-7} \left(\frac{0,0484}{0,0435} \right) = 1,52432 \times 10^{-7}$$

$$\Delta_{min} = 1,52432 \times 10^{-7} [m]$$

Valeur maximal du serrage théorique Δ :

$$\Delta_{max} = \Delta_{min} + IT_A + IT_M$$

Sur le manuel: André Chevalier, Guide du dessinateur industriel, année Chevalier, Edition Hachette technique, (Tab 15-24) (Page 51) .

On a

$$70H7 \begin{cases} +30 \\ 0 \end{cases} \quad 70p6 \begin{cases} +51 \\ +32 \end{cases}$$

$$IT_M = 30 \quad ; \quad IT_A = 19$$

$$\Rightarrow \Delta_{max} = 1,52432 \times 10^{-7} + 0,3 \times 10^{-7} + 0,19 \times 10^{-7}$$

$$\Rightarrow \Delta_{max} = 2,014 \times 10^{-7} [m]$$

Dans ce cas la valeur maximale de la pression de frettage p_{max} :

$$p_{max} = p_{min} \frac{\Delta_{max}}{\Delta_{min}}$$

Soit : $P_{max} = 1,1323 \times 10^6 \text{ [N/m}^2\text{]}$

Contrainte combinée de serrage dans le joint de contact commun est:

dans l'arbre $\sigma_{cA_{max}} = P_{max} = 1,1323 \times 10^6$

Contrainte de résistance de dans l'arbre $\sigma_{cA_{max}} \leq \frac{R_e}{s}$

Avec R_e La contrainte limite de l'élasticité du matériau de l'arbre et de la frette.

s est le coefficient de sécurité, dans notre cas on prend $s = 1.25$

$$R_e = \sigma_{cA_{max}} \cdot s$$

$$\Rightarrow R_e = 1,1323 \times 10^6 \times 1,25$$

$$\Rightarrow R_e = 1,415344 \times 10^6$$

Contrainte combinée dans le moyeu

$$\sigma_{cM_{max}} = \frac{P_{max}}{D^2 - d^2} \sqrt{1 + 3 \left(\frac{D}{d}\right)^4}$$

A.N. : $\sigma_{cM_{max}} = \frac{1,1323 \times 10^6}{0,22^2 - 0,07^2} \sqrt{1 + 3 \left(\frac{0,22}{0,07}\right)^4}$

$$\sigma_{cM_{max}} = \frac{1,1323 \times 10^6}{0,0435} \sqrt{293,7}$$

$$\sigma_{cM_{max}} = 26,3 \times 10^6 \sqrt{293,7}$$

$$\sigma_{cM_{max}} = 45,072 \times 10^6$$

Condition de résistance du moyeu

$$\sigma_{cM_{max}} \leq \frac{R_e}{s}$$

$$\Rightarrow R_e = \sigma_{eM_{max}} \cdot s$$

$$\Rightarrow R_e = 45,072 \times 10^6 \times 1,25$$

$$\Rightarrow R_e = 56,34 \times 10^6$$

2.1. Condition de montage dilatation :

Etat de surface

Rugosité: Ra = 0.8 μm pour alésages de diamètre ≤ 180

Ra = 1.6 μm pour alésages de diamètre > 180

Il faut créer un jeu de montage entre arbre et moyeu (éviter coincements).

$$j = 0,15 \text{ pour arbre jusqu'à } d = 100$$

$$j = 0,2 \text{ pour arbre } 100 < d < 200$$

$$j = 0,25 \text{ pour arbre de } d > 200$$

dilatation du diamètre du moyeu a :

$$a = j + \Delta_{max} + \text{Rugosité}$$

$$a = 0,15 \times 10^{-3} + 2,014 \times 10^{-7} + 0,8 \times 10^{-7}$$

$$a = 1,5028 \times 10^{-4}$$

élévation de température

$$\Delta T = \frac{a}{\alpha d}$$

$$\Rightarrow \Delta T = \frac{1,5028 \times 10^{-4}}{12 \times 10^{-6} \times 0,07}$$

$$\Delta T = 178,9 \text{ }^\circ\text{C}$$

3. Les Contraintes crée par pression de contact agissante :

On a

$$\sigma_r = \frac{r_1^2 P_1 - r_2^2 P_2}{r_1^2 - r_2^2} - \frac{r_1^2 r_2^2 (P_1 - P_2)}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r^2}$$

Pour l'arbre on a $P_1 = 0$ et $P_2 = P_{min} = p$

$$\Rightarrow \sigma_r = \frac{-r_2^2 p}{r_1^2 - r_2^2} + \frac{r_1^2 r_2^2 p}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r^2}$$

$$\Rightarrow \sigma_r = -p \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 - \frac{r_1^2}{r^2} \right)$$

On a

$$\sigma_\theta = \frac{r_1^2 P_1 - r_2^2 P_2}{r_1^2 - r_2^2} + \frac{r_1^2 r_2^2 (P_1 - P_2)}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r^2}$$

Pour l'arbre on a $P_1 = 0$ et $P_2 = P_{min} = p$

$$\Rightarrow \sigma_\theta = \frac{-r_2^2 p}{r_1^2 - r_2^2} - \frac{r_1^2 r_2^2 p}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r^2}$$

$$\sigma_\theta = -p \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 + \frac{r_1^2}{r^2} \right)$$

Pour tracer la courbe des contraintes dans l'arbre ($r \in [r_1; r_2]$), on se doit d'abord d'estimer contraintes pour quelques (cinq) valeurs de la variable r telles que :

Rayon $r =$	Distance [m]
r_1	0,028
r_a	0,02975
r_b	0,0315
r_c	0,03325
r_2	0,035

Donc:

$$\begin{aligned}
 r_1^2 &= 0,028^2 = 7,84 \times 10^{-4} & \Rightarrow & r_1^2 = 7,84 \times 10^{-4} \\
 r_2^2 &= 0,035^2 = 1,225 \times 10^{-3} & \Rightarrow & r_2^2 = 1,225 \times 10^{-3} \\
 r_2^2 - r_1^2 &= 1,225 \times 10^{-3} - 7,84 \times 10^{-4} = 4,41 \times 10^{-4} & \Rightarrow & r_2^2 - r_1^2 = 4,41 \times 10^{-4} \\
 -\frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} &= \frac{-1,225 \times 10^{-3}}{1,225 \times 10^{-3} - 7,84 \times 10^{-4}} = -2,7777 & \Rightarrow & -\frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} = -2,7777
 \end{aligned}$$

Pour la face interne de l'arbre :

$$\begin{aligned}
 \text{D'ou} \quad (\sigma_r)_{r=r_1} &= -\frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 - \frac{r_1^2}{r_1^2}\right) p & \Rightarrow & (\sigma_r)_{r=r_1} = -\frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} (1 - 1)p \\
 \Rightarrow & (\sigma_r)_{r=r_1} = 0 \text{ [Pa]}
 \end{aligned}$$

Là, on remarque qu'aucune contrainte radiale n'affecte l'arbre creux à sa surface intérieure.

$$\begin{aligned}
 (\sigma_\theta)_{r=r_1} &= -\frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 + \frac{r_1^2}{r_1^2}\right) p & \Rightarrow & (\sigma_\theta)_{r=r_1} = -\frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} (1 + 1)p \\
 & & \Rightarrow & (\sigma_\theta)_{r=r_1} = -\frac{2r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} p
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{A.N. :} \quad (\sigma_\theta)_{r=r_1} &= -2,7777 \times 2 \times p & = & -5,5554p \\
 (\sigma_\theta)_{r=r_1} &= -5,5554 \times 856,84 & = & -4760,089 \\
 (\sigma_\theta)_{r=r_1} &= -4760,089
 \end{aligned}$$

Contrairement au contraintes radiale, à cette surface les contraintes tangentielles sont plus importantes en module.

$$\text{Pour} \quad r = r_a = 0,02975 \text{ [m]} \Rightarrow r_a^2 = 8,8506 \times 10^{-4}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow (\sigma_r)_{r=r_a} &= -\frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 - \frac{r_1^2}{r_a^2}\right) p = -2,7777 \left(1 - \frac{7,84 \times 10^{-4}}{8,8506 \times 10^{-4}}\right) p \\
 &= -2,7777(1 - 0,8858)p \Rightarrow (\sigma_r)_{r=r_a} = -0,31717p
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (\sigma_r)_{r=r_a} = -217,764 \text{ [Pa]}$$

Et

$$(\sigma_{\theta})_{r=r_a} = -\frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 + \frac{r_1^2}{r_a^2} \right) p = -2,7777(1 + 0,8858)p$$

$$= -5,2382p \Rightarrow (\sigma_{\theta})_{r=r_a} = -4488,29 \text{ [Pa]}$$

Pour Pour $r = r_b = 0,0315 \text{ m} \Rightarrow r_a^2 = 9,9225 \times 10^{-4}$

$$\Rightarrow (\sigma_r)_{r=r_b} = -\frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 - \frac{r_1^2}{r_b^2} \right) p = -2,7777 \left(1 - \frac{7,84 \times 10^{-4}}{9,9225 \times 10^{-4}} \right) p$$

$$= -2,7777(1 - 0,7901)p \Rightarrow (\sigma_r)_{r=r_b} = -0,5829p$$

$$\Rightarrow (\sigma_r)_{r=r_a} = -499,45 \text{ [Pa]}$$

Et

$$(\sigma_{\theta})_{r=r_b} = -\frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 + \frac{r_1^2}{r_b^2} \right) p = -2,7777(1 + 0,7901)p$$

$$= -4,9723p$$

$$\Rightarrow (\sigma_{\theta})_{r=r_b} = -4260,46 \text{ [Pa]}$$

Pour $r = r_c = 0,03325 \text{ [m]} \Rightarrow r_a^2 = 1,1055 \times 10^{-3}$

$$\Rightarrow (\sigma_r)_{r=r_c} = -\frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 - \frac{r_1^2}{r_c^2} \right) p = -2,7777 \left(1 - \frac{7,84 \times 10^{-4}}{1,1055 \times 10^{-3}} \right) p$$

$$= -2,7777(1 - 0,7091)p \Rightarrow (\sigma_r)_{r=r_c} = -0,808p$$

$$\Rightarrow (\sigma_r)_{r=r_c} = -692,3 \text{ [Pa]}$$

Et

$$(\sigma_{\theta})_{r=r_c} = -\frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 + \frac{r_1^2}{r_c^2} \right) p = -2,7777(1 + 0,7091)p$$

$$= -4,7473p$$

$$\Rightarrow (\sigma_{\theta})_{r=r_c} = -4488,29 \text{ [Pa]}$$

Pour $r = r_2 = 0,035 \text{ m} \Rightarrow r_2^2 = 1,225 \times 10^{-3}$

$$\Rightarrow (\sigma_r)_{r=r_2} = -\frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) p = -2,7777 \left(1 - \frac{7,84 \times 10^{-4}}{1,225 \times 10^{-3}} \right) p$$

$$= -2,7777(1 - 0,64)p \Rightarrow (\sigma_r)_{r=r_2} = -0,99999p$$

$$\Rightarrow (\sigma_r)_{r=r_2} = -856,84 \text{ [Pa]}$$

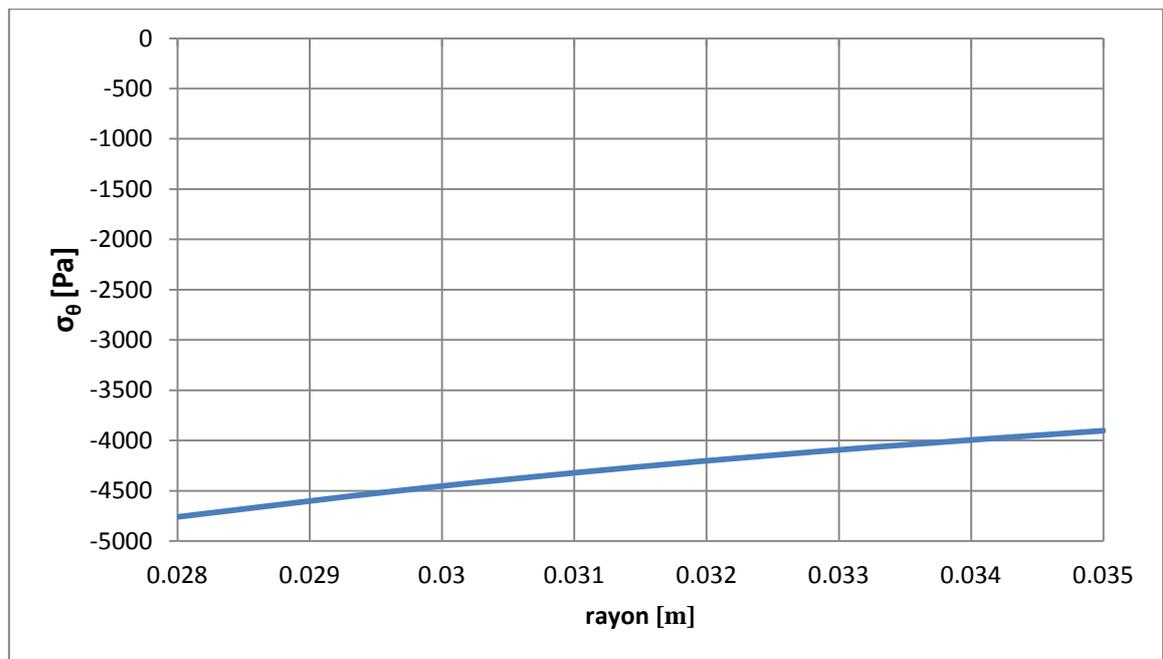
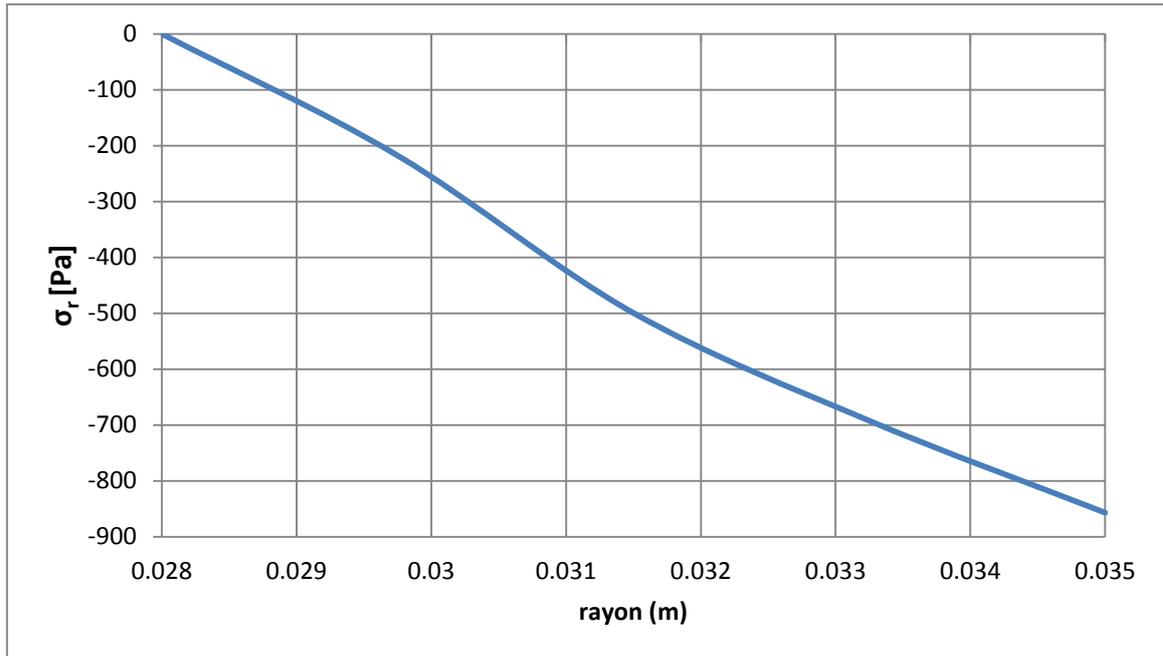
Et

$$(\sigma_{\theta})_{r=r_2} = -\frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 + \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) p = -2,7777(1 + 0,64)p$$

$$= -4,5554p$$

$$\Rightarrow (\sigma_{\theta})_{r=r_2} = -3903,24 \text{ [Pa]}$$

rayon d'arbre r [m]	r_1	r_a	r_b	r_c	r_2
	0,028	0,02975	0,0315	0,03325	0,035
σ_r [Pa]	0	-217,764	-499,45	-692,3	-856,84
σ_{θ} [Pa]	-4760,089	-4488,29	-4260,46	-4067,67	-3903,24



Pour la roue dentée :

On a

$$\sigma_r = \frac{r_2^2 P_1 - r_3^2 P_2}{r_3^2 - r_2^2} - \frac{r_2^2 r_3^2 (P_1 - P_2)}{r_3^2 - r_2^2} \cdot \frac{1}{r^2}$$

Dans le cas particulier qui nous intéresse, On a : $P_1 = P_{min} = p$; $P_2 = 0$

$$\sigma_r = \frac{r_2^2 p}{r_3^2 - r_2^2} - \frac{r_2^2 r_3^2 p}{r_3^2 - r_2^2} \cdot \frac{1}{r^2}$$

$$\sigma_r = \frac{r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} \left(1 - \frac{r_3^2}{r^2} \right) p$$

Et

$$\sigma_\theta = \frac{r_2^2 p}{r_3^2 - r_2^2} + \frac{r_2^2 r_3^2 p}{r_3^2 - r_2^2} \cdot \frac{1}{r^2}$$

Pour tracer la courbe de répartition des contraintes radiale et tangentielle au sein de la roue dentée, on se propose de calculer ces contraintes en quelques points définis par r :

Rayon r [m]	distance
r_2	0,035
r_d	0,05375
r_e	0,0725
r_f	0,09125
r_3	0,11

Don que

$$\text{On a } r_2^2 = 0,035^2 = 1,225 \times 10^{-3} \quad \Rightarrow \quad r_2^2 = 1,225 \times 10^{-3}$$

$$r_3^2 = 0,11^2 = 1,21 \times 10^{-2} \quad \Rightarrow \quad r_3^2 = 1,21 \times 10^{-2}$$

$$r_3^2 - r_2^2 = 1,21 \times 10^{-2} - 1,225 \times 10^{-3} = 4,41 \times 10^{-4} \quad \Rightarrow \quad r_3^2 - r_2^2 = 1,0875 \times 10^{-4}$$

$$\frac{r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} = \frac{1,225 \times 10^{-3}}{1,21 \times 10^{-2} - 1,225 \times 10^{-3}} = 0,1126 \quad \Rightarrow \quad \frac{r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} = 0,1126$$

Pour : $r = r_2 = 0,035$ [m]

$$\Rightarrow (\sigma_r)_{r=r_2} = \frac{r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} \left(1 - \frac{r_3^2}{r_2^2} \right) p = 0,1126 \left(1 - \frac{1,21 \times 10^{-2}}{1,225 \times 10^{-3}} \right) p$$

$$= 0,1126(1 - 0,8775)p = -0,9996p$$

$$(\sigma_r)_{r=r_2} = -856,84 \text{ [Pa]}$$

Et
$$(\sigma_{\theta})_{r=r_c} = \frac{r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} \left(1 + \frac{r_3^2}{r_2^2} \right) p = 0,1126(1 + 9,8775)p$$

$$= 1,2248p$$

$$(\sigma_{\theta})_{r=r_c} = 1049,57$$

Pour $r = r_d = 0,05375 \text{ [m]}$

$$\Rightarrow (\sigma_r)_{r=r_d} = \frac{r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} \left(1 - \frac{r_3^2}{r_d^2} \right) p = 0,1126 \left(1 - \frac{1,21 \times 10^{-2}}{1,225 \times 10^{-3}} \right) p$$

$$= 0,1126(1 - 4,1882)p \Rightarrow (\sigma_r)_{r=r_d} = -0,35899p$$

$$(\sigma_r)_{r=r_d} = -307,6[\text{Pa}]$$

Et
$$(\sigma_{\theta})_{r=r_d} = \frac{r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} \left(1 + \frac{r_3^2}{r_d^2} \right) p = 0,1126(1 + 4,1882)p$$

$$= 0,5842p$$

$$(\sigma_{\theta})_{r=r_d} = 500,57 [\text{Pa}]$$

Pour $r = r_e = 0,0725 \text{ [m]}$

$$\Rightarrow (\sigma_r)_{r=r_e} = \frac{r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} \left(1 - \frac{r_3^2}{r_e^2} \right) p = 0,1126 \left(1 - \frac{1,21 \times 10^{-2}}{5,2562 \times 10^{-3}} \right) p$$

$$= 0,1126(1 - 2,302)p = -0,1466p$$

$$(\sigma_r)_{r=r_e} = -125,6 [\text{Pa}]$$

Et
$$(\sigma_{\theta})_{r=r_e} = \frac{r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} \left(1 + \frac{r_3^2}{r_e^2} \right) p = 0,1126(1 + 2,302)p$$

$$= 0,3718p$$

$$(\sigma_{\theta})_{r=r_e} = 318,57 [\text{Pa}]$$

Pour $r = r_f = 0,09125$ [m]

$$\Rightarrow (\sigma_r)_{r=r_f} = \frac{r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} \left(1 - \frac{r_3^2}{r_f^2} \right) p = 0,1126 \left(1 - \frac{1,21 \times 10^{-2}}{8,3265 \times 10^{-3}} \right) p$$
$$= 0,1126(1 - 1,4532)p = -0,051p$$

$$\Rightarrow (\sigma_r)_{r=r_f} = -43,7 \text{ [Pa]}$$

Et

$$(\sigma_\theta)_{r=r_f} = \frac{r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} \left(1 + \frac{r_3^2}{r_f^2} \right) p = 0,1126(1 + 2,302)p$$
$$= 0,2762p$$

$$(\sigma_\theta)_{r=r_f} = 236,66 \text{ [Pa]}$$

Pour $r = r_3 = 0,11$ [m]

$$\Rightarrow (\sigma_r)_{r=r_3} = \frac{r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} \left(1 - \frac{r_3^2}{r_3^2} \right) p = \frac{r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} (1 - 1)p$$

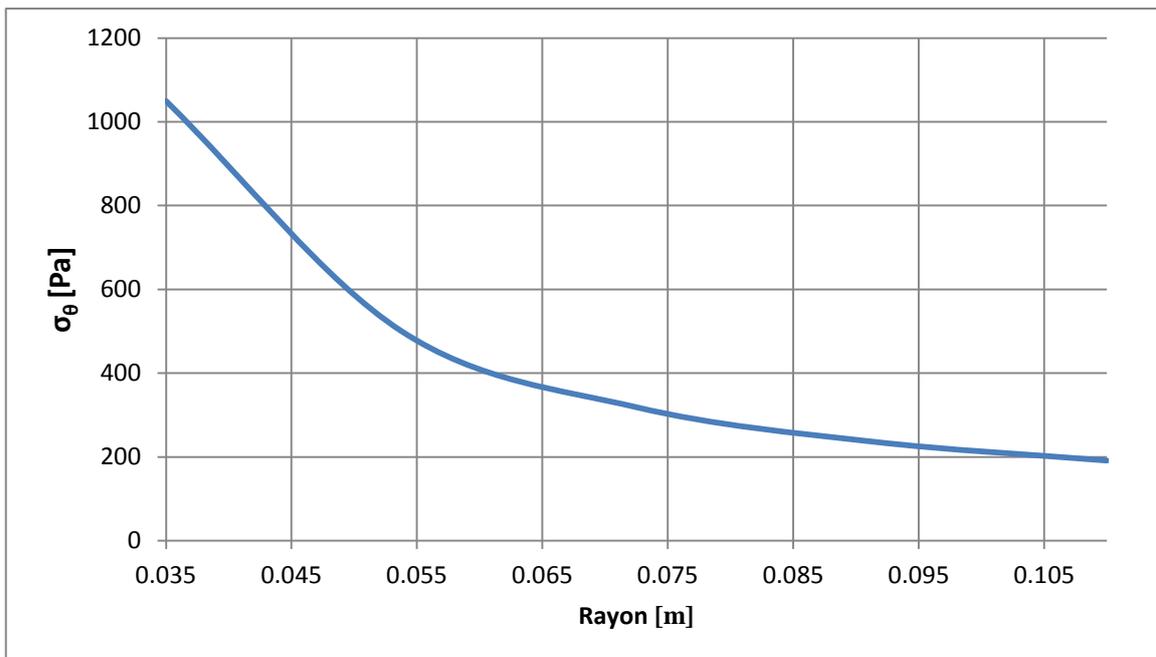
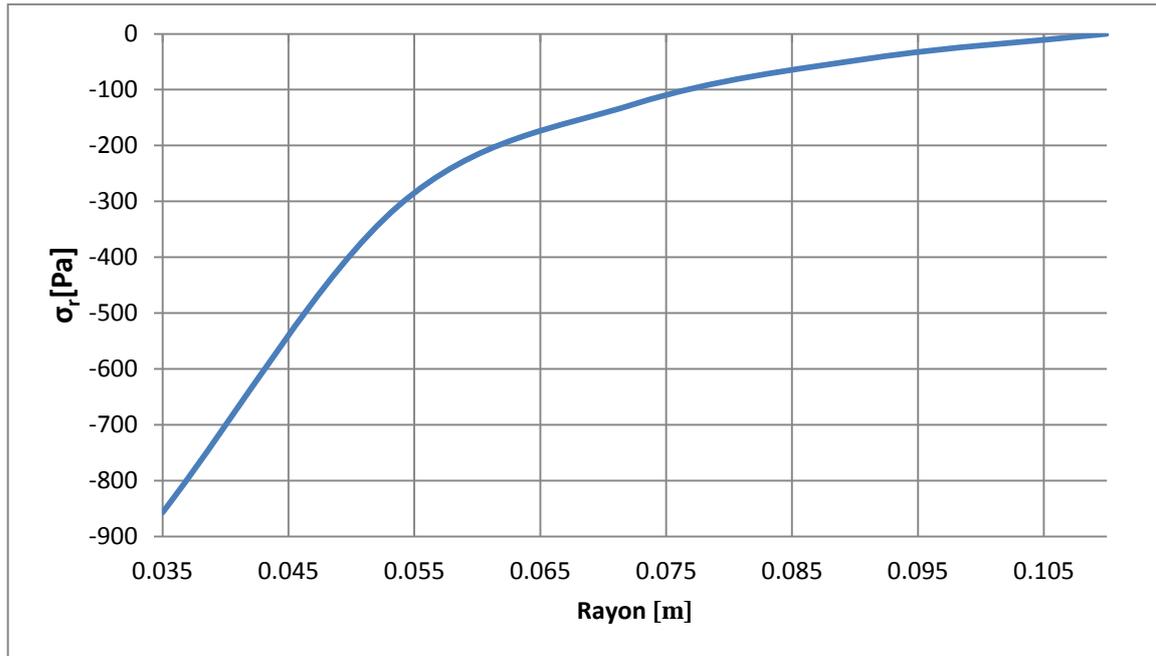
$$(\sigma_r)_{r=r_3} = 0$$

Et

$$(\sigma_\theta)_{r=r_3} = \frac{r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} \left(1 + \frac{r_3^2}{r_3^2} \right) p = 0,1126(1 + 1)p$$
$$= 0,2232p$$

$$(\sigma_\theta)_{r=r_3} = 191,24 \text{ [Pa]}$$

Rayon la roue [m]	r_2	r_d	r_e	r_f	r_3
	0,035	0,05375	0,0725	0,09125	0,11
σ_r [Pa]	-856,84	-307,6	-125,6	-43,7	0
σ_θ [Pa]	1049,57	500,57	318,57	236,66	191,24



4. Les Contraintes crée par la température extérieur(Les Contraintes thermiques):

On considère que l'arbre et le moyeu constitue un seul cylindre exposé à la température ambiante uniforme. Le contact est supposé parfait entre l'arbre et le moyeu (contact métal-métal sous la pression p).

On adopte la loi de transfert de chaleur logarithmique (Conduction logarithmique) définie par:

$$T(r) = \frac{T_{r_3} - T_{r_1}}{\ln \frac{r_3}{r_1}} \ln \frac{r}{r_1} + T_1$$

On a $T_{r_1} = 20 \text{ } ^\circ\text{C}$ pour $r_1 = 0,028 \text{ [m]}$

$T_{r_2} = ?? \text{ } ^\circ\text{C}$ pour $r_2 = 0,035 \text{ [m]}$

$T_{r_3} = 90 \text{ } ^\circ\text{C}$ pour $r_3 = 0,11 \text{ [m]}$

A.N. :
$$T(r_2) = \left(\frac{90-20}{\ln \frac{0,11}{0,028}} \right) \ln \frac{0,035}{0,028} + 20$$

On a $\ln \frac{0,11}{0,028} = \ln 3,93 = 1,3682$

$$\ln \frac{0,035}{0,028} = \ln 1,25 = 0,2231$$

$\Rightarrow T(r_2) = \left(\frac{70}{1,3682} \right) 0,2231 + 20$

$\Rightarrow T(r_2) = 31,4142 \text{ } ^\circ\text{C}$

Avec cette température, les contraintes seront:

$$\sigma_r = - \frac{E\alpha T}{2(1-\mu)\ln \frac{r_2}{r_1}} \left[\ln \frac{r_2}{r} + \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 - \frac{r_2^2}{r^2} \right) \ln \frac{r_2}{r_1} \right] ;$$

$$\sigma_\theta = - \frac{E\alpha T}{2(1-\mu)\ln \frac{r_2}{r_1}} \left[1 - \ln \frac{r_2}{r} - \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 - \frac{r_2^2}{r^2} \right) \ln \frac{r_2}{r_1} \right] ;$$

Pour l'arbre :

✓ $T = T_{r_2} - T_{r_1} \Rightarrow T = 31,4 - 20$

$\Rightarrow T = 11,4 \text{ } ^\circ\text{C}$

✓ $2(1-\mu)\ln \frac{r_2}{r_1} = 2(1-0,3)\ln \frac{0,035}{0,028} = 0,3124$

✓ $\frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} = \frac{0,035^2}{0,035^2 - 0,028^2} = 1,7777$

✓ $E\alpha T = 200 \times 10^9 \times 12 \times 10^{-6} \times 11,4 = 2,736 \times 10^7$

$$\Rightarrow \sigma_r = -\frac{2,736 \times 10^7}{0,3124} \left[\ln \frac{0,035}{r} + 1,7777 \left(1 - \frac{1,225 \times 10^{-3}}{r^2} \right) 0,223 \right]$$

$$\sigma_r = -8,758 \times 10^7 \left(\ln \frac{0,035}{r} - \frac{0,4856 \times 10^{-3}}{r^2} + 0,3964 \right)$$

$$\Rightarrow \sigma_\theta = 8,758 \times 10^7 \left(1 - \ln \frac{0,035}{r} + \frac{0,4856 \times 10^{-3}}{r^2} - 0,3964 \right)$$

$$\Rightarrow \sigma_\theta = 8,758 \times 10^7 \left(-\ln \frac{0,035}{r} + \frac{0,4856 \times 10^{-3}}{r^2} - 0,6035 \right)$$

Pour $r = r_1 = 0,028 \Rightarrow r_1^2 = 7,84 \times 10^{-4}$

$$\Rightarrow (\sigma_r)_{r=r_1} = 0 ;$$

$$\Rightarrow (\sigma_\theta)_{r=r_1} = \frac{E\alpha T}{2(1-\mu)\ln\frac{r_2}{r_1}} \left[1 - \frac{2r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \ln \frac{r_2}{r_1} \right]$$

$$\Rightarrow (\sigma_\theta)_{r=r_1} = 8,758 \times 10^7 \left[1 - \frac{2 \times 1,225 \times 10^{-3}}{4,41 \times 10^{-4}} \times 0,223 \right]$$

$$\Rightarrow (\sigma_\theta)_{r=r_1} = -2,0922 \times 10^7$$

Pour : $r = r_a = 2,975 \times 10^{-2} \Rightarrow r_a^2 = 8,8506 \times 10^{-4}$

$$(\sigma_r)_{r=r_a} = -8,758 \times 10^7 \left(\ln \frac{0,035}{2,975 \times 10^{-2}} - \frac{0,4856 \times 10^{-3}}{8,8506 \times 10^{-4}} + 0,3964 \right)$$

$$(\sigma_r)_{r=r_a} = -8,758 \times 10^7 (0,16252 - 0,54866 + 0,3964)$$

$$(\sigma_r)_{r=r_a} = -8,758 \times 10^7 (1,0255 \times 10^{-2})$$

$$(\sigma_r)_{r=r_a} = -8,9818212 \times 10^5$$

$$(\sigma_\theta)_{r=r_a} = 8,758 \times 10^7 \left(-\ln \frac{0,035}{2,975 \times 10^{-2}} + \frac{0,4856 \times 10^{-3}}{8,8506 \times 10^{-4}} - 0,6035 \right)$$

$$(\sigma_\theta)_{r=r_a} = 8,758 \times 10^7 (-0,16252 + 0,54866 + 0,6035)$$

$$\Rightarrow (\sigma_\theta)_{r=r_a} = 8,66726 \times 10^7 [Pa]$$

Pour : $r = r_b = 3,15 \times 10^{-2} \Rightarrow r_b^2 = 9,9225 \times 10^{-4}$

$$(\sigma_r)_{r=r_b} = -8,758 \times 10^7 \left(\ln \frac{0,035}{3,15 \times 10^{-2}} - \frac{0,4856 \times 10^{-3}}{9,9225 \times 10^{-4}} + 0,3964 \right)$$

$$(\sigma_r)_{r=r_b} = -8,758 \times 10^7 (0,10536 - 0,48939 + 0,3964)$$

$$(\sigma_r)_{r=r_b} = -8,758 \times 10^7 \times 1,23677 \times 10^{-2}$$

$$(\sigma_r)_{r=r_b} = 1,083163 \times 10^6 [Pa]$$

$$(\sigma_\theta)_{r=r_b} = 8,758 \times 10^7 \left(-\ln \frac{0,035}{3,15 \times 10^{-2}} + \frac{0,4856 \times 10^{-3}}{9,9225 \times 10^{-4}} - 0,6035 \right)$$

$$(\sigma_\theta)_{r=r_b} = 8,758 \times 10^7 (-0,10536 + 0,48939 + 0,6036)$$

$$(\sigma_\theta)_{r=r_b} = 8,6496635 \times 10^7 [Pa]$$

Pour : $r = r_c = 3,325 \times 10^{-2} \Rightarrow r_c^2 = 1,1055 \times 10^{-3}$

$$(\sigma_r)_{r=r_c} = -8,758 \times 10^7 \left(\ln \frac{0,035}{3,325 \times 10^{-2}} - \frac{0,4856 \times 10^{-3}}{1,1055 \times 10^{-3}} + 0,3964 \right)$$

$$(\sigma_r)_{r=r_c} = -8,758 \times 10^7 (5,1293 \times 10^{-2} - 0,48939 + 0,3964)$$

$$(\sigma_r)_{r=r_c} = -7,38715 \times 10^5$$

$$(\sigma_\theta)_{r=r_c} = 8,758 \times 10^7 \left(-\ln \frac{0,035}{3,325 \times 10^{-2}} + \frac{0,4856 \times 10^{-3}}{1,1055 \times 10^{-3}} - 0,6035 \right)$$

$$(\sigma_\theta)_{r=r_c} = 8,758 \times 10^7 (-5,1293 + 0,48939 + 0,6036)$$

$$(\sigma_\theta)_{r=r_c} = 8,6836183 \times 10^7$$

Pour : $r = r_2 = 3,5 \times 10^{-2} \Rightarrow r_2^2 = 1,225 \times 10^{-3}$

$$(\sigma_r)_{r=r_2} = 0$$

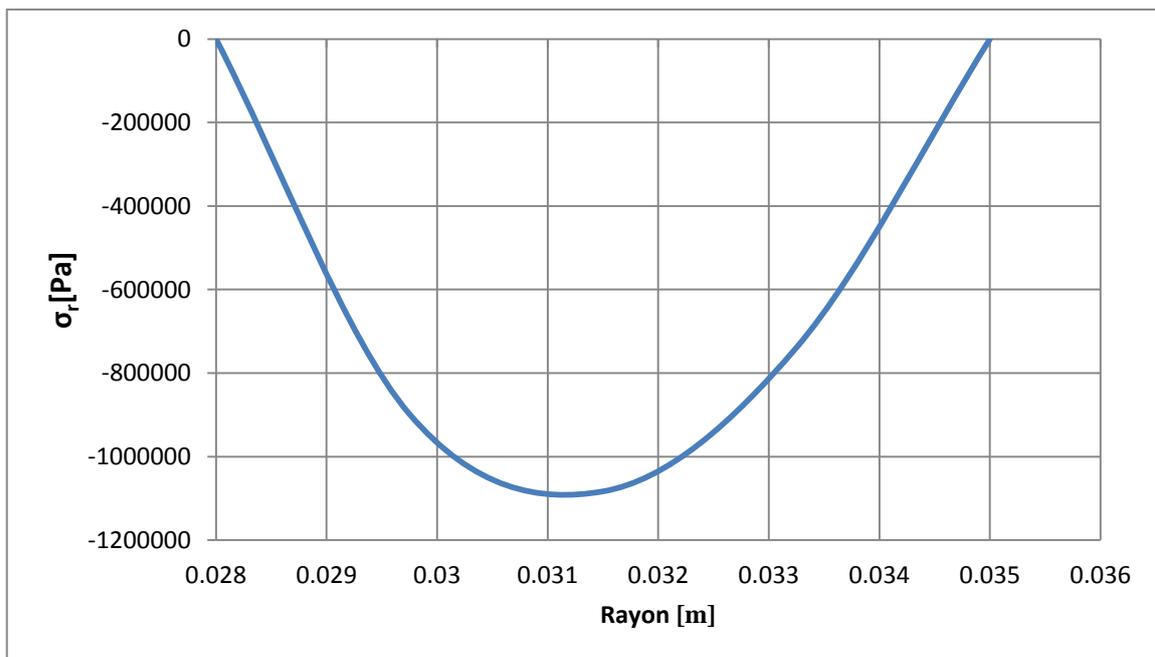
Et
$$(\sigma_\theta)_{r=r_2} = \frac{E\alpha T}{2(1-\mu)\ln\frac{r_2}{r_1}} \left[1 - \frac{2r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \ln \frac{r_2}{r_1} \right]$$

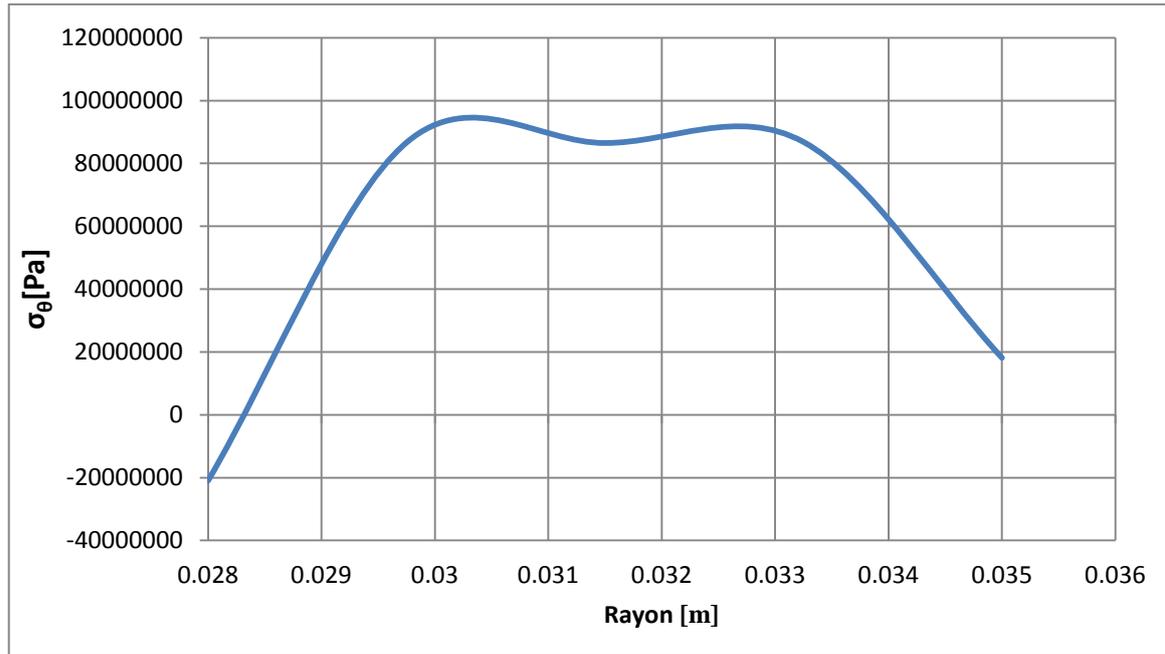
$$(\sigma_{\theta})_{r=r_2} = 8,758 \times 10^7 \left(-1 + \frac{2 \times 7,84 \times 10^{-4}}{4,41 \times 10^{-4}} \cdot \ln \frac{0,035}{0,028} \right)$$

$$(\sigma_{\theta})_{r=r_2} = 8,758 \times 10^7 (1 - 0,792889)$$

$$(\sigma_{\theta})_{r=r_2} = 1,8138791 \times 10^7 \text{ [Pa]}$$

rayon d'arbre [m]	r_1	r_a	r_b	r_c	r_2
	0,028	0,02975	0,0315	0,03325	0,035
σ_r [Pa]	0	-898182,12	-1083163	-738715	0
σ_{θ} [Pa]	-20922000	86672671	86497877	86836183	18138791





Pour le moyeu.

$$T = T_{r_3} - T_{r_2} = 90 - 31,4 \Rightarrow T = 58,6 \text{ } ^\circ\text{C}$$

On a :

$$\sigma_r = -\frac{E\alpha T}{2(1-\mu)\ln\frac{r_3}{r_2}} \left[\ln\frac{r_3}{r} + \frac{r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} \left(1 - \frac{r_3^2}{r^2} \right) \ln\frac{r_3}{r_2} \right] ;$$

$$\sigma_\theta = \frac{E\alpha T}{2(1-\mu)\ln\frac{r_3}{r_2}} \left[1 - \ln\frac{r_3}{r} - \frac{r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} \left(1 - \frac{r_3^2}{r^2} \right) \ln\frac{r_3}{r_2} \right]$$

On a :

$$\checkmark \quad T = T_{r_3} - T_{r_2} \quad \Rightarrow \quad T = 90 - 31,4$$

$$\Rightarrow T = 58,6 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$\checkmark \quad 2(1-\mu)\ln\frac{r_3}{r_2} = 2(1-0,3)1,1451$$

$$= 1,6031$$

$$\checkmark \quad \frac{r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} = \frac{0,035^2}{0,11^2 - 0,035^2} = 6,9282 \times 10^{-2}$$

✓

$$E\alpha T = 200 \times 10^9 \times 12 \times 10^{-6} \times 58,6$$

$$= 1,4064 \times 10^8$$

$$\Rightarrow \sigma_r = -\frac{1,4064 \times 10^8}{1,6031} \left[\ln \frac{0,11}{r} + 6,9282 \times 10^{-2} \left(1 - \frac{1,21 \times 10^{-2}}{r^2} \right) 1,1451 \right]$$

$$\sigma_r = -8,773 \times 10^7 \left[\ln \frac{0,11}{r} - \frac{9,6 \times 10^{-4}}{r^2} + 7,9335 \times 10^{-2} \right]$$

$$\sigma_\theta = -8,773 \times 10^7 \left[1 - \ln \frac{0,11}{r} + \frac{9,6 \times 10^{-4}}{r^2} - 7,9335 \times 10^{-2} \right]$$

$$\sigma_\theta = -8,773 \times 10^7 \left[-\ln \frac{0,11}{r} + \frac{9,6 \times 10^{-4}}{r^2} - 0,9206 \right]$$

$$\text{Pour : } r = r_2 = 3,5 \times 10^{-2} \Rightarrow r_2^2 = 1,225 \times 10^{-3}$$

$$(\sigma_r)_{r=r_2} = 0$$

$$(\sigma_\theta)_{r=r_2} = \frac{E\alpha T}{2(1-\mu)\ln\frac{r_3}{r_2}} \left[1 - \frac{2r_3^2}{r_3^2 - r_2^2} \ln \frac{r_3}{r_2} \right]$$

$$(\sigma_\theta)_{r=r_2} = \frac{1,4064 \times 10^8}{1,6031} \left(1 - \frac{2 \times 1,21 \times 10^{-2}}{1,1316 \times 10^{-2}} \cdot 1,1451 \right)$$

$$(\sigma_\theta)_{r=r_2} = 8,7730023 \times 10^7 (1 - 2,44887)$$

$$(\sigma_\theta)_{r=r_2} = -1,2710940 \times 10^8$$

$$\text{Pour : } r = r_d = 5,375 \times 10^{-2} \Rightarrow r_d^2 = 2,8890 \times 10^{-3}$$

$$(\sigma_r)_{r=r_d} = -8,773 \times 10^7 \left(\ln \frac{0,11}{5,375 \times 10^{-2}} - \frac{9,6 \times 10^{-4}}{2,8890 \times 10^{-3}} + 7,9335 \times 10^{-2} \right)$$

$$(\sigma_r)_{r=r_d} = -8,773 \times 10^7 (0,71613 - 0,3323 + 7,9335 \times 10^{-2})$$

$$(\sigma_r)_{r=r_d} = -40633465,45 \text{ [Pa]}$$

$$(\sigma_\theta)_{r=r_d} = 8,773 \times 10^7 (-0,71613 + 0,3323 + 0,9206)$$

$$(\sigma_\theta)_{r=r_d} = 47090832,1 \text{ [Pa]}$$

$$\text{Pour : } r = r_e = 7,25 \times 10^{-2} \Rightarrow r_e^2 = 5,256 \times 10^{-3}$$

$$(\sigma_r)_{r=r_e} = -8,773 \times 10^7 \left(\ln \frac{0,11}{7,25 \times 10^{-2}} - \frac{9,6 \times 10^{-4}}{5,256 \times 10^{-3}} + 7,9335 \times 10^{-2} \right)$$

$$(\sigma_r)_{r=r_e} = -8,773 \times 10^7 (0,4169 - 0,18264 + 7,9335 \times 10^{-2})$$

$$(\sigma_r)_{r=r_e} = -27511714,4 [Pa]$$

$$(\sigma_\theta)_{r=r_e} = 8,773 \times 10^7 (-0,4169 + 0,18264 + 0,9206)$$

$$(\sigma_\theta)_{r=r_e} = 60212608,2 [Pa]$$

Pour : $r = r_f = 9,125 \times 10^{-2} \Rightarrow r_f^2 = 8,326 \times 10^{-3}$

$$(\sigma_r)_{r=r_f} = -8,773 \times 10^7 \left(\ln \frac{0,11}{9,125 \times 10^{-2}} - \frac{9,6 \times 10^{-4}}{8,326 \times 10^{-3}} + 7,9335 \times 10^{-2} \right)$$

$$(\sigma_r)_{r=r_f} = -8,773 \times 10^7 (0,18687 - 0,1153 + 7,9335 \times 10^{-2})$$

$$(\sigma_r)_{r=r_f} = -13238767,1 [Pa]$$

$$(\sigma_\theta)_{r=r_f} = 8,773 \times 10^7 (-0,18687 + 0,1153 + 0,9206)$$

$$(\sigma_\theta)_{r=r_f} = 74485402 [Pa]$$

Pour : $r = r_3 = 0,11 \Rightarrow r_3^2 = 1,21 \times 10^{-3}$

$$(\sigma_r)_{r=r_3} = 0$$

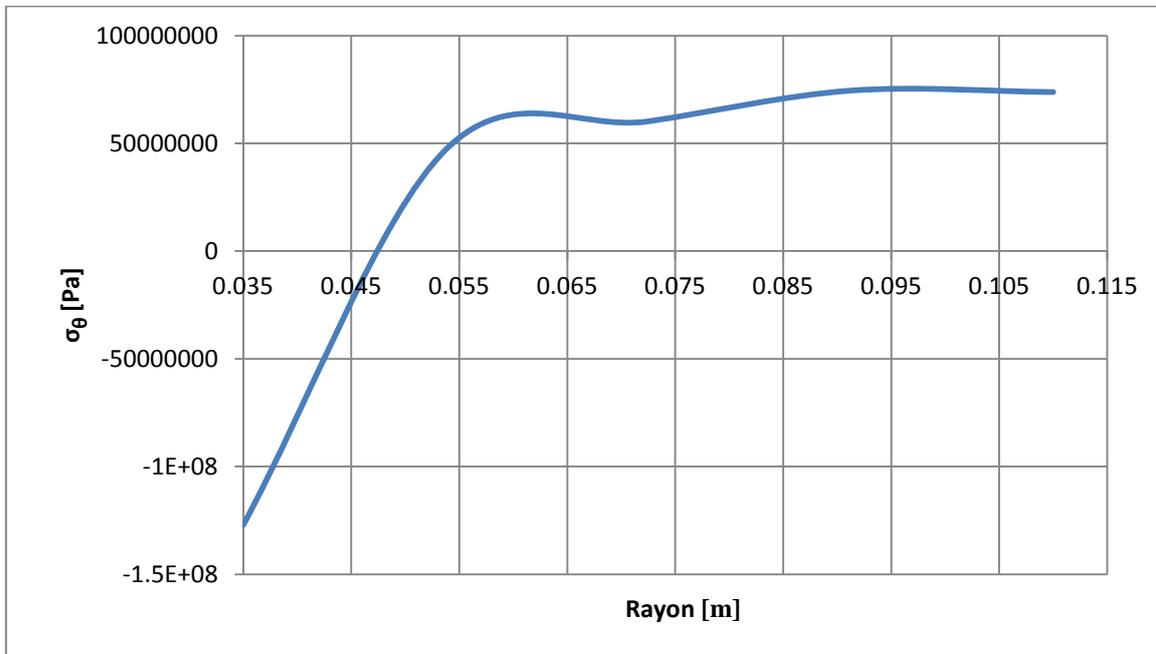
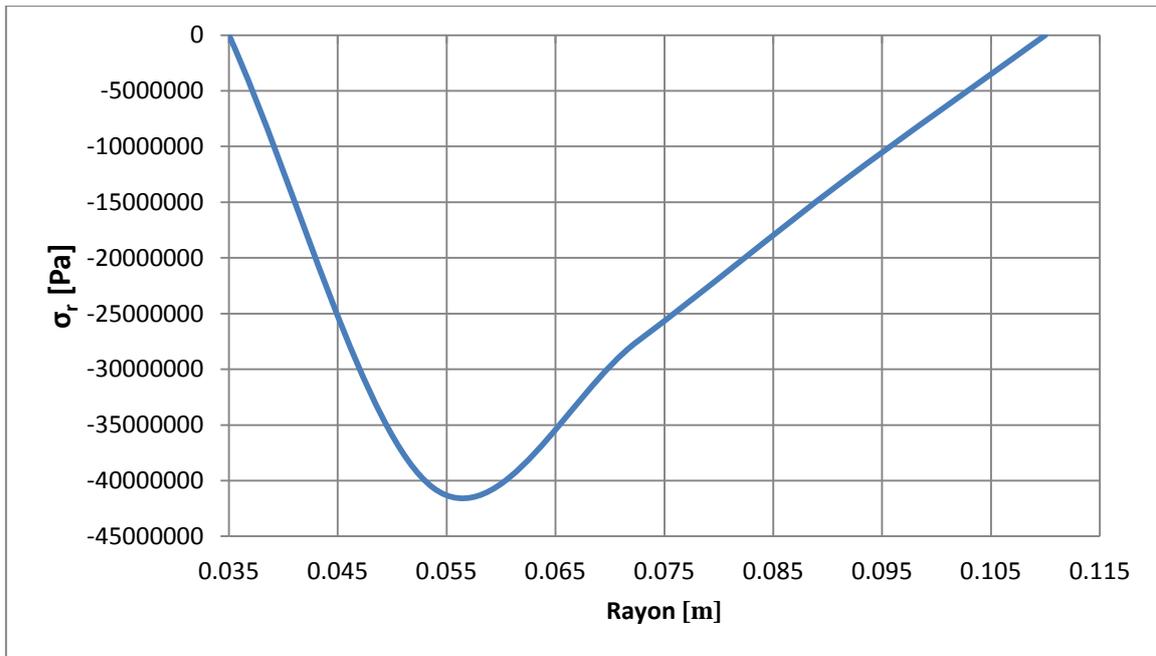
$$(\sigma_\theta)_{r=r_3} = \frac{E\alpha T}{2(1-\mu)\ln\frac{r_3}{r_2}} \left[1 - \frac{2r_3^2}{r_3^2 - r_2^2} \ln \frac{r_3}{r_2} \right]$$

$$(\sigma_\theta)_{r=r_3} = 8,773 \times 10^7 (1 - 2 \times 6,9282 \times 1,1451)$$

$$(\sigma_\theta)_{r=r_3} = 73809913 [Pa]$$

Rayon La	r_2	r_d	r_e	r_f	r_3
----------	-------	-------	-------	-------	-------

$r_{\text{oue}} [m]$	0,035	0,05375	0,0725	0,09125	0,11
$\sigma_r [Pa]$	0	-40633465,45	-27511714	-13238767	0
$\sigma_\theta [Pa]$	127109400	47090832,1	60212608,2	74485402	73809913



5. Les contraintes résultent:

Selon le principe de superposition, les contraintes qui résultent de l'application de la pression de contact et de la température seront obtenues selon:

$$(\sigma_r)_{Total} = \sigma_r(p) + \sigma_r(T^\circ)$$

$$(\sigma_\theta)_{Total} = \sigma_\theta(p) + \sigma_\theta(T^\circ)$$

Nous obtenons des nouvelles tableaux et des nouvelles courbes :

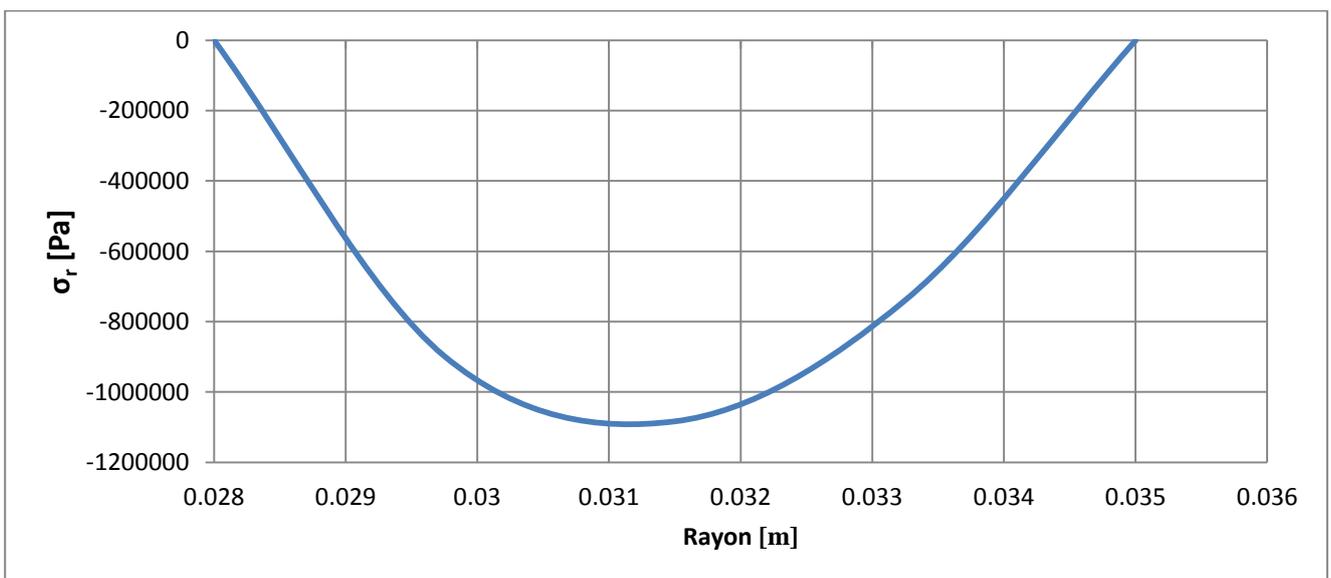
a. La contrainte radiale :

Cas de l'arbre:

$$(\sigma_r)_{Total} = \sigma_r(p) + \sigma_r(T^\circ)$$

$$\sigma_r = -2380,0444 \left(1 - \frac{7,84 \times 10^{-4}}{r^2} \right) - 8,758 \times 10^7 \left(\ln \frac{0,035}{r} - \frac{0,4856 \times 10^{-3}}{r^2} + 0,3964 \right)$$

rayon d'arbre [m]	r_1	r_a	r_b	r_c	r_2
	0,028	0,02975	0,0315	0,03325	0,035
$\sigma_r(p)$ [Pa]	0	-217,764	-499,45	-692,3	-856,84
$\sigma_r(T^\circ)$ [Pa]	0	-898182,12	-1083163	-738715	0
$(\sigma_r)_{Total}$ [Pa]	0	-898399,88	-1083662,5	-739407,3	-856,84

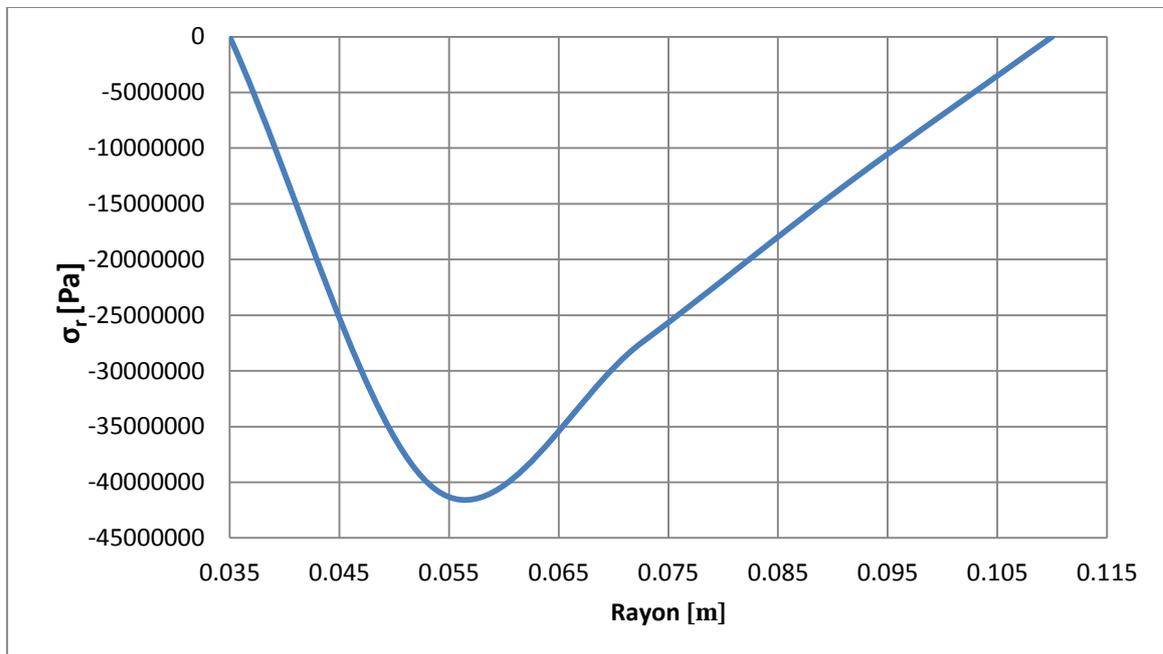


La contrainte radiale totale due à la température et la pression sur l'arbre présente un maxi de valeur absolu au rayon 0,031

Pour l'alésage :

$$\sigma_r = 0,1126 \left(1 - \frac{1,21 \times 10^{-2}}{1,225 \times 10^{-3}} \right) p - 8,773 \times 10^7 \left[\ln \frac{0,11}{r} - \frac{9,6 \times 10^{-4}}{r^2} + 7,9335 \times 10^{-2} \right]$$

Rayon La roue [m]	r_2	r_d	r_e	r_f	r_3
	0,035	0,05375	0,0725	0,09125	0,11
$\sigma_r(p)$ [Pa]	-856,84	-307,6	-125,6	-43,7	0
$\sigma_r(T^\circ)$ [Pa]	0	-40633465,45	-27511714	-13238767	0
$(\sigma_r)_{Total}$ [Pa]	-856,84	-40633772	-27511839	-13238810	0



Les contraintes radiales totales dues à la température et la pression sur l'alésage

b. Les contrainte tonjontial :

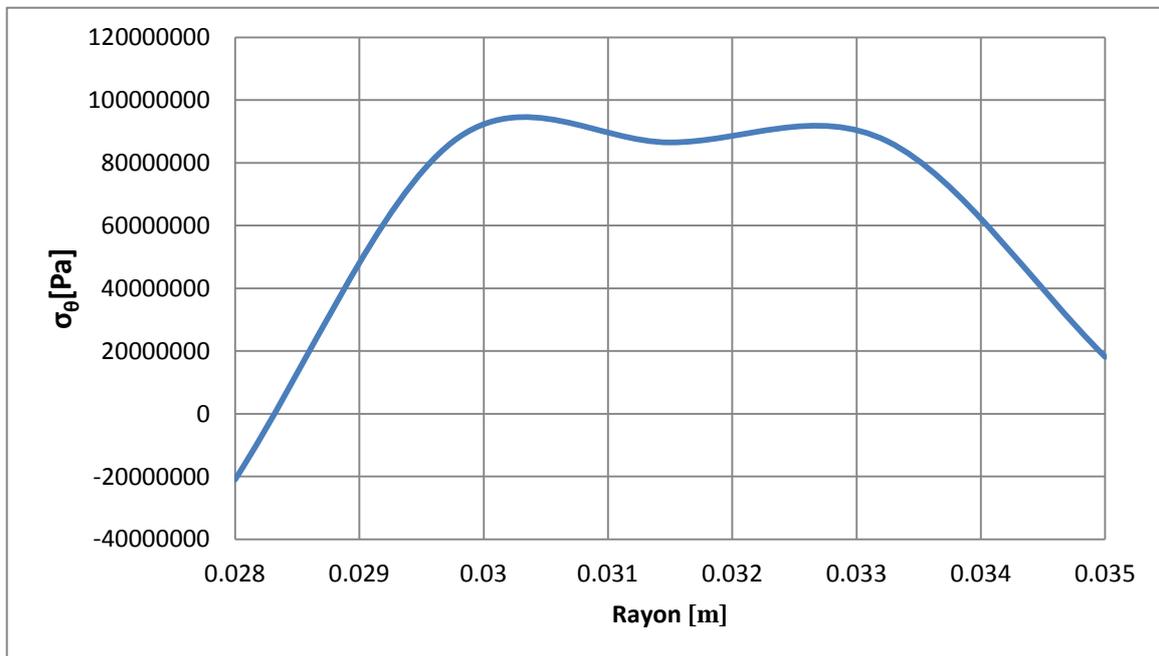
On a

$$(\sigma_{\theta})_{Total} = \sigma_{\theta}(p) + \sigma_{\theta}(T^{\circ})$$

$$(\sigma_{\theta})_{Total} = -2380,0444 \left(1 + \frac{7,84 \times 10^{-4}}{r^2} \right) + 8,758 \times 10^7 \left(-\ln \frac{0,035}{r} + \frac{0,4856 \times 10^{-3}}{r^2} - 0,6035 \right)$$

premerement pour l'arbre:

rayon d'arbre	r_1	r_a	r_b	r_c	r_2
	0,028	0,02975	0,0315	0,03325	0,035
$\sigma_{\theta}(p)$	-4760,089	-4488,29	-4260,46	-4067,67	-3903,24
$\sigma_{\theta}(T^{\circ})$	-20922000	86672671	86497877	86836183	18138791
$(\sigma_{\theta})_{Total}$	-20917240	86668183	86832116	86832116	18134888

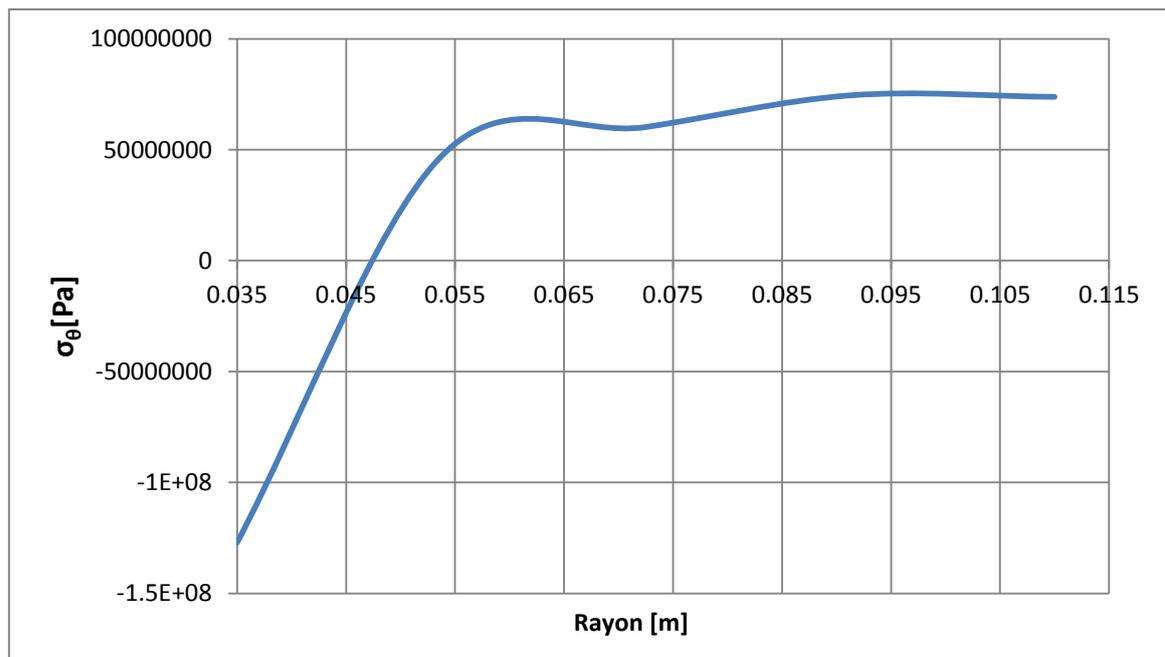


Les contraint tonjontiel total par temperatur et pression sur l'alisage

deuxièmement pour l'alésage :

$$(\sigma_{\theta})_{Total} = 0,1126 \left(1 + \frac{1,21 \times 10^{-2}}{r^2} \right) p - 8,773 \times 10^7 \left(\ln \frac{0,11}{r} - \frac{9,6 \times 10^{-4}}{r^2} + 7,9335 \times 10^{-2} \right)$$

Rayon la roue[m]	r_2	r_d	r_e	r_f	r_3
	0,035	0,05375	0,0725	0,09125	0,11
$\sigma_{\theta}(p)[Pa]$	1049,57	500,57	318,57	236,66	191,24
$\sigma_{\theta}(T^{\circ})[Pa]$	-127109400	47090832,1	60212608,2	74485402	73809913
$(\sigma_{\theta})_{Total}[Pa]$	127108351	47091332	60212926	74485638	73810104

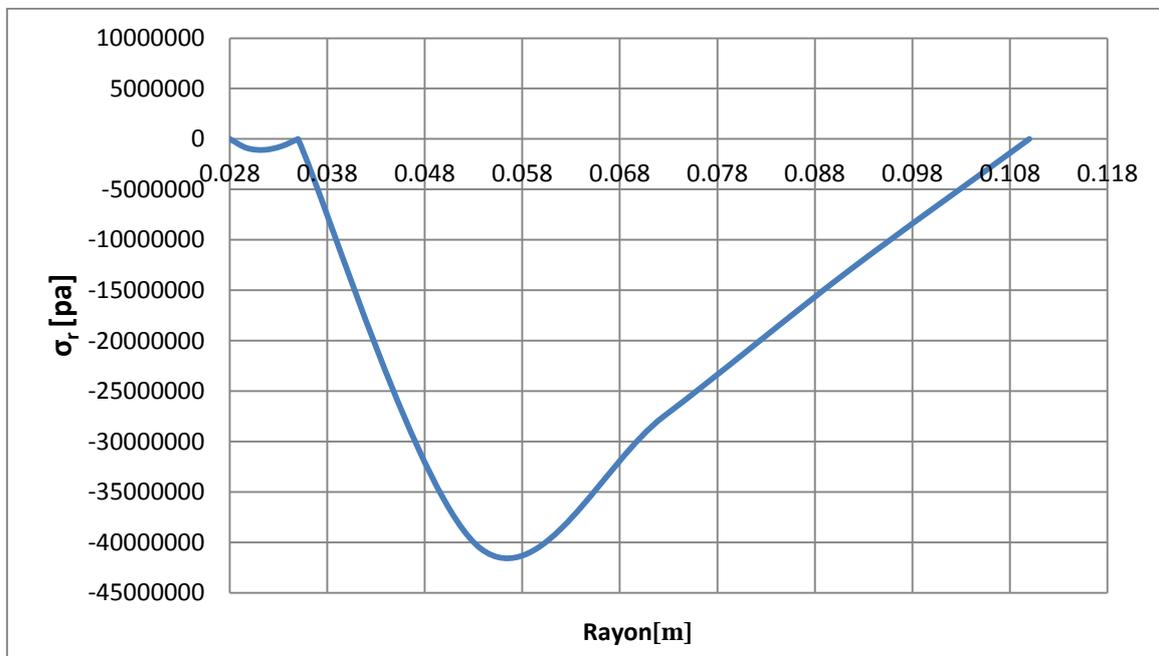


Les contraintes tangentielles résultantes des deux phénomènes sur l'alésage

On remarque qu' à cause de la température, la contraintes générée résultante continue à augmenter avec l'augmentation du rayon.

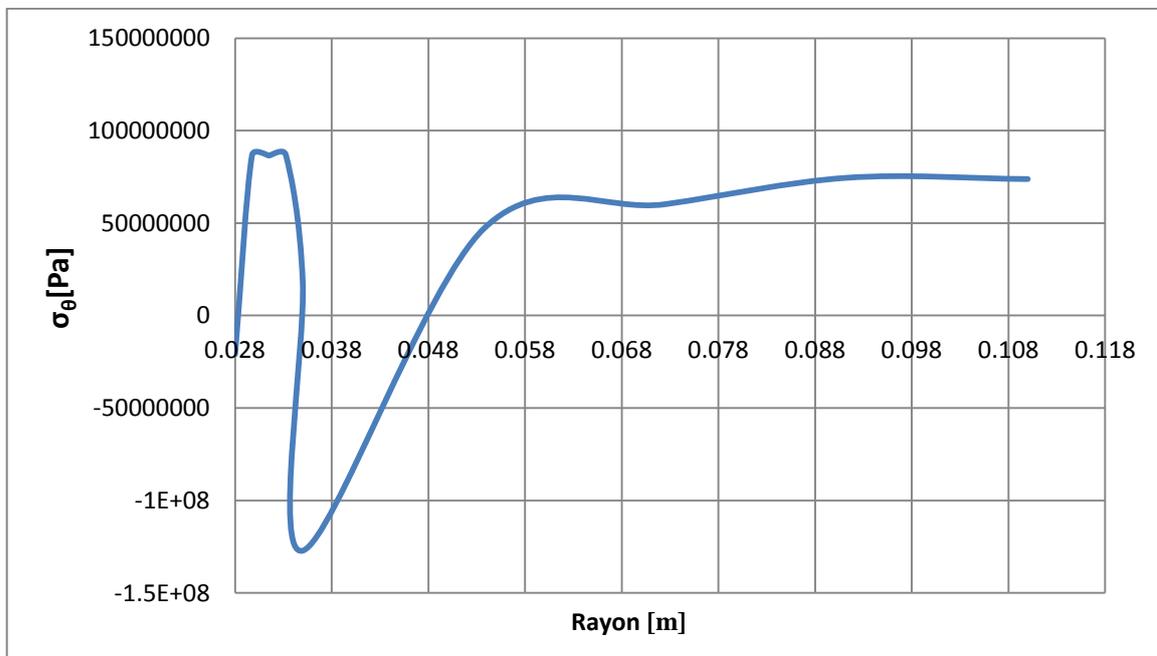
6. Les contraintes radiales totales de l'assemblage arbre-roue :

r		$(\sigma_r)_{Total}$
r_3	0,11	0
r_f	0,09125	13238810
r_e	0,0725	-27511839
r_d	0,05375	-40633772
r_2	0,035	-856,84
r_2	0,035	-856,84
r_c	0,03325	-739407,3
r_b	0,0315	-1083662,5
r_a	0,02975	-898399,88
r_1	0,028	0



7. Les contraintes tangentielles totales de l'assemblage arbre-roue :

r		$(\sigma_{\theta})_{Total}$
r_3	0,11	73810104
r_f	0,09125	74485638
r_e	0,0725	60212926
r_d	0,05375	47091332
r_2	0,035	127108351
r_2	0,035	18134888
r_c	0,03325	86832116
r_b	0,0315	86832116
r_a	0,02975	86668183
r_1	0,028	-20917240



Conclusion Générale

L'étude du comportement de l'assemblage fretté a bien montré que la pression du serrage qui résulte des différences des dimensions telles qu'à la température ambiante et d'exploitation, l'assemblage se trouve sous des précontraintes (contraintes résiduelles). L'avantage de ces précontraintes étant de s'opposer aux charges agissantes en s'opposant (en signes) aux contraintes générées par les actions extérieures. Donc, ce type d'assemblage présente bien avant son exploitation d'une réserve de résistance.

Dans la présente étude nous nous sommes juste limité à l'étude du champs de contraintes de l'assemblage et nous n'avons pas encore cherché à estimer si les contraintes et les déformations lors de l'assemblage et lors de l'exploitation due à l'assemblage peuvent induire des défaillances de types ruptures, déformations plastiques ...

L'assemblage fretté présente l'avantage d'économiser plusieurs opérations de façonnage de l'arbre et de la roue en comparaison à d'autres systèmes usuels de transmission de puissance comme l'assemblage par cannelures, par clavetage....

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- 1- [SIA, 96] Siala I.E. Modélisation mécanique des assemblages obtenus par procédé de frettage avec la prise en compte du défaut de forme, Thèse de doctorat de l'Université de Bourgogne, soutenue le 18 octobre 1996 à Auxerre, France1.
- 2- [YAN, 98] Yang, G.M., 1998. Influence de l'état de surface sur les caractéristiques d'un assemblage fretté. Thèse de doctorat ENSAM, France.
- 3- [AFN, 84] NF E22-620, Assemblage frettés sur portée cylindrique : fonction, réalisation, calcul, Jan.1984, AFNOR, Paris la Défense.
- 4- [BOU, 12] BOUTOUTAOU Hamdi . Etude d'un emmanchement fretté compte tenu de l'effet combiné des défauts de forme et d'état de surface , Thèse de doctorat de l'école nationale Algérienne polytechnique en cotutelle avec l' universite de Bourgogne, France , soutenue le 24 janvier 2012 .
- 5- Aide mémoire de résistance de matriaux ,Edition Mir.
- 6- André Chevalier, Guide du dessinateur industriel, année 2004, Edition Hachette technique .