وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

UNIVERSITE BADJI MOKHTAR **جامعة باجي مختار- عنابة-**
BADJI MOKHTAR UNIVERSITY

Faculté des Sciences de l'ingénieur **Année 2015**
Département de Génie Mécanique

MEMOIRE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de

MASTER

Etude de l' influence de la résistance thermique sous plusieurs formes sur le transfert intermittent : simulation des sièges-soupapes.

DOMAINE : SCIENCE ET TECHNIQUE

FILIERE : MASTER

SPECIALITE : ENERGETIQUE ET ENVIRONNEMENT

PRESENTE PAR : HAFFAR IMMAD

DIRECTEUR DU MEMOIRE : Dr. AZZOUZ SALAH EDDINE

DEVANT LE JURY

PRESIDENT : Pr. BOUMARAF LATRA

EXAMINATEURS : Pr. BOUMARAF LATRA

Dr. AZZOUZ SALAH EDDINE

Dr. DJIMILI ABDELOUAHEB

Dr. NAHEL ABDELAZIZE

Dédicaces

J'ai l'honneur de dédier ce modeste travail réalisé grâce à l'aide de Dieu ;

A mes chers parents, qui m'ont soutenu et m'ont donné le courage pour continuer mes études, c'est pour eux que je dois tout. Ce travail est parmi les fruits de la rigueur de leur éducation. Que dieu vous garde.

A mes très chers frères : Jalil, Chamssou et Islem.

A la femme de mon frère, sans oublié surtout leur fils mon petit adorable : Nawfel.

A tous mes chers amis : Driss, Hassouna, Bobou, Raouf,,Khalil et Khaled

Remerciements

En toute simplicité, je tiens à remercier mon Dieu de m’avoir guidé, aidé et éclairé mon chemin pour la réalisation de ce travail modeste.

Aussi, j’adresse un grand remerciement à mon encadreur Dr.Azzouz Saleh pour ses conseils et ses dirigés du début à la fin de ce travail.

Je tiens également à remercier messieurs les membres de jury pour l’honneur qu’ils m’ont fait en acceptant de siéger à ma soutenance.

Finalement, je tiens à exprimer surtout ma profonde gratitude à ma famille qui m’a toujours soutenu.

Ainsi que tout l’ensemble des enseignants qui ont contribué à ma formation au long de ma vie scolaire.

Nomenclature

a: Diffusivité thermique (m^2/s)

b Effusivité thermique ($W\ s^{-1/2}\ K^{-1}\ m^{-2}$)

C_P Chaleur spécifique (J/kg K)

f Fréquence de contact (Hz)

i Incrément spatial

L_j (j=1,2) Épaisseur de la paroi (m)

M Incrément spatial correspondant à L

n Incrément temporel

r Erreur de troncature relative

R_C Résistance thermique de contact ($K.m^2/W$)

RIC Résistance d'intermittence de contact ($K.m^2/W$)

TT, Température totale, moyenne (K)

$T^0{}_J$ (j=1,2) Températures limites imposées (K)

X : Axe du déplacement du galet $T\Delta$ Saut de température moyen (K)

$T^{\circ}_{1.2}$ Température initiale à l'interface du régime périodique établi

ΔT° Ecart de température initial du régime périodique établi

Δx,Δt, Pas d'espace (m) et de temps (s)

Θ Facteur de poids de la méthode combinée

γ Coefficient de partage de la période.

λ Conductivité thermique (W/m.K)

ρ Masse volumique (kg/m^3)

τ Période de contact (s)

	TABLE DES MATIERES	**PAGE**
DEDICACES		
REMECIEMENT		
NOMENCLATURE		***i***
INTRODUCTION GENERALE		***ii***
CHAPITRE 1 : Etude bibliographique des transferts thermique a l'interface		
Chapitre 1	**I.** Rappels sur le transfert thermique	**1**
	I.1 Quelques définitions et concepts fondamentaux	**1**
	I.1.1 Champ de température	**1**
	I.1.2 Gradient de température	**2**
	I.1.3 Flux de chaleur	**2**
	I.2 Les déférents modes de transfert de chaleur	**3**
	I.2.1Conduction	**3**
	2.1.1 Loi de Fourier	**4**
	2.1.2 Conductivité thermique	**5**
	2.1.3 L'effusivité thermique	**6**
	2.1.4 Résistance de contact	**7**
	I.2.2 Convection	**10**
	I. 2.3 Rayonnement	**11**
	I.3 Transfert de chaleur par conduction en régime permanant	**12**
	I.4 Transfert de chaleur par conduction en régime variable	**13**
Chapitre 2 : Rappels sur les méthodes numériques		
	II.1 Les équations aux dérivées partielles	**21**
	II.1.1 Classification	**21**

Chapitre 2	II.1.2 Les conditions aux limites	**23**
	II.2 Présentation de la méthode des différences finies	**23**
	II.2.1 TAYLOR BROOK	**23**
	II.2 .2 La méthode des différences finies:	**25**
	2.2.1Grille de calcul	**26**
	2..2.2Maillage non-structuré	**26**
	2.2.3Le développement en série de Taylor	**27**
	2.2.4Construction des schémas pour la dérivée d'ordre un et deux	**27**
	II.3 L'équation de conduction de la chaleur (Joseph Fourier)	**28**
	II.3.1 Le problème stationnaire	**29**
	II.3.2 Le problème non stationnaire	**31**
	3.2.1 Schéma explicit	**31**
	3.2.2 Schéma implicite	**32**
	3.2.3 Schéma de Crank-Nickolson	**33**
Chapitre 3 : Problème directe du contact intermittent		
Chapitre 3	III.1 Modèle mathématique	**34**
	III.1.1 Equation mathématique	**35**
	III.2 Equations décrivant le transfert conductif à travers le contact périodique	**35**
	III.2.1 Introduction	**35**
	III.2.2 Modèle thermique en contact imparfait	**36**
	III.2.3 Solution numérique – Schéma de Crank / Nicolson	**41**
	III.3 Algorithme de résolution	**46**
	III.4 Résultats	**49**
	III.4.1Champ de température	**49**
	4. 1.1Cas du contact parfait	**49**

	4. 1.2 Cas de contact imparfait	**50**
	- Résistance statique	**50**
	- Résistance de forme parabolique	**51**
	- Résistance de forme triangulaire	**53**
	- Résistance de forme sinusoïdale	**54**
	III.4.2 Saut de température	**56**
	III.4.3 Flux de chaleur :	**57**
	III.4.4 Résistance du contact	**59**
	Conclusion générale	**61**

Introduction

L'étude que nous comptons mener sur le contact thermique intermittent vient en complément des travaux déjà réalisés. Au départ le sujet a suscité de l'intérêt d'abord pour les aspects théoriques notamment le champ moyen puis les aspects expérimentaux. Les travaux réalisés, tant sur le plan théorique qu'expérimental, restent insuffisants pour décrire le comportement thermique du contact intermittent. L'application la plus connue de est celle du système siège-soupape dans les moteurs à combustion ou dans les compresseurs. Le modèle que nous retenons, pour simuler la fonction de la soupape, considère deux barreaux de même dimension sont mis en contact intermittent. La période du contact intermittent peut être divisée en deux phases, la première concerne la phase de contact, la deuxième concerne la phase de non contact. Les durées des phases ne sont pas obligatoirement égales. Il est indispensable alors d'introduire dans l'étude un coefficient de partage de la période γ, définit comme étant le rapport entre la durée de contact sur la période τ. Les études faites auparavant ont montré que l'intermittence de contact introduit une pseudo-résistance de contact, dans le cas d'un contact parfait. Un contact est dit parfait, si la résistance de contact lors de la phase de contact est nulle. Dans le cas d'un contact imparfait, les études qui ont été menées considère que lors de la phase de contact la résistance est constante R_c, et il a été montré que la résistance de contact intermittent est une fonction de la R_c et du coefficient de partage de la période. Dans la présente étude, nous comptons poursuivre les études, mais cette fois ci on tient compte de l'évolution de la surface de contact via la déformation des aspérités. Cette déformation sera considérée élastique de telle sorte que, les aspérités reviennent à leur forme initiale lors de la phase de non contact. De ce fait on aura à traiter plusieurs formes de résistance de contact et ce selon les formes géométriques des aspérités. Nous retenons dans cette étude cinq formes de résistance thermique (parfait, échelon, parabolique, triangulaire, et sinusoïdale). Le but est de se rapprocher au maximum au cas réel, en étudiant la majorité des configurations envisageables.

Ce mémoire se compose de trois chapitres. Le premier chapitre fait le point sur l'étude des aspects thermique à l'interface de contact, dans le but de bien apprécier les rôles respectifs des paramètres de contact servant à décrire la condition thermique d'interface. Le deuxième chapitre est consacré à la présentation et la classification des équations aux drivées partielles (EDP) et on rappel aussi la méthode des différences finies, méthode que nous avons choisie pour résoudre le problème du contact intermittent. Le troisième chapitre est consacré à la présentation du modèle direct du problème de contact thermique intermittent, suivie des résultats obtenus relatifs à l'influence de la configuration des aspérités sur la forme des résistances thermique à l'interface du contact intermittent.

Ce chapitre a pour objectif de faire le point sur l'étude des aspects thermique a l'interface de contact intermittent (siège-soupape) d'une génération de chaleur par frottement, dans le but de bien apprécier les rôles respectifs des paramètres de contact servant à décrire la condition thermique d'interface

Lorsque plusieurs solides sont en contact, on constate que le transfert de chaleur entre ces solides est non seulement imparfait, mais également difficile à caractériser. En effet la quantité de chaleur traversant l'interface des solides dépend de plusieurs choses :

- Etat des surfaces de contacts
- Propriétés physique des solides en contact
- Propriétés physique d'un fluide interstitiel

Par rapport au contact théorique parfait, l'imperfection du transfert de la chaleur est représentée par la notion de résistance thermique de contact (RTC). La valeur de cette résistance rend compte de l'effet résistif que subit le transfert de chaleur au niveau de l'interface.

Pour cela on doit d'abord faire un rappel sur le transfert de chaleur afin de faciliter votre compréhension.

I. Rappels sur le transfert thermique :

Un transfert de chaleur est un transit d'énergie causé par une déférence de température. Cette discipline est également appelée transfert thermique ou thermocinétique. Deux corps ayant la même température sont dits « équilibre thermique ». Si leurs température est différente, le corps le plus chaud cédé de la chaleur au corps le plus froid. L'étude des transferts de chaleur complète l'étude de la thermocinétique en d'écrivant la manière dont s'opère le transfert d'énergie. A la différence de la thermodynamique, la thermocinétique fournit des informations sur le mode de transfert en situation de non équilibre ainsi que sur les valeurs de flux de chaleur. Mais le transfert de chaleur s'appuie sur les lois et concept de la thermodynamique.

I.1 Quelques définitions et concepts fondamentaux:

I.1.1 Champ de température :

Les transferts d'énergie sont déterminés à partir de l'évolution dans l'espace et dans le temps de la température: T=f (x,y,z,t). La valeur instantanée de la température en tout point de l'espace est scalaire appelée champ de température
Nous distinguerons deux cas :
- Champ de température indépendant du temps : le régime est dit permanent ou stationnaire.

- Evolution du champ de température avec le temps : le régime est dit variable ou transitoire.

I.1.2 Gradient de température :

Si l'on réunit tous les points de l'espace qui ont la même température, on obtient une surface dite surface isotherme. La variation de température par unité de longueur est maximale le long de la normale à la surface isotherme. Cette variation est caractérisée par le gradient de température :

$$\overrightarrow{grad}(T) = n\frac{\partial T}{\partial n} \qquad (I.1)$$

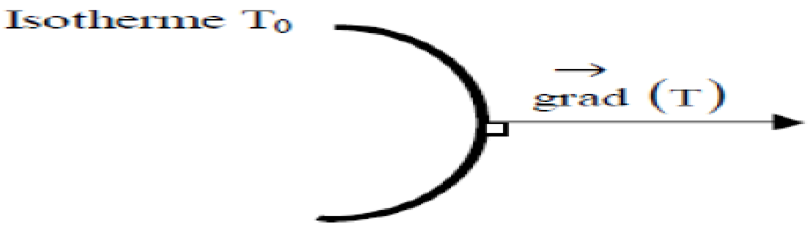


Figure 1.1 : Isotherme et gradient thermique

I.1.3 Flux de chaleur :

La chaleur s'écoule sous l'influence d'un gradient de température des hautes vers les basses températures. La quantité de chaleur transmise par unité de temps et par unité d'aire de la surface isotherme est appelée densité de flux de chaleur :

$$q = \frac{1}{s}\frac{d\phi}{dt} \qquad (I.2)$$

On appelle flux de chaleur la quantité de chaleur transmise sur la surface S par unité de temps :

$$Q = \frac{d\phi}{dt} \qquad (I.3)$$

I.2 Les déférents modes de transfert de chaleur :

Il est habituel dans l'étude des transferts thermiques, de distinguer trois grandes parties se rattachant chacune à un mode de transfert particulier de la chaleur. La conduction, la convection et le rayonnement. Chacun de ces modes étant lui-même lié à un processus physique bien déterminé. En effet, comme l'énergie thermique d'un milieu matériel correspond à l'énergie cinétique de ses constituants fondamentaux ayant une certaine liberté de mouvement (molécules, atomes, électrons libres,) ceux-ci pourront échanger tout ou une partie de leur énergie thermique, c'est- à-dire gagner ou perdre l'énergie cinétique:

- Soit par interaction directe avec les particules voisines (choc de molécules par exemple), ce qui correspond à la conduction.
- Soit par absorption ou émission de radiations électromagnétiques, ce qui correspond au rayonnement.

Enfin dans le cas d'un gaz ou d'un liquide, on considère également, mais cette fois à l'échelle macroscopique, comme un mode de transfert de chaleur appelé convection, les échanges résultants du déplacement des diverses parties d'un fluide à des températures différentes.

I.2.1Conduction :

C'est le transfert de chaleur au sein d'un milieu opaque, sans déplacement de matière, sous l'influence d'une différence de température. La propagation de la chaleur par conduction à l'intérieur d'un corps ou entre des corps en contact s'effectue selon deux mécanismes distincts: une transmission par les vibrations des atomes ou molécules et une transmission par les électrons libres.

La théorie de la conduction repose sur l'hypothèse de Fourier : la densité de flux est proportionnelle au gradient de température :

$$\vec{\varphi} = -\lambda S \overrightarrow{grad}(T) \qquad \text{(I.4)}$$

Ou sous forme algébrique :

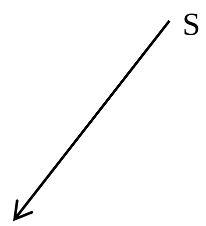
$$\varphi = -\lambda . S \frac{dT}{dx} \qquad \text{(I.5)}$$

Avec : $\boldsymbol{\varphi}$ Flux de chaleur transmis par conduction (W)

$\boldsymbol{\lambda}$ Conductivité thermique du milieu ($\mathrm{W.m^{-1}.°C^{-1}}$)

$\boldsymbol{x}$ Variable d'espace dans la direction du flux (m)

S Aire de la section de passage du flux de chaleur (m^2)



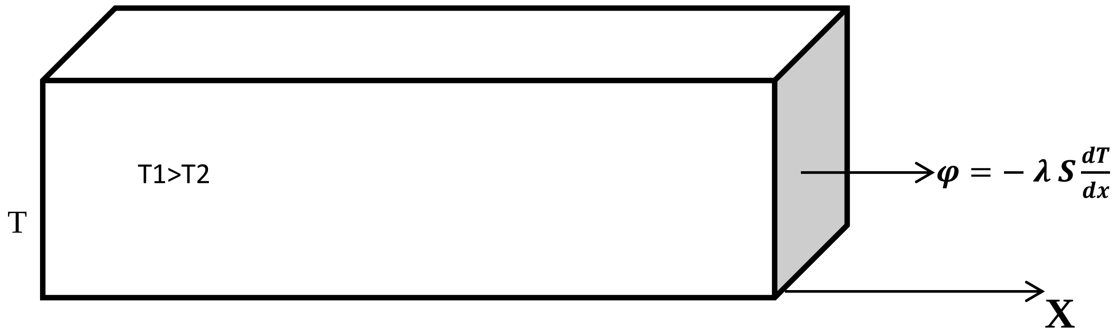


Figure 1.2 : Représentation schématique du phénomène de conduction.

2.1.1 Loi de Fourier :

Fourier apparente la conduction de chaleur à l'écoulement d'un fluide qui a lieu des régions chaudes vers les régions froides et dont les seules manifestations dans la matière se traduisent par des variations de températures (effet macroscopique). Les dilatations des dispositifs seront négligées.

Considérons un milieu cylindrique homogène de section S et de longueur L (figure I.3). Les deux faces du cylindre sont maintenues respectivement à la température T2 (source chaude) et T1. (Source froide). Il se produit un transfert d'énergie orienté de la source chaude vers la source froide. Le milieu étant homogène, en régime permanent, la température se répartit de manière uniforme.

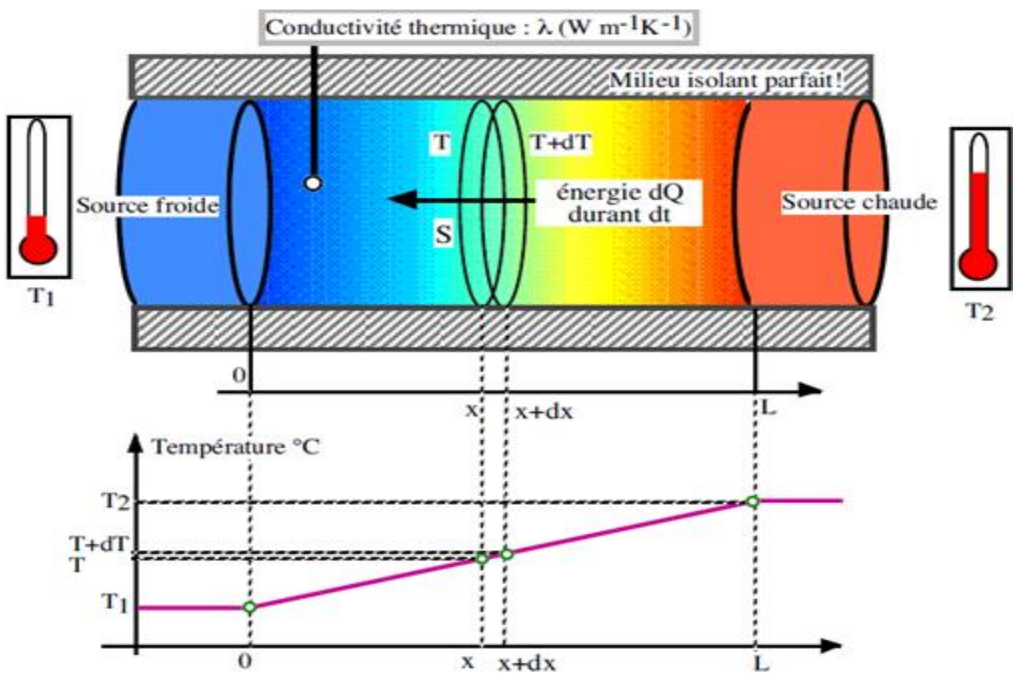


Figure 1.3 : Représentation schématique du la loi de Fourier

En régime permanent, la loi de Fourier exprime la quantité de chaleur élémentaire dQ qui traverse en x une surface S d'épaisseur dx durant le temps dt :

$$dQ = -\lambda S \frac{dT}{dx} dt \qquad \text{(I.6)}$$

Avec :

dQ : énergie élémentaire en Joule
λ : Conductivité thermique du matériau en W.m-1.K-1 (voir abaques de l'annexe)
S : section en m2
dt : temps élémentaire en s
$\frac{dT}{dx}$: Gradient de température en x en K.m-1

2.1.2 Conductivité thermique :

La conductivité thermique ou conductibilité thermique est une grandeur physique caractérisant le comportement des matériaux lors du transfert thermique par conduction. Notée λ (ou k en anglais), cette grandeur apparaît par exemple dans la loi de Fourier . Elle représente l'énergie (quantité de chaleur) transférée par unité de surface et de temps sous un gradient de température de 1 kelvin par mètre

Les métaux ont des conductivités élevées entre 20 et 418 Watt par mètre-kelvin

Matériaux	Conductivité thermique W/m.K. Valeur pour une température de 20 °C
Acier doux	46
Acier inoxydable	29
Aluminium	237
Al-sic	150-200
Argent	418
Cuivre	390
Etain	66.6
Fer	80
Fonte	50
Or	317
Platine	71.6
Plomb	35
Titane	20
Zinc	116

Tableau 1.1 : conductivité thermique de quelque matériau.

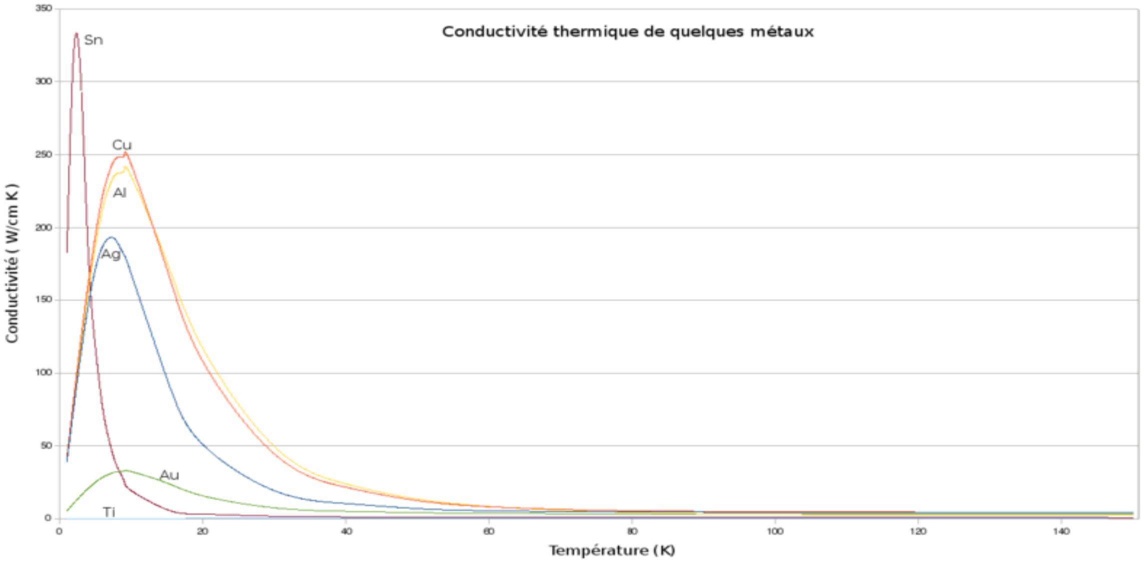


Figure 1.4 conductivité thermique de quelque matériau en fonction de température

2.1.3 L'effusivité thermique :

L'effusivité thermique d'un matériau caractérise sa capacité à échanger de l'énergie thermique avec son environnement. Cette capacité ne signifie pas que la température du mur s'élevé rapidement, puisqu'une grande effusivité implique une valeur élevée la capacité thermique, ce qui garantit de faibles variations de température de paroi et une grosse quantité d'énergie stockée

Elle est donnée par :

$$E = \sqrt{\rho \lambda c} \tag{I.7}$$

Où:

λ : est la conductivité thermique du matériau (W/m.K)

ρ : La masse volumique du matériau Kg.m^{-3}

C : la capacité thermique massique du matériau (J.Kg^{-1}.k^{-1})

- **Sens physique :**

Le théorème essentiel dit « théorème du contact thermique » est le suivant :

Soit un matériau 1, d'effusivité E1 à la température T1, mis en contact avec un matériau 2 d'effusivité E2 et de température T2. On suppose que la mise en contact se fait par une surface plane parfaitement lisse. On néglige donc la résistance de contact. Quelle est immédiatement après le contact la température de surface des deux matériaux ?

La réponse n'est évidemment ni T_1 ni T_2, mais assez vraisemblablement entre les deux. Ce n'est pas non plus $\frac{T_1+T_2}{2}$ car on conçoit que la diffusivité importe, ainsi que la capacité thermique des matériaux. La réponse est :

$$T = \frac{E_1 T_1 + E_2 T_2}{E_1 + E_2}$$

Avec T, T_1, T_2 dans la même unité de température qui peut être le kelvin ou le degré Celsius. Autrement dit, la température de contact est la moyenne des températures des deux corps pondérées par leur effusivité respective.

- **Lien et différence avec la diffusivité thermique :**

Ne pas confondre l'effusivité thermique avec la diffusivité thermique $\boldsymbol{D = \frac{\lambda}{\rho c}}$ en m^2/s. Les deux valeurs sont évidemment liées :

$$E = \sqrt{D\rho c} \tag{I.8}$$

Toutes deux sont les grandeurs essentielles pour quantifier l'inertie thermique.

À la différence de la diffusivité thermique qui décrit la rapidité d'un déplacement des calories à travers la masse d'un matériau, l'effusivité décrit la rapidité avec laquelle un matériau absorbe les calories. Plus l'effusivité est élevée, plus le matériau absorbe d'énergie sans se réchauffer notablement. Au contraire, plus elle est faible, plus vite le matériau se réchauffe.

2.1.4 R**ésistance de contact :**

- **Définition de la Résistance Thermique de Contact :**

Lorsque deux corps à températures différentes sont mis en contact, il se produit des échanges thermiques à leur interface. Idéalement, le contact est considère parfait, c'est-a-dire qu'il n'existe pas de discontinuités au niveau de la zone de contact. Dans la pratique, les rugosités existant à la surface des corps métalliques modifient la zone d'échange en la réduisant (figure1.5). La zone de contact réelle devient alors le lieu de transfert privilégie du flux de chaleur (si le milieu interstitiel est peu conducteur). La réduction de la section de contact force donc le flux de chaleur à transiter par les zones de contact réelles provoquant ainsi la constriction des lignes de flux (courbures). Cette situation non idéale de contact est à l'origine de la Résistance Thermique de Contact (RTC).

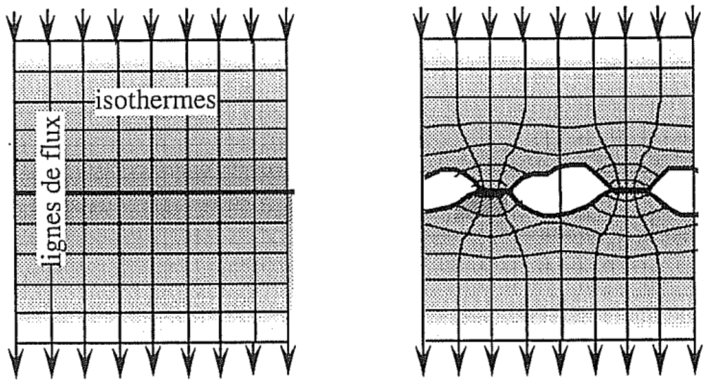


Figure 1.5: Représentation de l'interface de contact, cas idéal et cas réel

Le transfert de chaleur a l'interface de contact est donc caractérise par la RTC, généralement représentée par une analogie a l'électricité : une différence de température entre deux points génère une densité de flux qui traverse une résistance thermique. Elle est modélisée par une conductance de contact ou un coefficient d'échange h (inverse de la RTC), une discontinuité de température à l'interface ΔT et une densité de flux q. La relation liant la RTC à ces deux grandeurs est donnée par l'équation

$$\begin{cases} q = h\Delta T & \text{(I.9)} \\ h = \frac{1}{RTC} & \text{(I.10)} \end{cases}$$

Si on considère le cas d'un contact entre deux solides avec des transferts thermiques monodimensionnels et des conditions de température imposée au loin de l'interface dans chaque matériau, il existe une zone hétérogène imposée par les états des surfaces en contact mettant en jeu un fluide interstitiel, des contacts solide-solide et les différentes couches superficielles liées à chaque matériau. De part et d'autre de cette zone s'établit une seconde zone dite « zone perturbée », délimitée par deux plans théoriques. La chaleur transmise par conduction dans la zone hétérogène emprunte deux voies de passage : la voie solide et la voie fluide telles que représentées sur la figure. La différence de conductivité entre les deux voies de passage génère un champ de constriction dans la zone perturbée qui augmente localement la valeur de la résistance thermique traversée par le flux. De plus, le calcul montre que pour chacune de ces deux voies, les champs de température sont différents.

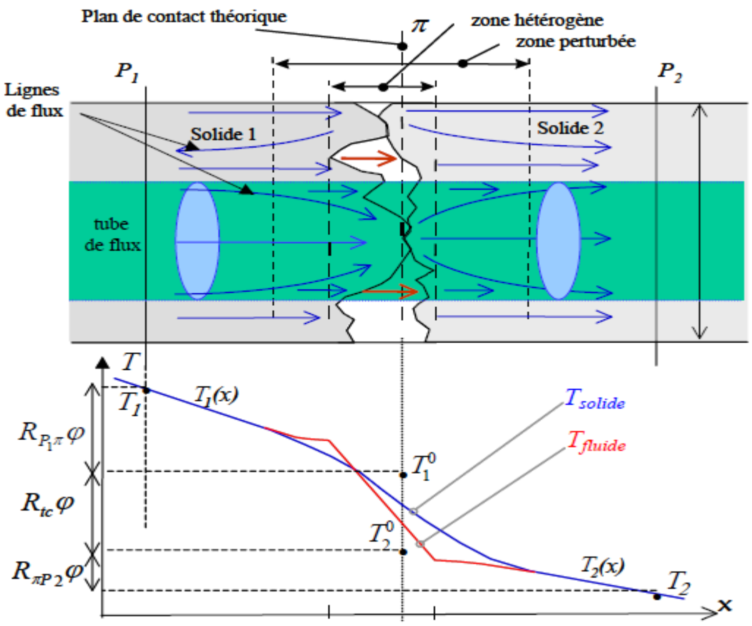


Figure 1.6 : Schéma de principe de l'hypothèse de résistance thermique de contact

Pour contourner ce problème de non unicité de la température, une température est extrapolée depuis la zone non perturbée en partant des plans P1 et P2 situés en amont et en aval de la zone perturbée jusqu'au plan théorique de contact noté π. Deux températures superficielles d'interface distinctes notées T°1 et T°2 sont alors obtenues. Dans le cas statique et en se plaçant à un point de vue macroscopique, le contact se réalise uniquement au niveau du plan (π), la résistance thermique totale traversée par une densité de flux φ peut se décomposer de la manière suivante :

$$R_{P_1P_2} = \frac{T_1 - T_2}{\varphi} = \frac{T_1 - T_1^0}{\varphi} + \frac{T_1^0 - T_2^0}{\varphi} + \frac{T_2^0 - T_2}{\varphi} \quad \textbf{(I.11)}$$

La première et la troisième résistances sont les résistances des parois respectivement comprises entre les plans P1 et π d'un côté et π et P2 de l'autre. La différence entre la résistance réelle rencontrée et la résistance des parois de chaque côté de l'interface définit « l'hypothèse de résistance thermique de contact ». La résistance thermique de contact s'exprime comme le rapport du saut de température sur la densité de flux qui la traverse :

$$R_{TC} = \frac{T_1^0 - T_2^0}{\varphi} \quad (I.12)$$

La résistance de contact thermique traduit ainsi l'imperfection du contact. Elle exprime notamment le grand déséquilibre entre le contact réel et le contact nominal. Le rapport des deux est appelé « taux réel de contact ». Sa valeur est généralement faible (quelques pourcents), voire très faible (quelques centièmes de pourcent). En plus du taux réel de contact, il convient de retenir que la RTC dépend de la topographie des surfaces en contact (densité des points de contact, distance entre les plans moyens de contact, …) de la nature des matériaux (conductivités, microduretés, lois de comportement, …), de la nature du fluide interstitiel, de sa pression, des niveaux thermiques ainsi que des différentes couches sub-surfaciques telles que les couches d'oxyde.

- **Domaine de la valeur RTC :**

Dans le cas du contact statique trois types de résistances sont observés :

1er type : Les solides sont pressés l'un contre l'autre et en raison de l'irrégularité des surfaces, un milieu interstitiel mauvais conducteur (vide, gaz) subsiste entre les zones de contact.
Le domaine de résistance de contact est :
- 10^{-5} KW^{-1} m2 à 10-^{4} KW^{-1} m^2 pour les surfaces rugueuses présentant une bonne planéité
- 10^{-4} KW^{-1} m^2 à 10^{-3} KW^{-1} m^2 pour des surfaces rugueuses présentant des ondulations de grande longueur d'onde.
2ème type : Les solides avec leurs irrégularités de surfaces sont encore accolés mais le milieu interstitiel est plus conducteur que dans le premier type. Il contient un fluide (graisse conductrice par exemple) ou une colle (résine conductrice) ou une brasure. Les défauts les plus importants sont liés à l'existence de zones sans adhésion (défauts surfaciques) de bulles gazeuses, ou de fissures (défauts volumiques). La résistance se trouve dans le domaine de 10-5 KW^{-1} m^2 à 10^{-4} KW^{-1} m^2
3ème type : Le contact entre les solides est beaucoup plus intime, il s'effectue par dépôt de l'un des solides sur l'autre ou par fusion des deux milieux.
Les défauts se situent à l'échelle du grain ou des frontières de grain, ils peuvent être dus à la formation de composés intermétalliques de conductivité médiocre, à la présence de lacune ou d'impuretés.
Le domaine de résistance de contact est encore plus bas et se situe autour de 10^{-7} KW-^{1}m^2 et même bien en dessous.

I.2.2 Convection :

Si la convection, qui est la propagation de la chaleur dans les fluides, se fait par proximité moléculaire, elle est également complétée par le mouvement des fluides qui peut être naturel ou forcé.
- La convection naturelle est due aux différences locales de masse volumique
- La convection forcée est créée par un mécanisme (pompe, ventilateur…)

- **Loi de Newton :**

Cette loi exprime l'échange de chaleur qui existe entre une plaque chaude (à la température T2) et un fluide (à la température T1).

$$\varphi = hS(T_2 - T_1) \qquad (I.13)$$

φ : Flux thermique (W)
S : Surface d'échange (m^2)
T_1 : Température de la plaque
T_2 : Température du fluide

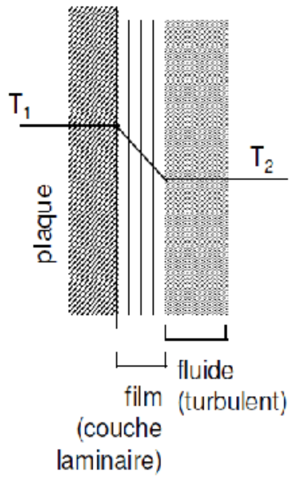


Figure 1.7 : Transfert de la chaleur par convection

I.2.3 Rayonnement :

C'est la quantité d'énergie cédée par un corps rayonnant par l'intermédiaire d'ondes électromagnétiques comprises entre 0,04 et 800 µm : c'est dans cette plage de longueurs d'ondes qu'à lieu la plus grande partie de l'énergie calorifique rayonnée (la lumière visible, quant à elle, correspond à la plage des longueurs d'ondes comprises entre 0,4 et 0,8 µm).

Ce mode de transfert de chaleur ne nécessite aucun support matériel puisque la chaleur se transmet d'un corps à un autre par le moyen d'ondes électromagnétiques.

Longueur d'onde et fréquence, ces deux valeurs sont liées par la relation :

$$\lambda = \frac{c}{F} \tag{I.14}$$

Avec :
$\boldsymbol{\lambda}$: longueur d'onde [m]
F : fréquence [Hz]
C : vitesse de propagation [m/s] (dépend du milieu, dans le vide c = 300000 km/s)

I.3 Transfert de chaleur par conduction en régime permanant :

- **L'équation de la chaleur :**

Dans sa forme monodimensionnelle, elle décrit le transfert de chaleur unidirectionnel au travers d'un mur plan :

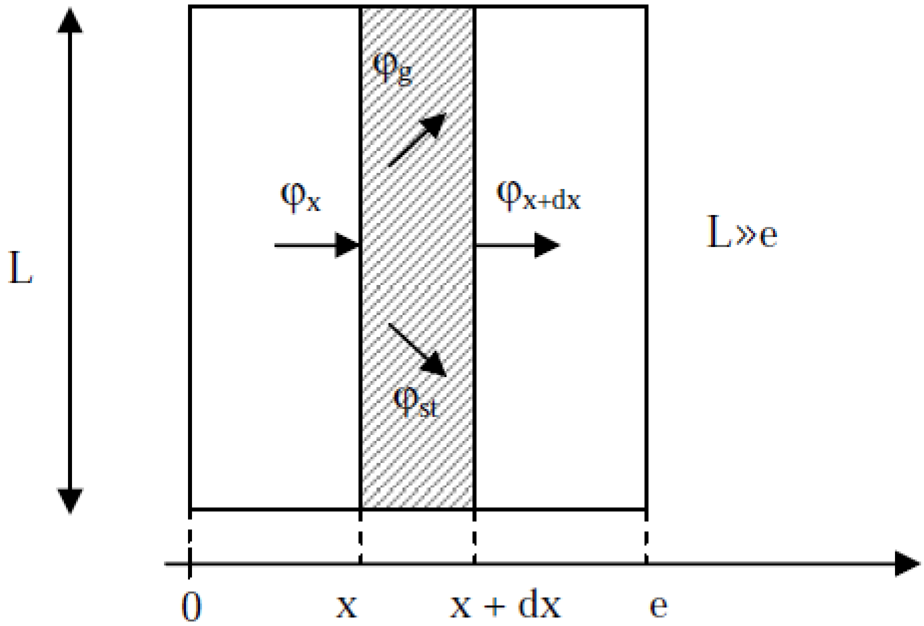


Figure 1.8 : Bilan thermique sur un système élémentaire

Considérons un système d'épaisseur dx dans la direction x et de section d'aire S normalement à la direction
Ox. Le bilan d'énergie sur ce système s'écrit :

$$\varphi_x + \varphi_g = \varphi_{x+dx} + \varphi_{st} \tag{I.15}$$

Avec

$$\varphi_x = -\left(\lambda\, s\,\frac{\partial T}{\partial x}\right)_x \tag{I.16}$$

Et

$$\varphi_{x+dx} = -\left(\lambda\, s\,\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x+dx} \tag{I.17}$$

$$\varphi_g = q\ s\ dx \tag{I.18}$$

$$\varphi_{st} = \rho c s dx\frac{\partial T}{\partial t} \tag{I.19}$$

En reportant dans le bilan d'énergie et en divisant par dx, nous obtenons :

$$\frac{\left(\lambda\, s\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x+dx} - \left(\lambda\, s\frac{\partial T}{\partial x}\right)_x}{dx} + qs = \rho cs\,\frac{\partial T}{\partial x} \tag{I.20}$$

Soit

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_s \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z}\right) + q = \rho c s \frac{\partial T}{\partial t} \qquad (I.21)$$

Cette équation peut se simplifier dans un certain nombre de cas :

a) Si le milieu est isotrope : $\lambda x = \lambda y = \lambda z = \lambda$

b) S'il n'y a pas de génération d'énergie à l'intérieur du système : q = 0

c) Si le milieu est homogène, l n'est fonction que de T.

Les hypothèses a) + b) +c) permettent d'écrire :

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) + \frac{d\lambda}{dT}\left(\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)^2\right) = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \qquad (I.22)$$

d) Si de plus λ est constant (écart modéré de température), nous obtenons l'équation de Poisson :

$$a\nabla^2 T = \frac{\partial T}{\partial t} \qquad (I.23)$$

Le rapport $a = \frac{\lambda}{\rho c}$ est appelé la diffusivité thermique ($m^2.s^{-1}$) qui caractérise la vitesse de propagation d'un flux de chaleur à travers un matériau.

e) En régime permanent, nous obtenons l'équation de Laplace :

$$\nabla^2 T = 0 \qquad (I.24)$$

Par ailleurs, les hypothèses a), c) et d) permettent d'écrire :

- Equation de la chaleur en coordonnées cylindriques :

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) + \frac{q}{\lambda} = \frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (I.25)$$

Dans le cas d'un problème à symétrie cylindrique où la température ne dépend que de r et de t, l'équation peut s'écrire sous forme simplifiée :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{q}{\lambda} = \frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (I.26)$$

I.4 Transfert de chaleur par conduction en régime variable :

Conduction unidirectionnelle en régime variable sans changement d'état :

- **Milieu à température uniforme :**

On va étudier le transfert de chaleur vers un milieu à température uniforme, ce qui est a priori contradictoire car il est nécessaire qu'il y ait un gradient thermique pour qu'il se produise un transfert de chaleur. Cette approximation du milieu à température uniforme peut néanmoins être justifiée dans certains cas que l'on va préciser. Soit par exemple la trempe d'une bille métallique qui consiste à immerger une bille initialement à la température Ti dans un bain à température T_0 maintenue constante. Si l'on suppose que la température à l'intérieur de la bille est uniforme, ce qui sera d'autant plus vrai que sa dimension est petite et sa conductivité thermique élevée, on peut écrire le bilan thermique de cette bille entre deux instants t et t + dt:

$$-hS(T - T_0) = \rho cV \frac{dT}{T-T_0} \qquad Soit\ \frac{dT}{T-T_0} = -\frac{hS}{\rho cV} \tag{I.27}$$

D'où :

$$\frac{T-T_0}{T_i-T_0} = exp\left(-\frac{hS}{\rho cV}t\right) \tag{I.28}$$

On remarque que le groupement $\frac{\rho cV}{hS}$ homogène à un temps, on l'appellera t la constante de temps du système :

$$\tau = \frac{\rho cV}{hS} \tag{I.29}$$

Cette grandeur est fondamentale dans la mesure où elle donne l'ordre de grandeur de temps du phénomène physique, on a en effet : $\frac{T-T_0}{T_i-T_0} = exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$

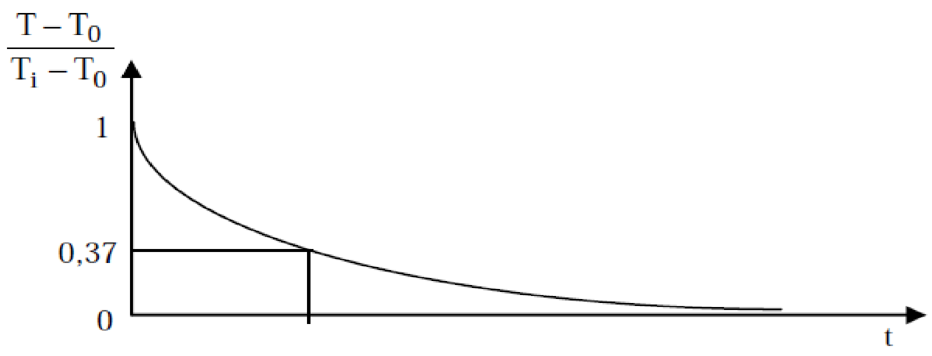


Figure 1.9 : évolution de la température d'un milieu a température uniforme

Il est toujours intéressant en physique de présenter les résultats sous forme adimensionnelle, deux nombres adimensionnels sont particulièrement important en régime variable :

- Le nombre de Biot :

$$Bi = nombre\ de\ Biot = \frac{Résistance\ thermique\ interne}{Résistance\ thermique\ externe} = \frac{\frac{\ell}{\lambda S}}{\frac{1}{hS}}$$

ℓ est la dimension

Caractéristique du milieu, ℓ = r pour une sphère.

Soit : $$Bi = \frac{h\ell}{\lambda} \qquad \text{(I.30)}$$

L'hypothèse d'uniformité de la température est justifiée lorsque Bi < 0,1 .

- Le nombre de Fourier : $$Fo = \frac{at}{\ell^2} \qquad \text{(I.31)}$$

Le nombre de Fourier caractérise la pénétration de la chaleur en régime variable. La définition de ces deux nombres permet d'écrire l'expression de la température de la bille sous la forme

$$\frac{T-T_0}{T_i-T_0} = \exp(-BiFo)$$

- **Milieu semi-infini**

Un milieu semi-infini est une paroi d'épaisseur suffisamment grande pour que la perturbation sur une face ne soit pas ressentie par l'autre face. Un tel système représente l'évolution d'un mur d'épaisseur finie pendant un temps suffisamment court pour la perturbation crée sur une face n'ait pas atteint l'autre face(vrai tout le temps que la température de l'autre face n'est pas **variée).**

- ***Température constante imposée en surface***

Méthode : Transformée intégrale de Laplace sur le temps et inversion par les tables.

Le milieu semi-infini est initialement à la température uniforme Ti. On impose brutalement la température T0sur sa surface, cette condition limite est appelée condition de Dirichlet :

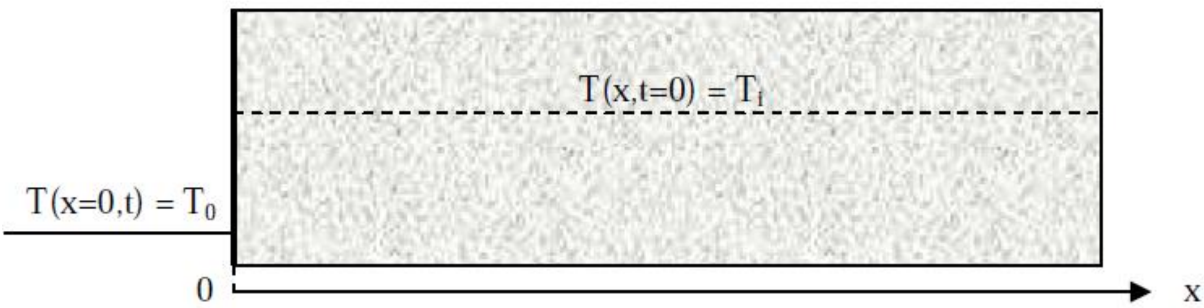


Figure 1.10 : Schéma du milieu semi-infini avec température de surface imposée

L'équation de la chaleur s'écrit : $$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (a)$$

Avec les conditions aux limites :
$$\begin{cases} T(x, 0) = Ti & (b) \\ T(x=0, t) = T_0 & (c) \\ \lim\limits_{x \to \infty} T(x, t) = Ti & (d) \end{cases}$$

On effectue le changement de variable suivant : $\bar{T}$= T -Ti

D'où : $$\frac{\partial \bar{T}}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad et \quad \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial t}$$

L'équation *(a)* peut alors s'écrire : $$\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} = \frac{1}{a}\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} \qquad \text{(I.32)}$$

Et les conditions aux limites deviennent :

$$\begin{cases} \bar{T}(x,0) = 0 & (b) \\ \bar{T}(x = 0, t) = T0 - Ti & (c) \\ \lim\limits_{x \to \infty} \bar{T}(x, t) = 0 & (d) \end{cases}$$

La transformée de Laplace de T(x, t) par rapport au temps s'écrit :

$$\theta(x, p) = L[\bar{T}(t)] = \int_0^\infty \exp(-pt)\, \bar{T}(x, t)dt \qquad \text{(I.33)}$$

La transformée de Laplace de l'équation *(a)* conduit à :

$$\theta(x, p) = \frac{1}{a}[p\theta - \bar{T}(x, p)] \quad avec\ \bar{T}(x, 0) = 0 \qquad \text{(I.34)}$$

Cette équation est donc de la forme : $\frac{d^2\theta}{dx_2} = q^2\theta = 0 \quad avec\ \ q^2 = \frac{p}{a}$

D'où : $$\theta(x, p) = Ae^{-qx} + Be^{qx} \qquad \text{(I.35)}$$

La température grade une valeur finie quand x tend vers l'infini donc B=0 , nous en déduisons que :

$$\theta(x, p) = Ae^{-qx} \qquad \text{(I.36)}$$

La transformée de Laplace de l'équation (c)conduit à :

$$\theta(0, P) = \frac{T_0 - T_i}{p} \qquad \text{(I.37)}$$

D'où $$A = \frac{T_0 - T_i}{p} \text{ et } \theta = (T_0 - T_i)\frac{e^{-qx}}{p} \qquad \text{(I.38)}$$

L'utilisation des tables de la transformée de Laplace inverse conduit au résultat suivant :

$$\frac{T(x,0) - T_0}{T_i - T_0} = erf\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) \qquad \text{(I.39)}$$

Avec

$$\text{erf}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u \exp(-t^2)\,.\,dt \qquad \text{(I.40)}$$

- ***Flux imposé :***

Méthode : Transformée intégrale de Laplace sur le temps et inversion par les tables.

Considérons la même configuration mais en imposant brutalement une densité de flux de chaleur à la surface du milieu semi-infini, cette condition limite est appelée condition de Neumann.

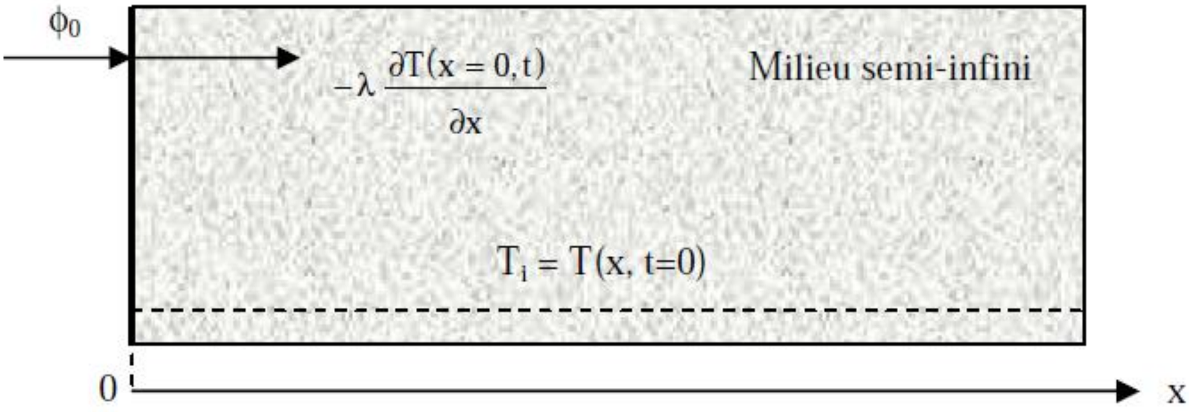


Figure 1.11 : Schéma du milieu semi-infini avec flux surfacique imposé

L'équation de la chaleur s'écrit : $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t}$ (a)

Avec les conditions aux limites :

$$\begin{cases} T(x,0) = T_i & (b) \\ T(\infty, t) = T_i & (c) \\ -\lambda \frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = \varphi_0 & (d) \end{cases}$$

Cette dernière condition traduit la conservation du flux de chaleur au niveau de la surface du milieu semi infini. On effectue le changement de variable suivant :$\bar{T} = T - T_i$

D'où :

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x} = \frac{\partial^2 T}{\partial x} \quad et \quad \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial t}$$

L'équation *(a)* peut alors s'écrire :

$$\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} = \frac{1}{a}\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} \qquad \text{(I.41)}$$

Et les conditions aux limites deviennent :

$$\begin{cases} \bar{T}(\boldsymbol{x},0) = 0 & (b) \\ \bar{T}(\infty,t) = 0 & (c) \\ -\boldsymbol{\lambda}\frac{\partial \bar{T}(0,t)}{\partial x} = \varphi_0 & \text{(d)} \end{cases}$$

La transformée de Laplace de l'équation *(a)* conduit à:

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - \frac{1}{a}[p\theta - \bar{T}(x,0)] = 0 \qquad \text{(I.42)}$$

Avec : $\bar{T}(x,0) = 0$

D'où : $\theta(x,p) = Ae^{-qx} + Be^{qx}$ la température garde une valeur finie quand x tend vers l'infini donc B=0, et nous en déduisons que $\theta(x,p)Ae^{-qx}$

La transformée de Laplace de l'équation (d) s'écrit :

$$\frac{\varphi_0}{p} = -\lambda\frac{d\theta}{dx}(x=0) \qquad d'ou\ A = \frac{\varphi_0}{\lambda pq} \quad et \quad \theta(x,0) = \frac{\varphi_{0e^{-qx}}}{\lambda pq}$$

L'utilisation des tables de la transformée de Laplace inverse conduit au résultat suivant :

$$\bar{T}(x,0) = T(x,t) - T_i = \frac{2\varphi_0}{\lambda}\sqrt{at}\ \ ierfc\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) \qquad \text{(I.43)}$$

Avec : $ierrfc(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp(-u^2) - u[1 - \mathrm{erf}(u)]$

- ***Coefficient de transfert imposé :***

Méthode : Transformée intégrale de Laplace sur le temps et inversion par les tables.

On considère le cas où le coefficient de transfert de chaleur par convection h entre le milieu semi-infini et le milieu ambiant est imposé, cette condition limite est appelée condition de Newton :

L'équation de la chaleur s'écrit :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t} \qquad \text{(a)}$$

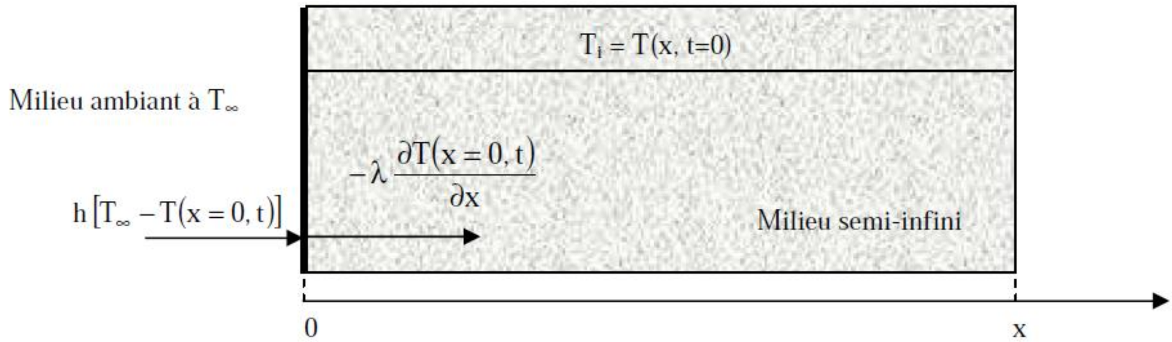


Figure 1.12 : Schéma du milieu semi-infini avec coefficient de transfert convectif imposé

Avec les conditions aux limites :
$$\begin{cases} T(x,0) = T_i & (b) \\ T(\infty,t) = T_i & (c) \\ -\lambda \frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = h[T_\infty - T(x=0,t)] & (d) \end{cases}$$

On effectue le changement de variable suivant :

$$\bar{T} = T - T_i \tag{I.44}$$

D'où

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial t}$$

L'équation (a) peut alors s'écrire :

$$\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} = \frac{1}{a}\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} \tag{I.45}$$

Les conditions aux limites deviennent :

$$\begin{cases} \bar{T}(x,0) = 0 & (b) \\ \bar{T}(\infty,t) = 0 & (c) \\ \lambda \frac{\partial \bar{T}(0,t)}{\partial x} = h\left[\bar{T}(x=0,t) - (T_\infty - T_{i)}\right] & (d) \end{cases}$$

La transformée de Laplace de l'équation (a) conduit à:

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - \frac{1}{a}[p\theta - \bar{T}(x,0)] = 0 \tag{I.46}$$

Avec :

$$\bar{T}(x,0) = 0$$

D'où :

$$\theta(x,P) = Ae^{-qx} + Be^{qx} \tag{I.47}$$

La température grade une valeur finie quand x tend vers l'infini donc B=0 et $\theta(x,P) = Ae^{-xq}$

Le transfert de Laplace de l'équation (d) s'écrit :

$$\lambda \frac{d\theta}{dx}(0,P) = h\theta(0,P) + \frac{h(T_i - T_\infty)}{P} \tag{I.48}$$

Soit : $$-\lambda A q = hA + \frac{h(T_i - T_\infty)}{P\left(\frac{h}{\lambda}+q\right)} \quad \text{(I.49)}$$

d'où :

$$A = \frac{\frac{h}{\lambda}(T_\infty - T_i)}{P\left(\frac{h}{\lambda}+q\right)}$$

Et :

$$\theta(x,P) = l(T_\infty - T_i)\frac{e^{-qx}}{p(q+l)}$$

Ou : $$l = \frac{h}{\lambda}$$

L'utilisation de table de la transformée de Laplace inverse conduit au résultat suivant :

$$\frac{T-T_\infty}{T_i - T_\infty} = erf\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) + \exp\left(\frac{hx}{\lambda} + \frac{ah^2t}{\lambda^2}\right) erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{at}} + \frac{h\sqrt{at}}{\lambda}\right) \quad \textit{(I.50)}$$

Dans ce chapitre on a représenté classification des équations aux driver partielle (EDP) et le théorème de la méthode des différences finies, avec un exemple uni dimensionnelle.

La méthode différence finie est une des plus anciennes méthodes de simulation numériques qui est encore utilisée pour certaines applications, comme la propagation d'ondes (simple ou électromagnétiques) ou la mécanique des fluides compressibles. Pour d'autre application, comme la mécanique du soleil ou celle des fluides incompressibles, on lui préfère souvent la méthode des éléments finis. Néanmoins, de nombreux concepts en différences finies se retrouvent dans les autres méthodes numériques. Ainsi, La généralité et la simplicité de la méthode de différence finies motive donc son exposition détaillée en début de cet ouvrage.

La méthode d'approximation de la solution d'une EDP par différences finies consiste à approcher la valeur de la solution en un nombre fini de points, appelles points de discrétisation du maillage. Nous allons d'abord d'écrire la méthode dans un cas simple en dimension 1 avant de nous intéresser aux schémas explicites et implicites pour l'équation de la chaleur.

II.1Les équations aux dérivées partielles (EDP) :

Dans cette partie un classement des équations aux dérivées partielles et des conditions aux limites.

II.1.1 Classification :

Considérons la forme générale d'une Equation aux Dérivées Partielles (EDP) de second ordre suivant les deux variables indépendantes (x et y) :

$$A\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+D\frac{\partial\phi}{\partial x}+E\frac{\partial\phi}{\partial y}+F\phi+G=0 \qquad \text{(II.1)}$$

Une classification assez simple de cette équation peut être faite sur la base des coefficients associés aux dérivées d'ordre le plus élevé A, B et C. On calcule le déterminant définit par :
$\Delta = B^2 - 4AC$
L'équation est dite de type

- Elliptique si $\Delta < 0$,
- Parabolique si $\Delta = 0$,
- Hyperbolique si$\Delta > 0$.

Dans le cas d'un système d'EDP, il faut écrire l'équation caractéristique du système pour trouver sa nature. La marche à suivre est illustrée par l'exemple suivant :

$$A_1\frac{\partial U}{\partial x}+B_1\frac{\partial U}{\partial y}+C_1\frac{\partial V}{\partial x}+D_1\frac{\partial V}{\partial y}=E_1 \qquad \text{(II.2)}$$

$$A_2\frac{\partial U}{\partial x}+B_2\frac{\partial U}{\partial y}+C_2\frac{\partial V}{\partial x}+D_2\frac{\partial V}{\partial y}=E_2 \qquad \text{(II.3)}$$

On écrit les déplacements :

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy \tag{II.4}$$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial x} dy \tag{II.5}$$

Les équations précédentes s'écrivent sous la forme compacte suivante :

$$\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ dx & dy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dy & dy \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ dU \\ dV \end{bmatrix} \tag{II.6}$$

Le déterminant :

$$(A_1C_2\text{-}A_2C_1)\ dy^2\text{-}(A_1D_2\text{-}A_2D_1+ B_1C_2\text{-} B_2C_1)\ dx\ dy+ (B_1D_2 - B_2D_1)\ dx^2=0 \tag{II.7}$$

On divise l'équation précédente par dx^2, et on définit $f' = \frac{dy}{dx}$

$$af'^2 - bf' + c = 0 \tag{II.8}$$

$$\Delta = b^2 - 4\ a\ c \tag{II.9}$$

L'équation est dite de type **elliptique** si $\Delta < 0$, elle est **parabolique** si $\Delta = 0$, et **hyperbolique** si $\Delta > 0$

Une des utilités de cette classification est de prévoir le comportement de l'équation vis-à-vis des conditions aux limites. Si nous imaginons un écoulement de fluide de gauche vers la droite, une perturbation en un point donné n'a pas d'influence amont si l'équation est de type parabolique. Si par contre l'équation est de type elliptique une perturbation quelconque en un point quelconque aura une influence dans toutes les directions de l'espace. Une conséquence directe de cette caractéristique est qu'un problème de type parabolique peut être résolu par une marche avant, alors qu'une équation de type elliptique nécessite la prise en considération des conditions aux limites imposées sur toutes les frontières du domaine de calcul.

II.1.2 Les conditions aux limites :

Soit un problème définit dans un domaine R, limité par la frontière ∂R. Les conditions aux limites peuvent être de trois natures :

Dirichlet : Dans ce type de conditions la valeur de la variable dépendante est imposée sur la frontière du domaine de calcul

$$\phi = f \quad sur \quad \partial R \qquad \text{(II.10)}$$

Newman : La variable dépendante n'est pas connue sur la frontière mais sa dérivée est bien définit

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = f \text{ Ou } \frac{\partial \phi}{\partial s} = q \text{ sur } \partial R \qquad \text{(II.11)}$$

Mixte : Une combinaison linéaire des deux premières conditions est imposée sur la frontière

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} + k\phi = f, k > 0 \qquad sur \qquad \partial R \qquad \text{(II.12)}$$

Un problème de transfert de chaleur ou d'écoulement est dit bien posé si en résolvant les équations du problème liées aux conditions aux limites et initiales

- La solution numérique existe.
- La solution numérique est unique.
- La solution numérique dépend de façon continue de la variation des conditions aux limites.

II.2Présentation de la méthode des différences finies :

II.2.1 TAYLOR BROOK (1685-1731)

Brook Taylor est un éclectique homme de sciences anglais, né à Edmonton (Angleterre) le 18 août 1685, et mort à Londres le 29 décembre 1731. Il s'intéressa aux mathématiques, à la musique, la peinture et la philosophie.

En 1712 Taylor fut admis à la Royal Society de Londres (l'équivalent de l'Académie des sciences de Paris). C'était le 3 avril, et il est clair que son élection fut plus basée sur une expertise de Machin, Keill et d'autres illustres, que sur les publications de ses résultats. Ainsi Taylor écrivit à Machin en 1712 pour lui fournir la solution d'un problème concernant la deuxième loi de Kepler sur les mouvements des planètes. En 1712 également, il fit partie d'un comité pour départager Isaac Newton et Leibniz.

En 1714 Taylor fut élu secrétaire de la Royal Society, et il y resta du 14 janvier 1714 au 21 octobre 1718, lorsqu'il dut se résigner pour raisons de santé d'une part, d'autre part par manque de motivation. La période où il fut secrétaire de la Royal Society de Londres fut celle de sa vie où il fut le plus productif en mathématiques. Il publia deux ouvrages en 1715, Méthode usincrementorum direct a and reverse detLinear Perspective qui sont extrêmement important pour l'histoire des mathématiques. Deux secondes éditions furent publiées, respectivement en 1717 et en 1719.

Taylor fit de nombreux séjours en France. C'était d'une part suite à des problèmes de santé et d'autre part pour rendre visite à des amis. Il rencontra Pierre Rémond de Montmort et correspondit avec lui sur différents sujets de mathématiques après son retour. Ils discutèrent en particulier des séries infinies et de probabilités. Taylor correspondit aussi avec Abraham de Moivre sur les probabilités. À cette époque, ces mathématiciens communiquèrent beaucoup à trois.

Il ajouta aux mathématiques une nouvelle branche appelée « calcul de différences finies », inventa l'intégration par parties, et découvrit les séries appelées « développement de Taylor ». Ses idées furent publiées dans son livre de 1715, Methodusincrementorumdirecta and reversed. En fait, la première mention par Taylor de ce qui est appelé aujourd'hui théorème de Taylor apparaît dans une lettre que ce dernier écrivit à Machin le 26 juillet 1712. Dans cette lettre, Taylor explique clairement d'où lui est venue cette idée, c'est-à-dire d'un commentaire que fit Machin au Child'sCoffeehouse, utilisant les « séries de Sir Isaac Newton » pour résoudre un problème de Kepler, et utilisant également « les méthodes de Dr. Halley pour extraire les racines » d'équations polynomiales. Il y a en fait deux versions du théorème de Taylor données sur le papier de 1715. Dans la première version, le théorème apparaît dans la Proposition 11 qui est une généralisation des méthodes de Halley d'approximation de racines de l'équation de Kepler, ce qui allait bientôt devenir une conséquence des séries de Bernoulli. C'est cette version qui a été inspirée par les conversations du Coffeehouse décrites précédemment. Dans la seconde version se trouve le Corollaire 2 de la Proposition 7 et qui est une méthode pour trouver davantage de solutions des équations fluxionales dans les séries infinies. Taylor était le premier à découvrir ce résultat !

James Gregory, Isaac Newton, Leibniz, Johann Bernoulli et de Moivre ont tous découvert une variante du théorème de Taylor. Tous ces mathématiciens ont fait leurs découvertes séparément, et le travail de Taylor était aussi indépendant de celui des autres. L'importance du théorème de Taylor ne fut pas perçue avant 1772 quand Lagrange proclama que c'était le principe de base du calcul différentiel ! Le terme « série de Taylor » semble avoir été utilisé pour la première fois par L'Huilier en 1786. Taylor présenta aussi les principes de base de la perspective dans Linear Prospect (1715). La seconde édition fut appelée New principles of linear perspective.

Enfin, Taylor fit de nombreux séjours en France. C'était d'une part suite à des problèmes de santé et d'autre part pour garder le contact avec ces amis mathématiciens.

Actuellement, la pierre angulaire de la méthode des différences finies n'est autre que le développement des séries.

II.2.2 La méthode des différences finies:

Cette méthode est basée sur la technique du développement en séries de Taylor qui permet d'approximer la valeur d'une fonction en un point donné si on connaît la valeur de la dite fonction ainsi que toute ces dérivées en un point voisin en espace ou en temps. Cette technique permet de développer des schémas pour remplacer les dérivées premières et secondes des EDP pour pouvoir envisager une solution numérique par calculateur.
Pour obtenir une solution numérique il faut tout d'abord définir un domaine numérique constitué par un ensemble de points discrets appelé grille de calcul. Les valeurs instantanées et locales des variables dépendantes du problème sont définit sur l'ensemble des points de la grille de calcul. La différence entre cette vue numérique à travers un certain nombre de points et la distribution continue exacte représente l'erreur commise par la méthode numérique. Il est tout à fait logique de penser que plus le nombre de points est important plus la visualisation est claire, un peu comme les pixels d'une photo numérique. La Figure 2.1 représente des exemples de grilles de calcul.

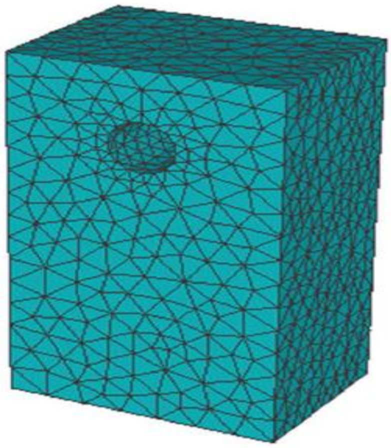


Figure 2.1 : Exemples de grilles de calcul

L'étape suivante consiste à approximer ou remplacer toutes les dérivées partielles par des schémas discrets (différence finies). L'EDP sera transformée en équation algébrique. Cette équation algébrique est ensuite appliquée sur l'ensemble des nœuds de la grille de calcul. Le résultat sera un système d'équation comportant autant d'équations que d'inconnues (nœuds). Ce système sera ensuite résolu par une méthode appropriée. Le résultat sera une distribution discrète de la solution sur l'ensemble des points du domaine de calcul.

2.2.1Grille de calcul :

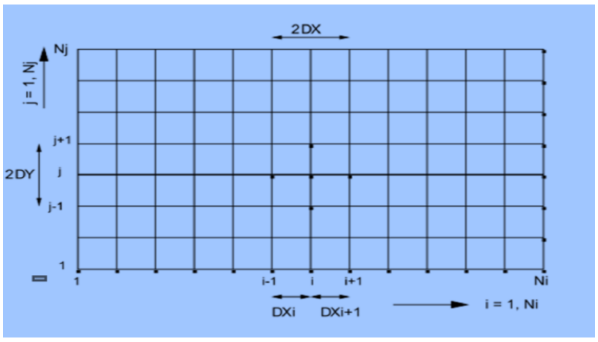


Figure 2.2 : Grille de calcul structurée 2D.

Avant de commencer, il faut trouver un moyen qui nous permettra de localiser spatialement et temporellement tous les points de la solution numérique. C'est ce qu'on va appeler création de la grille de calcul. Dans la suite, on va résonner sur un espace plan (2D) et l'extension pour le 3D sera faite de manière intuitive. La ***Figure 2.2*** représente la manière la plus directe pour repérer les points suivant la procédure structurée. C'est un peu comme une matrice, chaque point sera affecté de deux indexes (i,j) qui le positionneront par rapport à ces voisins. Soit U, la variable à calculer. Sa valeur aux différents points de la grille s'écrit de la manière suivante :

$$U_{i+1,j} = U(x_0 + \Delta x, y_0) \quad \text{(II.13)}$$
$$U_{i-1,j} = U(x_0 - \Delta x, y_0) \quad \text{(II.14)}$$
$$U_{i,j+1} = U(x_0 + y_0 + \Delta y) \quad \text{(II.15)}$$
$$U_{i,j-1} = U(x_0 + y_0 - \Delta y) \quad \text{(II.16)}$$

2.2.2 Maillage non-structuré :

L'autre façon de mailler un domaine de calcul est de définir un nuage de points, pas nécessairement structuré. Dans ce cas-là, il faudra numéroter les points de calcul un par un. Chaque point aura ces coordonnées x et y. En plus il faudra relier ces points entre eux de façon à créer des éléments (généralement des triangles).
Le fichier de la grille de calcul sera compléter par une liste des éléments (eux-mêmes numéroter) et les points composants chaque élément.

2.2.3 Le développement en série de Taylor :

$$U(x_0+\Delta x, y_0) = U(x_0\,, y_0) + \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right)_0 \Delta x + \left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_0 \frac{\Delta x^2}{2!} + \cdots + \left.\frac{\partial^n U}{\partial x^n}\right)_0 \frac{\Delta x^n}{n!} + R_n \quad \text{(II.17)}$$

$$U(x_0-\Delta x, y_0) = U(x_0\,, y_0) - \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right)_0 \Delta x + \left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_0 \frac{\Delta x^2}{2!} - \cdots + \left.\frac{\partial^n U}{\partial x^n}\right)_0 \frac{\Delta x^n}{n!} + R_n \quad \text{(II.18)}$$

Une autre écriture de l'équation (II.17), on oubli temporairement la deuxième dimension.

$$U(x_{i+1}) = U(x_i) + U'(x_i)(x_{i+1}-x_i) + \frac{U''(x_i)}{2!}(x_{i+1}-x_i)^2 + \cdots \frac{U^n(x_i)}{n!}(x_{i+1}-x_i)^n + R_n$$

Le terme Rn, représente les termes omis d'ordre (n+1 à l'infini). Théoriquement, on aura besoin d'un nombre infini de termes pour pouvoir calculer la valeur de U (xi+1). En pratique, on se limite à un nombre fini de terme et tout le reste sera considéré en tant que l'erreur de l'approximation (erreur de troncature).

2.2.4 Construction des schémas pour la dérivée d'ordre un et deux :

En arrangeant l'équation (17), on obtient le schéma aux différences avant:

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right)_0 = \frac{U(x_0-\Delta x, y_0) - U(x_0\,, y_0)}{\Delta x} + \partial(\Delta x) \quad \text{(II.19)}$$

L'équation (18), donne le schéma aux différences arrière :

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right)_0 = \frac{U(x_0\,, y_0) - U(x_0-\Delta x, y_0)}{\Delta x} + \partial(\Delta x) \quad \text{(II.20)}$$

Le schéma aux différences centrées s'obtient en soustrayant l'équation (II.18) de l'équation (II.17) :

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right)_0 = \frac{U(x_0+\Delta x, y_0) - U(x_0-\Delta x, y_0)}{2\Delta x} + \partial(\Delta x^2) \quad \text{(II.21)}$$

La dérivée seconde est obtenue en additionnant l'équation (II.17) à l'équation (II.18) :

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_0 = \frac{U(x_0+\Delta x, y_0) - 2U(x_0\,, y_0) + U(x_0-\Delta x, y_0)}{\Delta x^2} + \partial(\Delta x^2) \quad \text{(II.22)}$$

Les schémas ci-dessus s'écrivent sous forme indicielle :

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{U_{i+1,j}-U_{i,j}}{\Delta x} + \partial(\Delta x) \qquad \text{(II.23)}$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{U_{i,j}-U_{i-1,j}}{\Delta x} + \partial(\Delta x^2) \qquad \text{(II.24)}$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{U_{i+1,j}-U_{i-1,j}}{\Delta x} + \partial(\Delta x) \qquad \text{(II.25)}$$

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_{i,j} = \frac{U_{i+1,j}-2U_{i,j}+U_{i+1,j}}{\Delta x} + \partial(\Delta x^2) \qquad \text{(II.26)}$$

II.3 L'équation de conduction de la chaleur (Joseph Fourier) :

L'équation de Fourrier traduisant le transfert de chaleur par conduction sera utilisée dans la suite comme exemple de base pour illustrer l'application de la méthode des différences finies.

$$C_p\rho\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda\nabla T + Q \qquad \text{(II.27)}$$

Où

T(x,y,t) : La température, fonction de l'espace et du temps.
C_p: La chaleur spécifique.
ρ: La masse volumique.
Q : Source de chaleur par unité de temps et de volume.
λ: Le coefficient de conductivité thermique.
t: Le temps.

Bien que la conductivité thermique, la chaleur spécifique et la masse volumique puissent varier en fonction de la température, elles seront considérées constantes dans la suite. Notre première approche du problème sera d'appliquer cette équation pour un cas assez simple tel que le transfert de chaleur en 1D. Soit un fil métallique de section droite très petite par rapport à sa longueur de façon à ce que le flux de chaleur existe seulement suivant la longueur du fil. Si en plus la source de chaleur est absente, l'équation précédente prend la forme suivante :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \qquad \text{(II.28)}$$

Où :
$a = \frac{\lambda}{C_p\rho}$: représente la diffusivité thermique.

Si les températures maximale et minimale du processus sont connues, la température sera dimensionnalité comme suit :

$$\theta = \frac{T - T_{min}}{T_{max} - T_{min}} \qquad \text{(II.29)}$$

Et en introduisant la variable d'espace adimensionnelle, $x = x'/L$ où L est la longueur du fil, l'équation précédente s'écrit :

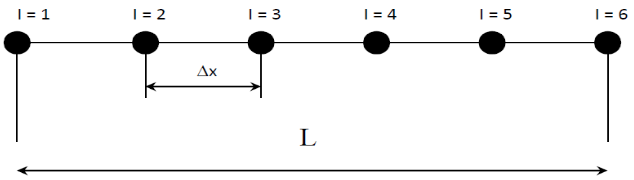
$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = a\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} \tag{II.30}$$

II.3.1 Le problème stationnaire :

Si en plus le problème est stationnaire, l'équation devient :

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = 0 \tag{II.31}$$

Le problème sera complété par la pose des conditions aux limites.



L : Longueur du fil.
NI = 6Nombre de nœuds du maillage.
Les conditions aux limites seront du type Dirichlet :

$$\theta(1) = 1, \quad \theta(NI) = 0 \tag{II.32}$$

On calcul Δx par l'expression suivante :

$$\Delta x = 1/(NI - 1) \tag{II.33}$$

L'équation (25) sera discrétisée par un schéma centré de second ordre :

$$\frac{\theta_{i-1} - 2\theta_i + \theta_{i+1}}{\Delta x^2} = 0 \tag{II.34}$$

Le nombre de nœuds global étant 6 dont deux sont réservés pour les conditions aux limites et quatre sont à calculés par la méthode des différences finies.
L'application de l'équation algébrique (28) aux quatre nœuds donne le système suivant :

$$I = 2 \quad \text{soit } \theta_1 \quad - 2\theta_2 + \theta_3 = -1 \tag{II.35}$$

$$I = 3 \quad \text{soit } \theta_2 - 2\theta_3 + \theta_4 = 0 \tag{II.36}$$

$\mathrm{I} = 4 \quad$ soit $\theta_3 - 2\theta_4 + \theta_5 = 0$ (II.37)

$\mathrm{I} = 5 \quad$ soit $\theta_4 - 2\theta_5 + \theta_6 = 0$ (II.38)

Mathématiquement parlant, on dispose d'un système de quatre équations à quatre inconnus :

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(II.39)}$$

Ce type de matrice est appelée, matrice tri diagonal et elle est facilement résolu par la méthode du pivot (triangulation).

<u>Solution :</u>

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$-5\theta_5 = -1 \quad \rightarrow \quad \theta_5 = 0.2$$

$$-4\theta_4 + 3\theta_5 = -1 \quad \rightarrow \quad \theta_4 = 0.4$$

$$-3\theta_3 + 2\theta_4 = -1 \quad \rightarrow \quad \theta_3 = 0.6$$

$$-2\theta_2 + \theta_3 = -1 \quad \rightarrow \quad \theta_2 = 0.8$$

On a aussi : $\theta_1 = 1 \; et \; \theta_6 = 0$

Il est clair que la solution est une droite en parfaite concordance avec la conduction thermique uni directionnelle qui possède un caractère linéaire.

Remarque : La solution de ce type de problème est possible analytiquement (deux intégrations successives) et la solution et celle d'une ligne droite.

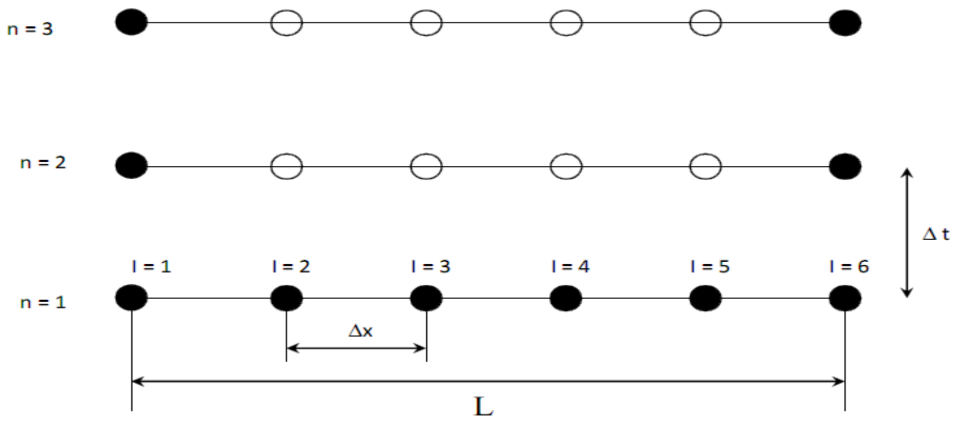
II.3.2 Le problème non stationnaire :

On reprend l'équation (II.30) :

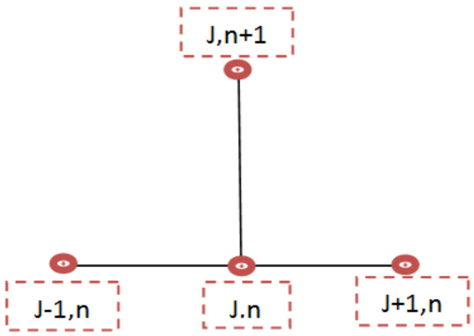
$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Dans ce genre de problème, en plus des conditions aux limites on a besoin des conditions initiales. C'est à dire une distribution initiale de la solution pour le temps zéro. Les variables auront deux indices : le premier se rapportant au temps et le deuxième à l'espace.

$U(t,x) \equiv U(n.\Delta t, i\Delta x)$ Sera représentée par U_i^n.



3.2.1 Schéma explicit :



L'équation précédente sera approximer par le schéma suivant :

$$\frac{U_i^{n+1}-U_i^n}{\Delta t} + \partial(\Delta t) = a\,\frac{U_{i-1}^n-2U_i^n+U_{i+1}^n}{\Delta x^2} + \partial\Delta x^2 \qquad \text{(II.40)}$$

On remarque qu'on a utilisé un schéma avant d'ordre un pour la dérivée par rapport au temps et un schéma centré d'ordre deux pour la dérivée par rapport à l'espace.

Lors de cette discrétisation nous avons choisi de prendre les termes de droites au temps n.

ce schéma s'appelle un schéma explicite, puisqu'il permet de formuler l'expression de la variable au point i et à l'instant n+1 explicitement en fonction de la solution déjà calculée au temps n. Ce schéma est représenté par la molécule suivante.

L’équation (II.34) sera arrangée comme suit :

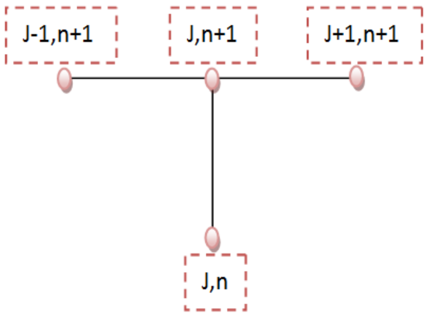
$$U_i^{n+1} = \lambda U_{i-1}^n + (1-2\lambda)U_i^n + \lambda U_{i+1}^n \qquad \text{(II.41)}$$

Avec
$$\lambda = a\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \qquad \text{(II.42)}$$

L’équation (II.41) sera appliqué aux nœuds d’une même rangé (c.a.d. n = cste).

Reprenons le problème de conduction de la température précèdent $\frac{\partial \theta}{\partial t} = a\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$ et posons les conditions aux limites suivantes :
$(\theta(t,0) = 1.0, \theta(t,1) = 0.0)$et les conditions initiales ($(0,x) = 0.0$ pour 0<x<1).
Si on reprend le même nombre de nœuds que précédemment (NI=6) le pas d’espace sera Δx=0.2.

3.2.2 Schéma implicite :



Reprenons le problème de la conduction thermique non stationnaire et réécrivons l’équation discrète (II.40) comme suit (les termes de droite sont au temps n+1)

$$\frac{U_i^{n+1}-U_i^n}{\Delta t} + \partial(\Delta t) = a\frac{U_{i-1}^{n+1}-2\,U_i^{n+1}+U_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} + \partial(\Delta x^2) \qquad \text{(II.43)}$$

Après groupement et arrangement :

$$\lambda U_{i-1}^{n+1} - (1-2\lambda)U_i^{n+1} + \lambda U_{i+1}^{n+1} = U_i^n \qquad \text{(II.44)}$$

Cette équation présente trois inconnus en même temps, ce qui ne permet pas de la résoudre directement comme c’était le cas pour le schéma explicite. Cette forme de discrétisation est appelée schéma implicite. Pour trouver la solution il faut écrire l’ensemble des équations issues de l’application de (II.44) sur tous les nœuds de la même ligne et ensuite résoudre le système tout entier.
Si nous reprenons l’exemple précédent composé de six nœuds, le système s’écrira :

$$i = 2 \qquad -(1+2\lambda)U_2^{n+1} + \lambda U_3^{n+1} = -\ U_2^n - \lambda\, U_1$$

$$i = 3 \qquad \lambda U_2^{n+1} - (1+2\lambda)U_3^{n+1} + \lambda U_4^{n+1} = -\ U_3^n$$

$$i = 4 \qquad \lambda U_3^{n+1} - (1+2\lambda)U_4^{n+1} + \lambda U_5^{n+1} = -\ U_4^n$$

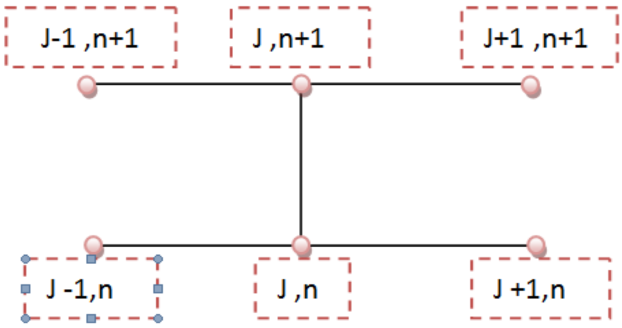
$$i = 5 \qquad \lambda U_4^{n+1} - (1+2\lambda)U_5^{n+1} = -\ U_5^n - U_6^n$$

U_1 et U_6 sont connus et représentent les conditions aux limites.
On dispose maintenant d'un système de quatre équations à quatre inconnus.

$$\begin{bmatrix} -(1+2\lambda) & \lambda & 0 & 0 \\ \lambda & -(1+2\lambda) & \lambda & 0 \\ 0 & \lambda & -(1+2\lambda) & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda & -(1+2\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\ U_2^* - \lambda \\ -U_3^* \\ -\ U_4^* \\ -\ U_5^* \end{bmatrix}$$

Les variables de type U_i^* représentent la solution numérique à l'itération précédente. La solution de ce système donne directement la solution de l'équation. On constate que l'adoption de n'importe qu'elle valeur du paramètre λ aboutit à une solution numérique stable. On conclue que le schéma implicite est inconditionnellement stable.

3.2.3 Schéma de Crank-Nickolson :



Suivant ce schéma l'équation (II.30) s'écrira de la manière suivante :

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} \equiv a\left(\frac{1}{2}\frac{U_{i-1}^{n+1} - 2\,U_i^{n+1} + U_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{1}{2}\frac{U_{i-1}^{n} - 2\,U_i^{n} + U_{i+1}^{n}}{\Delta x^2}\right) \qquad \text{(II.45)}$$

Un tel schéma prend une moitié en explicite et l'autre moitié en implicite. Une façon plus généralisée de discrétiser l'équation (II.30) est :

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} \equiv a\left(\alpha\,\frac{U_{i-1}^{n+1} - 2\,U_i^{n+1} + U_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} + (\alpha - 1)\,\frac{U_{i-1}^{n} - 2\,U_i^{n} + U_{i+1}^{n}}{\Delta x^2}\right) \qquad \text{(II.46)}$$

Pour α=0 le schéma est explicite, pour α=1il est implicite et pour α=.05 il devient Crank-Nicholson.

Ce chapitre est destiné premièrement à la présentation du modèle direct du problème de contact thermique intermittent, tenant compte de la problématique de la résistance de contact, qui est conditionné par l'état de surface des solides mis en contact. La deuxième partie de ce chapitre concerne la présentation et l'interprétation des résultats obtenues.

III.1 Modèle mathématique :

On suppose deux barreaux cylindrique de section droites circulaire égales, en contact périodique établi, constitués d'un matériau homogène et isotrope (cuivre, aluminium, acier, titane) et la surface latérale des deux solides est isolé thermiquement sur toute sa longueur et à ses deux extrémités. Au cours de la période notée τ, le contact entre les deux solides n'a lieu que durant une fraction de période $\gamma\tau$ (s), γ étant le coefficient de partage de la période (γ<1). le schéma de principe du modèle cylindrique monodimensionnel retenue et représenté sur la figure 1. Le système d'équation est construit au tour de l'équation de conduction de la chaleur linéaire, avec les conditions aux limites appropriées, notamment à l'interface :

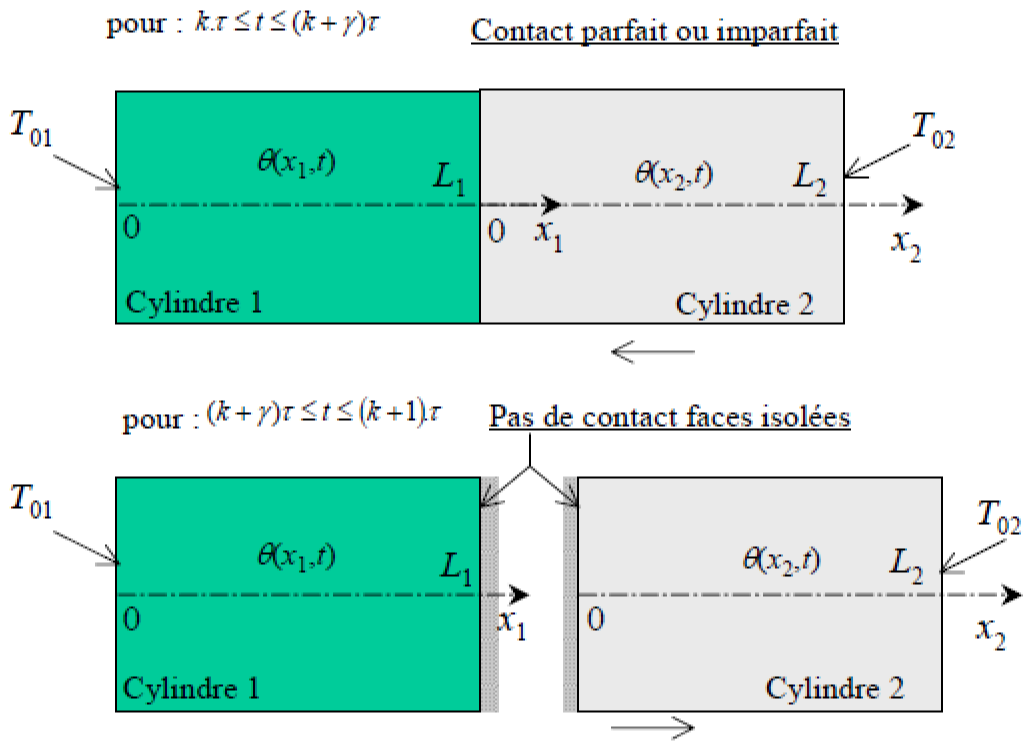


Figure 3.1 : Schéma de principe d'un modèle cylindrique monodimensionnel

III.1.1 Equation mathématique :

$$\frac{\partial^2 T_j}{\partial x_j^2} = \frac{1}{a_j}\frac{\partial T_j}{\partial t} \qquad 0 < x_1 < L_1;\ 0 < x_2 < L_2 \qquad J= 1,2$$

avec $T_1(0,t) = T_{1\infty}$

$$\nabla t\ tel\ que : k\tau \le t \le (k+\gamma)\tau : \begin{cases} \lambda_1\left(\frac{\partial T_1(L_1,t)}{\partial x_1}\right)=\lambda_2\left(\frac{\partial T_2(0,t)}{\partial x_2}\right) \\ Rc.\boldsymbol{\lambda_1}\left(\frac{\partial T_1(L_1,t)}{\partial x_1}\right) = T_2(0,t) - T_1(L_1,t) \end{cases}$$

Cinq types de résistances de contact peuvent se présenter :

- Parfait ($R_c = 0$)
- Imparfait (trois cas) :
  - R_c constante
  - R_c de forme parabolique
  - R_c de triangulaire
  - R_c de forme sinusoïdale

III.2 Equations décrivant le transfert conductif à travers le contact périodique :

III.2.1 Introduction :

Le modèle que nous proposons pour cette étude considère que la surface de contact entre les deux barreaux mis en contact intermittent subie une déformation élastique, c'est-à-dire que les têtes des aspérités formant cette surface évolueront durant la période de contact et reviendrons à leur forme dans la période de non contact. Cette évolution de la surface engendrera obligatoirement la variation de la résistance de contact lors de la période de contact. Cette évolution peut prendre plusieurs forme et ce selon les formes des aspérités. Cependant nous proposons dans cette étude une variété de résistance de contact, parfait (Rc=0), échelon (Rc=constante), parabolique, triangulaire et sinusoïdale.

III.2.2 Modèle thermique en contact imparfait :

Conditions du contact fermé :

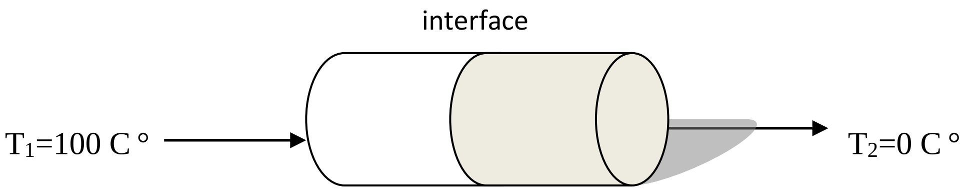


Figure 3.2 : Schéma d'un contact fermé

Equation de transfert : $$\frac{\partial^2 T_j}{\partial x_j^2} = \frac{1}{a_j}\frac{\partial T_j}{\partial t} \qquad \left(avec\ \ a_j = \frac{\lambda_j}{\rho_j . C_j} \right) \qquad (III.1)$$

$\left(j = 1\ ou\ 2 \right)$

$$En\ x_1 = 0 : \qquad T_1(0,t) = T_{1\infty} \qquad (III.2)$$

$$En\ x_2 = L_2 : \qquad T_2(L_2,t) = T_{2\infty} \qquad (III.3)$$

$$En\ x_1 = L_1\ \ (et\ \ x_2 = 0): \quad \left| \begin{array}{ll} -\lambda_1\left(\dfrac{\partial T_1}{\partial x_1}\right)_{x_1=L_1} = \dfrac{T_1(L_1,t) - T_2(0,t)}{R_c} & (III.4) \\ -\lambda_1\left(\dfrac{\partial T_1}{\partial x_1}\right)_{x_1=L_1} = -\lambda_2\left(\dfrac{\partial T_2}{\partial x_2}\right)_{x_2=0} & (III.5) \end{array} \right.$$

- ***Rc : forme parabolique***

Le modèle de résistance parabolique que nous prenons dans l'étude suppose que la résistance de contact varie selon une fonction parabolique entre deux valeurs extrême entre deux de résistance de contact

La forme générale de la parabole s'écrit de la manière suivante

$$Rc = a\,t^2 + bt + c \qquad (III.6)$$

$\forall\ 0 \le t \le \tau\gamma$

Si t=0 Rc=10^{-3}

Si t= $\tau\gamma$ Rc=10^{-3}

Si t= $\frac{\tau\gamma}{2}$ Rc=10^{-4}

Par identification on peut trouver les valeurs des constantes a et b :

$a = \frac{10^{-4}.36}{(\tau\gamma)^2}$;

$b = \frac{36.10^{-4}}{\tau\gamma}$

Donc :
$$Rc = \left(\frac{36.10^{-4}}{(\tau\gamma)^2}\right) t^2 - \left(\frac{36.10^{-4}}{\tau\gamma}\right) t + 10^{-3} \quad \text{(III.7)}$$

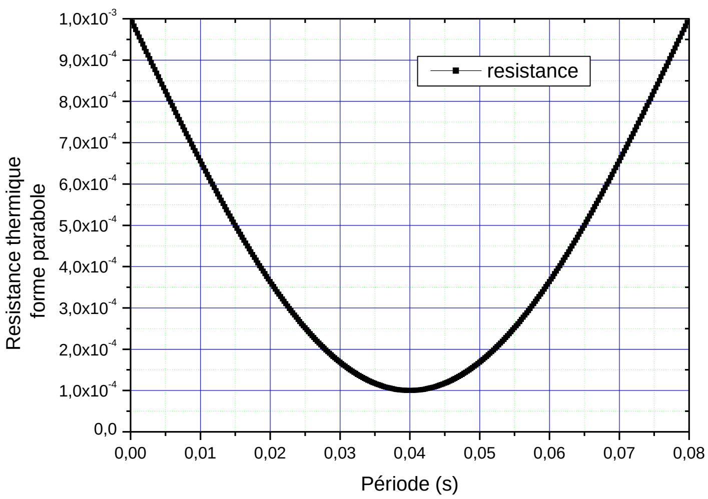


Figure 3.3 : validation de la forme parabolique introduite dans le programme principale en fortran du contact intermittent:

- ***Partie programmation en fortran d'une résistance évoluant en forme parabolique :***

```
do k=1,ndp
n=n+1
if (n*dt.ge.(k-1)*tp) then
if (n*dt.le.((k-1)*tp+gama*tp)) then
cContact ferm é
t1=l*dt
Rc=(36.E-4*t1**2)/((gama*tp)**2)-(36.E-4*t1)/(gama*tp)+(1.E-3)
```

- ***Rc : forme Triangulaire :***

Le modèle de résistance triangulaire que nous prenons dans cette partie d'étude suppose que la résistance de contact varie selon une fonction triangulaire entre deux valeurs extrême de résistance de contact

La forme générale du triangle s'écrit de la manière suivante :

$si\ 0 \leq t \leq \frac{\tau\gamma}{2}$ $\qquad Rc = a_1\, t + b_1$ (III.8)

Si t=0 Rc= 10^{-3}

Si $t = \frac{\tau\gamma}{2}$ Rc= 10^{-4}

Par identification on peut trouver les valeurs des constantes a1 et b1 :

$a_1 = -\frac{10^{-4}.18}{\tau\gamma}$;

$b_1 = 10^{-3}$

Donc : $\quad Rc = \left(-\frac{10^{-4}.18}{\tau\gamma}\right) t + 10^{-3}$ (III.9)

Sinon

$si\ \frac{\tau\gamma}{2} \leq t \leq \tau\gamma$ $\qquad Rc = a_2\, t + b_2$ (III.10)

Si t= $\tau\gamma$ Rc= 10^{-3}

Si $t = \frac{\tau\gamma}{2}$ Rc= 10^{-4}

Par identification les valeurs des constantes a2 et b2 peuvent être trouvées:

$a_2 = \frac{10^{-4}.18}{\tau\gamma}$;

$b_2 = 8.10^{-4}$

Donc : $\quad Rc = (\frac{10^{-4}.18}{\tau\gamma})\ t + 8.10\text{-}4$ (III.11)

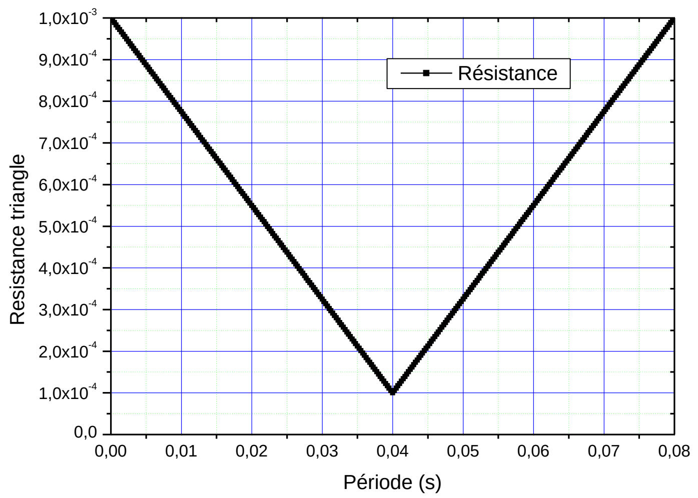


Figure III.4 : validation de la forme triangulaire introduite dans le programme principale en fortran du contact intermittent

- ***Partie programmation en fortran d'une résistance évoluant en forme triangulaire :***

```
        do k=1,ndp
10  n=n+1
        if (n*dt.ge.(k-1)*tp) then
        if (n*dt.le.((k-1)*tp+gama*tp)) then
c       Contact fermé
        t1=l*dt
if (t1.Le.(gama*tp)/2) then
        Rc=(-1.E-4*18)*t1/(gama*tp)+1.E-3
        else
        Rc=(1.E-4*18)*t1/(gama*tp)-(1.E-4*8)
        endif
        write (3,*) l,t1,Rc
```

- ***<u>Rc : Forme Sinusoïdale :</u>***

Le modèle de résistance triangulaire que nous prenons dans cette partie d'étude suppose que la résistance de contact varie selon une fonction triangulaire entre deux valeurs extrême de résistance de contact

La forme générale du triangle s'écrit de la manière suivante :

$$Rc = a\sin(wt) + b \qquad \text{(III.12)}$$

$\forall\ 0 \leq t \leq \tau\gamma$

Si t=0 Rc=10^{-3}

Si t= $\tau\gamma$ Rc=10^{-3}

Si t= $\frac{\tau\gamma}{2}$ Rc=10^{-4}

Par identification on peut trouver les valeurs des constantes a et b :

$a = -9.10^{-4}$

$b = 10^{-3}$

$w = \dfrac{\pi}{\tau\gamma}$

Donc : $Rc = -9.10^{-4}\ \sin\left(\frac{\pi t}{\tau\gamma}\right) + 10^{-3}$ (III.13)

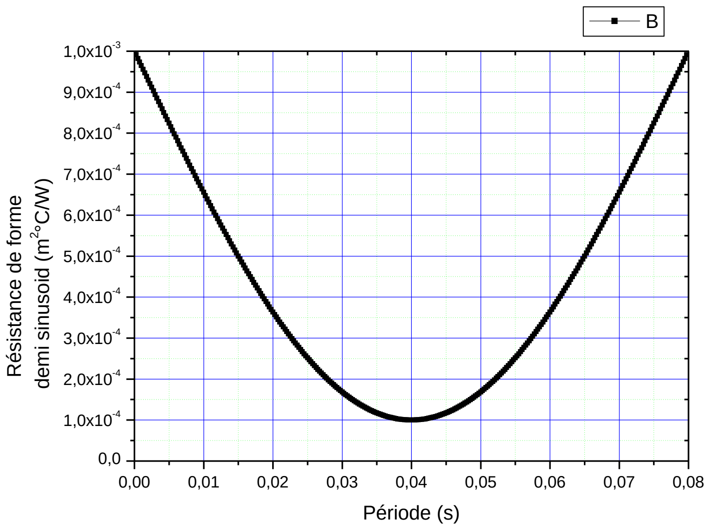


Figure 3.5 : validation de la forme Sinuso ïdale introduite dans le programme principale en fortran du contact intermittent

- ***Partie programmation en fortran d'une résistance évoluant en forme triangulaire :***

```
        do k=1,ndp
10  n=n+1
        if (n*dt.ge.(k-1)*tp) then
        if (n*dt.le.((k-1)*tp+gama*tp)) then
c       Contact ferm é
        t1=l*dt
          Rc=-9.E-4*sin(pi*t1/(gama*tp))+(1.E-3)
        write (3,*) l,t1,Rc
          l=l+1
```

III.2.3Solution numérique – Schéma de Crank / Nicolson :

La résolution numérique utilise le schéma de Crank – Nicolson. Il est dérivé du schéma de différenciation implicite. Prenons à ce titre le problème qui nous intéresse :

$$\frac{\partial^2 T_j}{\partial x_j^2} = \frac{1}{a_j}\frac{\partial T_j}{\partial t} \qquad (III.14)$$

La discrétisation selon Crank et Nicolson du second membre reste identique au schéma implicite :

$$\frac{1}{a_j}.\frac{T_{j,i_j}^{n+1} - T_{j,i_j}^{n}}{\Delta t}$$

Par contre le premier membre est le résultat de la moyenne arithmétique pondérée de l'équation implicite et de l'équation explicite :

$$\theta.\frac{T_{j,i_j-1}^{n+1} - 2.T_{j,i_j}^{n+1} + T_{j,i_j+1}^{n+1}}{\left(\Delta x_j\right)^2} + \left(1-\theta\right).\frac{T_{j,i_j-1}^{n} - 2.T_{j,i_j}^{n} + T_{j,i_j+1}^{n}}{\left(\Delta x_j\right)^2} \qquad \text{(III.15)}$$

θ est le facteur de poids, il représente le degré implicite de la méthode :

- θ=0 méthode explicite : $0[\Delta t,(\Delta x)^2]$
- θ=1 méthode implicite : $0[\Delta t,(\Delta x)^2]$
- θ=1/2 méthode de Crank-Nicolson : $0[(\Delta t)^2,(\Delta x)^2]$

Sont rapportés de plus les ordres de précision de chaque méthode, obtenus en examinant l'erreur de troncature (voir en annexe). On remarque dès lors que la méthode la plus précise est celle de Crank-Nicolson.

La connaissance du critère de stabilité associé à un schéma de différence donné est nécessaire à l'obtention de calculs stables. Le critère de stabilité dépend de la valeur du facteur de poids θ comme indiqué ci-dessous :

(a) $\frac{1}{2} \le \theta \le 1$: stable sans conditions quel que soit r

(b) $0 \le \theta < \frac{1}{2}$: stable seulement si $0 \le r \le \frac{1}{2-4.\theta}$ avec $r = \frac{a_i.\Delta t}{(\Delta x)^2}$

On constate finalement que le schéma de discrétisation choisi est inconditionnellement stable.

Système discret :

L'étape initiale est la séparation de notre problème en deux, avec d'un coté le contact fermé et de l'autre le contact ouvert. Nous allons ensuite appliquer le schéma de discrétisation présenté ci-avant (Crank-Nicolson) pour la résolution.

Contact fermé :

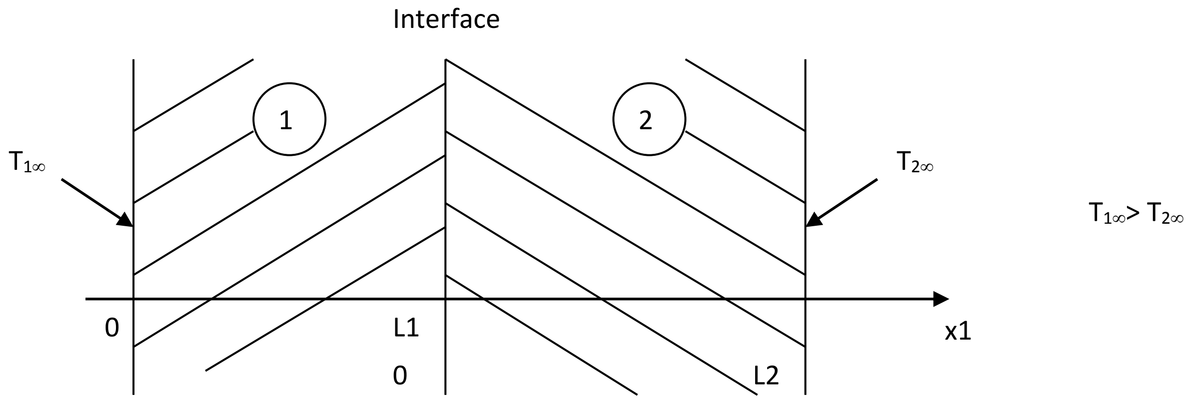


Figure 3.6 : Schéma de la période contact fermé

<u>Mise en équation du problème</u> **(** $k.\tau \le t \le k.\tau + \tau_c$ **)**

$$Equation\ de\ transfert : \quad \frac{\partial^2 T_j}{\partial x_j^2} = \frac{1}{a_j}\frac{\partial T_j}{\partial t} \qquad \left(avec\ \ a_j = \frac{\lambda_j}{\rho_j . C_j} \right) \qquad (III.16)$$

$$(j = 1\ ou\ 2)$$

$$En\ x_1 = 0 : \qquad T_1(0,t) = T_{1\infty} \qquad (III.17)$$

$$En\ x_2 = L_2 : \qquad T_2(L_2,t) = T_{2\infty} \qquad (III.18)$$

$$En\ x_1 = L_1\ \ (et\ \ x_2 = 0) : \quad \left| \begin{array}{ll} \lambda_1 \left(\dfrac{\partial T_1}{\partial x_1} \right)_{x_1 = L_1} = \dfrac{T_1(L_1,t) \quad T_2(0,t)}{R_c} & (III.19) \\ \lambda_1 \left(\dfrac{\partial T_1}{\partial x_1} \right)_{x_1 = L_1} = \lambda_2 \left(\dfrac{\partial T_2}{\partial x_2} \right)_{x_2 = 0} & (III.20) \end{array} \right.$$

L'étude est faite sur cinq configurations de résistance thermique :

$$
Rc = \begin{cases}
\nabla\ 0 \leq t \leq \tau\gamma : \\
Rc = 0 \text{ (cas parfait)} \\
Rc = 10^{-3} \text{ (cas échelon)} \\
Rc = \left(\frac{36.10^{-4}}{(\tau\gamma)^2}\right) t^2 - \left(\frac{36.10^{-4}}{\tau\gamma}\right) t + 10^{-3} \text{ (Cas parabolique)} \\
Rc = \left(-\frac{10^{-4}.18}{\tau\gamma}\right) t + 10^{-3} \text{ (Cas triangulaire } si\ 0 \leq t \leq \frac{\tau\gamma}{2}) \\
Rc = \left(\frac{10^{-4}.18}{\tau\gamma}\right) t + 8.10\text{-}4 \text{ (Cas triangulaire } si\ \frac{\tau\gamma}{2} \leq t \leq \tau\gamma) \\
Rc = -9.10^{-4} \sin\left(\frac{\pi t}{\tau\gamma}\right) + 10^{-3} \text{ (Cas sinusoïdale)}
\end{cases} \quad \text{(III.21)}
$$

Conditions initiales $(k = 0)$:

$$T_1(x,0) = T_{1\infty} \quad (III.22)$$
$$T_2(x,0) = T_{2\infty} \quad (III.23)$$

Conditions initiales $(k \neq 0)$:

$$T_1(x,t) = T_1(x,k.\tau) \quad (III.24)$$
$$T_2(x,t) = T_2(x,k.\tau)$$

<u>Discrétisation du système</u>

Méthode des différences finies :

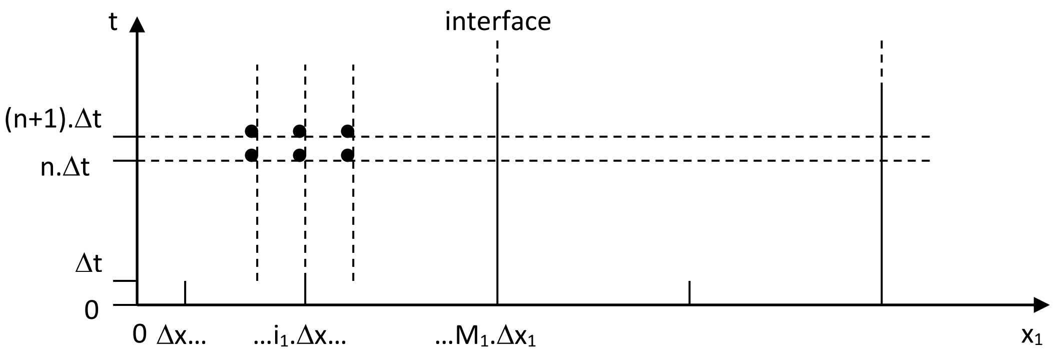


Figure3.7 : Schéma de discrétisation du système :

$$(III.16) \Rightarrow \theta.\frac{T_{j,i_j-1}^{n+1} - 2.T_{j,i_j}^{n+1} + T_{j,i_j+1}^{n+1}}{(\Delta x_j)^2} + (1-\theta).\frac{T_{j,i_j-1}^{n} - 2.T_{j,i_j}^{n} + T_{j,i_j+1}^{n}}{(\Delta x_j)^2} = \frac{1}{a_j}.\frac{T_{j,i_j}^{n+1} - T_{j,i_j}^{n}}{\Delta t} \qquad \text{(III.25)}$$

θ est le facteur de poids, il représente le degré implicite de la méthode :

- θ=0 méthode explicite
- θ=1 méthode implicite
- θ=1/2 méthode de Crank-Nicolson
-

Si maintenant nous posons :

$$r_j = \frac{a_j.\Delta t}{(\Delta x_j)^2}$$

L'équation (III.25) discrétisée devient :

$$-r_j.\theta.T_{j,i_j-1}^{n+1} + (1+2.r_j.\theta).T_{j,i_j}^{n+1} - r_j.\theta.T_{j,i_j+1}^{n+1} = r_j.(1-\theta).T_{j,i_j-1}^{n} + [1-2.r_j.(1-\theta)].T_{j,i_j}^{n} + r_j.(1-\theta).T_{j,i_j+1}^{n}$$

(III.26)

Cette équation fournit les valeurs des températures $T_{j,i}^{n+1}$ à l'intérieur des deux domaines (j = 1 ou 2) en fonction des températures de part et d'autre et des températures de l'itération temporelle précédente.

Il reste donc à atteindre les températures en limite des domaines. Nous allons pour cela appliquer le même schéma de discrétisation sur les conditions aux limites :

$$(III.19)\ en\ x_1 = 0 : \qquad T_{1,0}^{n} = T_{1\infty} \qquad (III.27)$$

$$(III.19)\ en\ x_2 = L_2 : \qquad T_{2,M_2}^{n} = T_{2\infty} \qquad (III.28)$$

Nous avons ici les températures aux deux extrémités « libres » de notre système.

$$(III.20) \Rightarrow \ en\ x_1 = L_1\ (ou\ \ x_2 = 0): \quad \begin{cases} -\lambda_1 . \left(\dfrac{T^n_{1,M_1+1} - T^n_{1,M_1-1}}{2.\Delta x_1} \right) = \dfrac{T^n_{1,M_1} - T^n_{2,0}}{R_c} \\ \\ \Leftrightarrow T^n_{1,M_1+1} = T^n_{1,M_1-1} - \dfrac{2.\Delta x_1}{\lambda_1 . R_c} . \left(T^n_{1,M_1} - T^n_{2,0} \right) \end{cases} \qquad (III.28)$$

$$(III.15) \Rightarrow en\ \ x_1 = L_1\ (ou\ \ x_2 = 0): \quad \begin{cases} -\lambda_1 \left(\dfrac{T^n_{1,M_1+1} - T^n_{1,M_1-1}}{2.\Delta x_1} \right) = -\lambda_2 \left(\dfrac{T^n_{2,1} - T^n_{2,-1}}{2.\Delta x_2} \right) \\ \Leftrightarrow T^n_{2,-1} = T^n_{2,1} - \dfrac{\Delta x_1 . \lambda_1}{\Delta x_2 . \lambda_2} . \left(T^n_{1,M_1+1} - T^n_{1,M_1-1} \right) \\ \\ \Leftrightarrow T^n_{2,-1} = T^n_{2,1} + \dfrac{2.\Delta x_2}{\lambda_2 . R_c} . \left(T^n_{1,M_1} - T^n_{2,0} \right) \end{cases} \qquad (III.29)$$

On utilise ensuite l' équation (III.25) écrite à l'interface pour les deux solides :

- **solide 1** :

$$\begin{aligned} (III.26) \Rightarrow \ & -r_1.\theta.T^{n+1}_{1,M_1-1} + (1 + 2.r_1.\theta).T^{n+1}_{1,M_1} - r_1.\theta.T^{n+1}_{1,M_1+1} = \\ & r_1.(1-\theta).T^n_{1,M_1-1} + [1 - 2.r_1.(1-\theta)].T^n_{1,M_1} + r_1.(1-\theta).T^n_{1,M_1+1} \end{aligned} \qquad \text{(III.30)}$$

On combine ceci avec la relation (III.29) :

$$\begin{aligned} (III.26) \Rightarrow \ & -r_1.\theta.T^{n+1}_{1,M_1-1} + (1 + 2.r_1.\theta).T^{n+1}_{1,M_1} - r_1.\theta. \left[T^{n+1}_{1,M_1-1} - \frac{2.\Delta x_1}{\lambda_1 . R_c} . \left(T^{n+1}_{1,M_1} - T^{n+1}_{2,0} \right) \right] \\ & = r_1.(1-\theta).T^n_{1,M_1-1} + [1 - 2.r_1.(1-\theta)].T^n_{1,M_1} + r_1.(1-\theta). \left[T^n_{1,M_1-1} - \frac{2.\Delta x_1}{\lambda_1 . R_c} . \left(T^n_{1,M_1} - T^n_{2,0} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \ & -2.r_1.\theta.T^{n+1}_{1,M_1-1} + \left[1 + 2.r_1.\theta. \left(1 + \frac{\Delta x_1}{\lambda_1 . R_c} \right) \right] .T^{n+1}_{1,M_1} - r_1.\theta. \frac{2.\Delta x_1}{\lambda_1 . R_c} .T^{n+1}_{2,0} \\ & = 2.r_1.(1-\theta).T^n_{1,M_1-1} + \left[1 - 2.r_1.(1-\theta). \left(1 + \frac{\Delta x_1}{\lambda_1 . R_c} \right) \right] .T^n_{1,M_1} + r_1.(1-\theta). \frac{2.\Delta x_1}{\lambda_1 . R_c} .T^n_{2,0} \end{aligned} \qquad (III.31)$$

- **solide 2** :

$$\begin{aligned} (III.26) \Rightarrow \ & -r_2.\theta.T^{n+1}_{2,-1} + (1 + 2.r_2.\theta).T^{n+1}_{2,0} - r_2.\theta.T^{n+1}_{2,1} = \\ & r_2.(1-\theta).T^n_{2,-1} + [1 - 2.r_2.(1-\theta)].T^n_{2,0} + r_2.(1-\theta).T^n_{2,1} \end{aligned} \qquad \text{(III.32)}$$

On combine ceci avec la relation (III.29) :

$$(III.26) \Rightarrow \; -r_2.\theta.\left[T_{2,1}^{n+1} + \frac{2.\Delta x_2}{\lambda_2.R_c}.\left(T_{1,M_1}^{n+1} - T_{2,0}^{n+1}\right)\right] + \left(1 + 2.r_2.\theta\right).T_{2,0}^{n+1} - r_2.\theta.T_{2,1}^{n+1}$$

$$= r_2.(1-\theta).\left[T_{2,1}^{n} + \frac{2.\Delta x_2}{\lambda_2.R_c}.\left(T_{1,M_1}^{n} - T_{2,0}^{n}\right)\right] + \left[1 - 2.r_2.(1-\theta)\right].T_{2,0}^{n} + r_2.(1-\theta).T_{2,1}^{n}$$

$$\Leftrightarrow \; -2.r_2.\theta.T_{2,1}^{n+1} + \left[1 + 2.r_2.\theta.\left(1 + \frac{\Delta x_2}{\lambda_2.R_c}\right)\right].T_{2,0}^{n+1} - r_2.\theta.\frac{\Delta x_2}{\lambda_2.R_c}.T_{1,M_1}^{n+1}$$

$$= 2.r_2.(1-\theta).T_{2,1}^{n} + \left[1 - 2.r_2.(1-\theta).\left(1 + \frac{\Delta x_2}{\lambda_2.R_c}\right)\right].T_{2,0}^{n} + r_2.(1-\theta).\frac{2.\Delta x_2}{\lambda_2.R_c}.T_{1,M_1}^{n} \qquad (III.33)$$

Les conditions initiales de ce problème sont les suivantes :

$$(III.16) \Rightarrow \; T_{1,i_1}^{0} = T_{1\infty} \qquad (III.34)$$

$$(III.19) \Rightarrow \; T_{2,i_2}^{0} = T_{2\infty} \qquad (III.35)$$

Ces conditions ne sont valables qu'en t=0 (k=0). A chaque nouvelle période, la nouvelle condition « initiale » sera tout simplement le résultat de l'itération précédente (dernière itération du calcul effectué en contact ouvert).

$$Conditions\ initiales\ (k \neq 0): \qquad T_{1,i_1}^{n} = T_{1,i_1}^{k.n_\tau} \qquad (III.36)$$

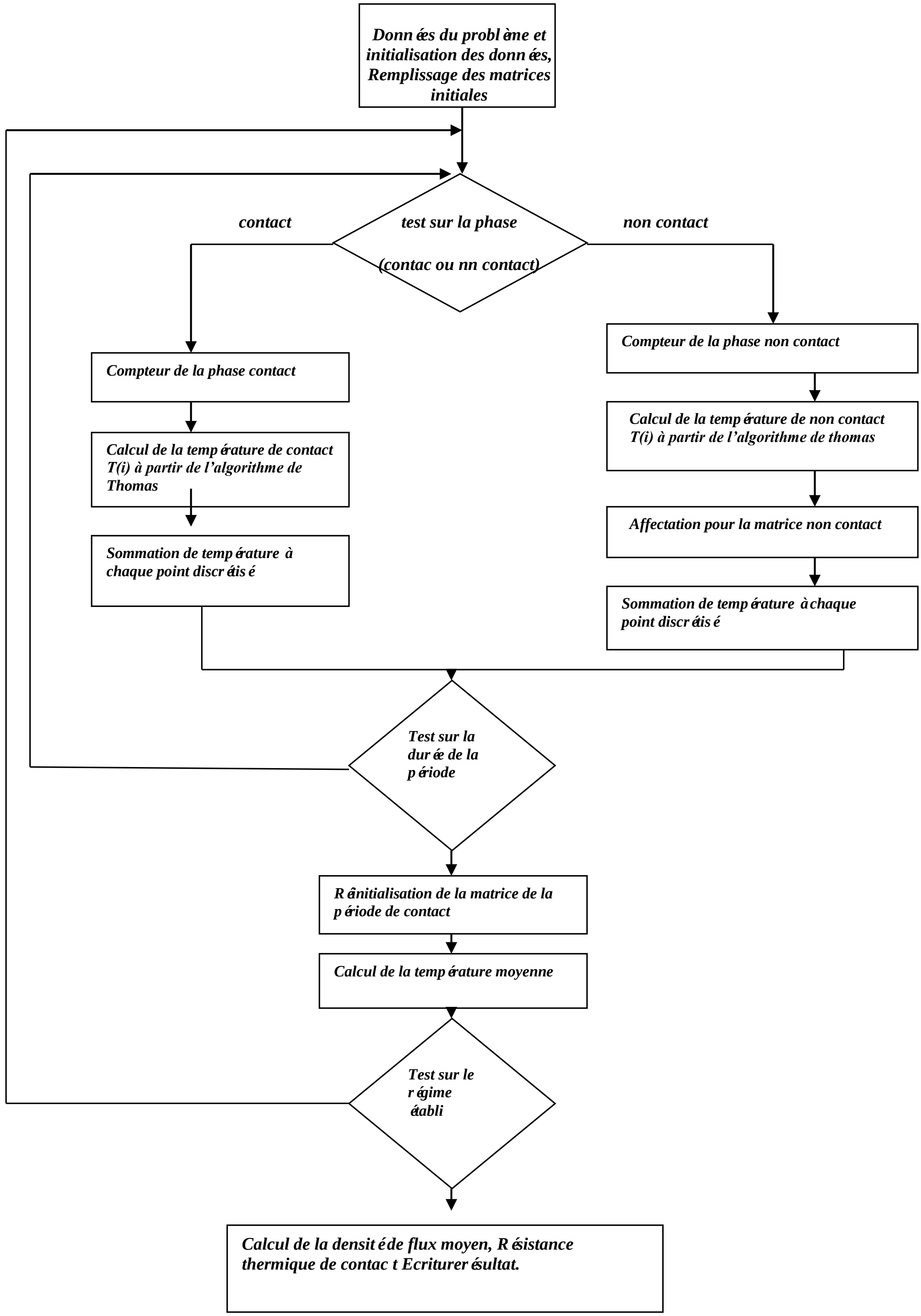
$$T_{2,i_2}^{n} = T_{2,i_2}^{k.n_\tau} \qquad (III.37)$$

$$\left(n_\tau \ \text{incr闘ent temporel correspondant à } \tau\right)$$

Il est dès lors possible de calculer toutes les températures dans les deux solides.

III.3 Algorithme de résolution ::

La non linéarité du problème de contact intermittent n'a pas permis aux auteurs de faire ressortir tous les phénomènes physiques liés à ce type de contact. Seul une solution numérique peut éclaircir ce qui se passe dans une interface intermittente. La solution numérique choisie par les différences finies, bien qu'un peu grossière, mais elle présente l'avantage de convenir à presque tous les problèmes de ce type. Le schéma utilisé pour la résolution est implicite, de type Crank – Nicolson (ce schéma est inconditionnellement stable). Nous aurons à résoudre deux problèmes pour les deux situations de contact parfait et imparfait. Dans cette étude, nous laisserons libres les caractéristiques des deux solides afin de généraliser la solution. Cette généralisation sera d'autant plus utile lorsque nous serons amenés à concevoir un dispositif expérimental. Le choix des matériaux et des dimensions des solides sera libre, et voir même modifiable.


Données du problème et initialisation des données, Remplissage des matrices initiales
contact
test sur la phase
(contac ou nn contact)
non contact
Compteur de la phase contact
Calcul de la température de contact T(i) à partir de l'algorithme de Thomas
Sommation de température à chaque point discrétisé
Compteur de la phase non contact
Calcul de la température de non contact T(i) à partir de l'algorithme de thomas
Affectation pour la matrice non contact
Sommation de température à chaque point discrétisé
Test sur la durée de la période
Réinitialisation de la matrice de la période de contact
Calcul de la température moyenne
Test sur le régime établi
Calcul de la densité de flux moyen, Résistance thermique de contac t Ecriturerésultat.

L'algorithme de résolution du problème de contact intermittent consiste dans la première phase à initialiser les paramètres du système par le remplissage des matrices correspondantes aux hypothèses ou données du problème. Après le test de phase contact ou non contact, on traitera deux situations de résolution, le cas où les solides sont en contact et le cas où les solides ne sont pas en contact, le programme débutera le calcul lorsque les deux solides sont mis en contact. Nous commençons par compter le nombre d'itérations de la boucle de la phase de contact. Le nombre d'itérations servira par la suite aux calculs des valeurs moyennes. Puis nous résolvons le problème pour chaque itération, la matrice de discrétisation obtenue est de type tridiagonale. Pour traiter cette situation et résoudre le problème, on fait appel à l'algorithme de thomas. A la fin de chaque boucle d'une phase nous effectuons la sommation de température de toute la boucle, et ce à chaque point discrétisé. Une fois la condition de la durée de la phase est atteinte, nous passerons à la résolution du problème pour la phase de non contact de la même manière que celle de phase de contact. La sommation de température, effectuée dans les deux phases, permettra de déterminer les valeurs moyennes des champs de températures des deux barreaux en contact, on peut ainsi déterminer la densité de flux moyenne transférée à l'interface pour chaque cas d'étude, et en déduira par la suite la résistance thermique de contact.

III.4 Résultats :

III.4.1Champ de température:

Dans cette partie nous allons examiner l'influence de la nature des matériaux et les paramètres d'intermittence de contact (γ,f) et celle de la qualité de contact thermique sur le transfert de chaleur à l'interface.

4.1.1Cas du contact parfait :

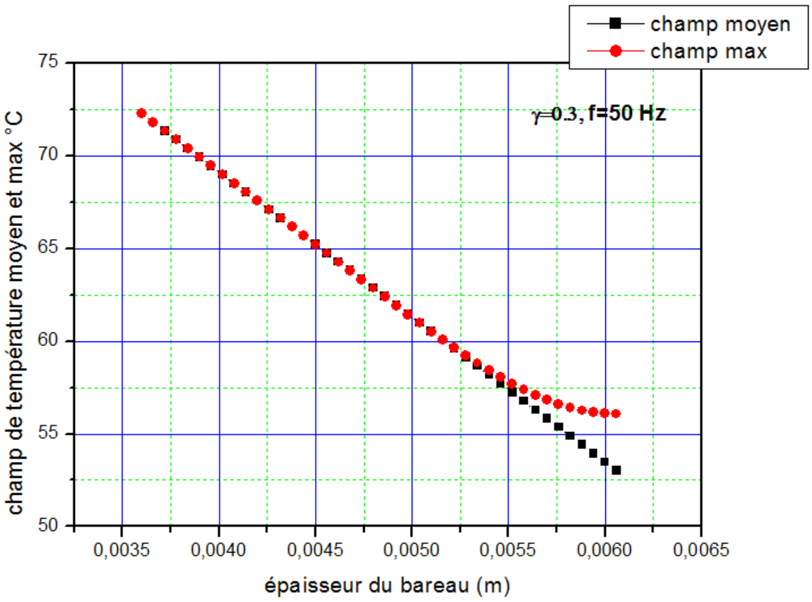


Figure 3.8 : champ de température moyen et maximal du couple Acier-Acier pour un contact parfait pour : γ=0.3 ; f=*50Hz*

On représente sur la figure 3.8 les champs de température moyen et maximal dans un couple de cylindres en acier pour une fréquence f= 50Hz et un coefficient de partage de la période γ = 0,3. Dans cette figure l'amplitude, des fluctuations maximales, est représenté par la courbe rouge ; L'effet des fluctuations sont très restreintes à la zone de contact. On remarque aussi que l'écart de température maximale à l'interface entre la valeur du champ moyen et du champ maximale est de : 3,04 C °.

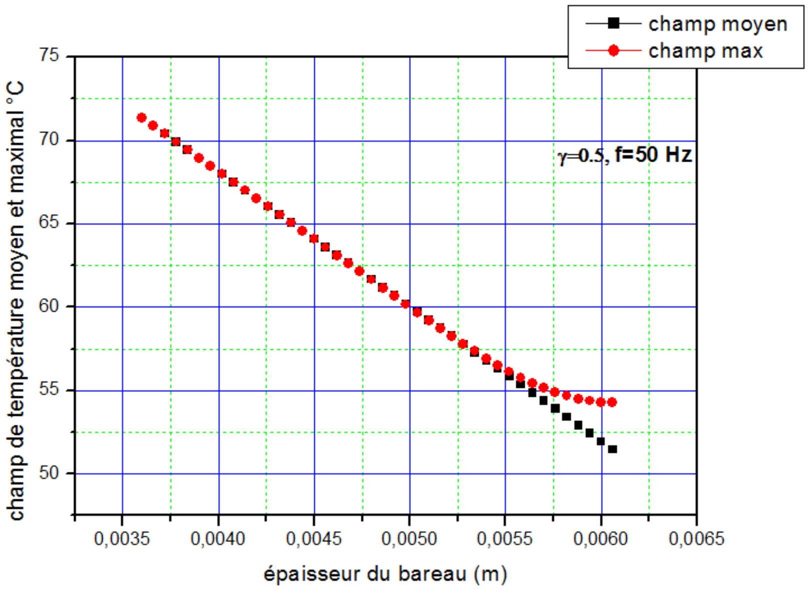


Figure 3.9 : champ de température moyen et maximal du couple acier-acier pour un contact parfait pour : γ=0.5 ; f=*50Hz*

La figure 3.9 représente les champs de températures moyen et maximale dans le même couple pour une fréquence : F=50Hz et γ= 0.5. On remarque les effets des fluctuations sont très restreintes à la zone de contact et l'écart maximale entre la valeur du champ moyen et du champ maximale est de : 2,80 C °

Si on fait la comparaison on constate que le coefficient de partage de la période influe sur l'écart ; quand en augmente le coefficient de partage l'écart est diminué.

4.1.2 Cas de contact imparfait :

- **Résistance statique :**

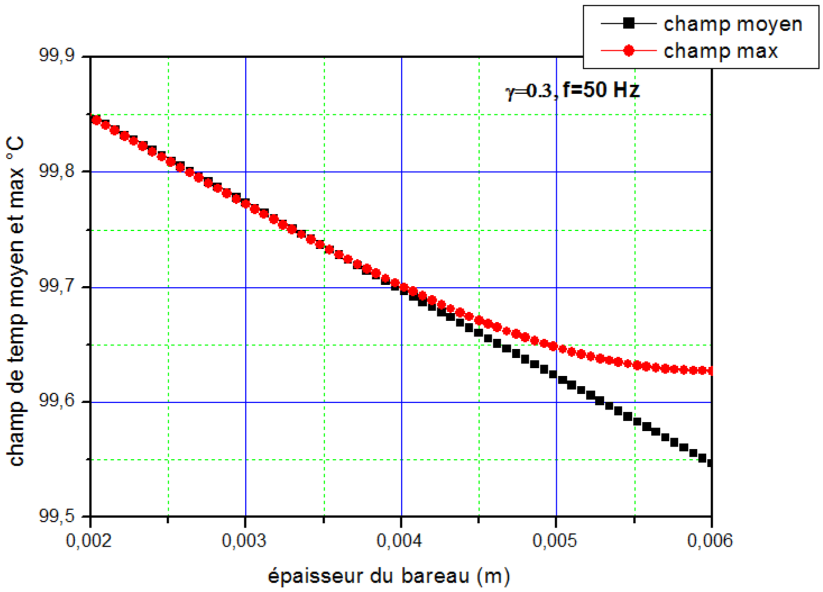


Figure 3.10 : champ de température moyen et maximal du couple Cu-Cu pour un contact imparfait pour : $Rc=10^{-3} K.m^2/W$; γ=0.3 ; f=50Hz

Dans cette figure, on présente les champs de température moyen et maximal, pour le cas d'un contact imparfait en présence d'une résistance thermique statique de 10^{-3} °K.m^2/W, pour une fréquence f=50Hz et γ=0,3. Les effets de fluctuation qui font décaler le champ moyen à celui maximale, sont moins importants que ceux du contact parfait. Plus on s'écarte de l'interface les deux courbes se rapprochent, et les effets de fluctuation sont concentrés autour de la zone de l'interface. On remarque que les oscillations sont très restreint à la zone de contact et l'écart de température maximale entre la valeur du champ moyen et le champ maximale est de : 0.0804 C °

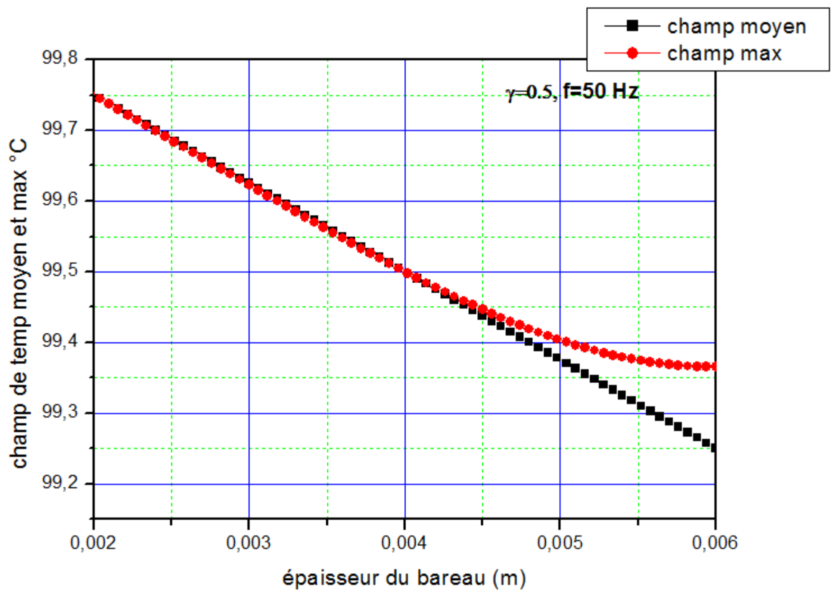


Figure 3.11 : champ de température moyen et maximal du couple Cu-Cu pour un contact imparfait pour : Rc=10^{-3}K.m^2/W ; γ=0.5 ; f=50Hz

La figure 3.10 représente le champ de température moyen et maximale pour le même couple avec une fréquence de f=50Hz et γ=0.5. D'après cette figure l'écart de température maximale à l'interface entre la valeur du champ moyen et du champ maximale est de : 0.114 C °.

Si on fait la comparaison on constat que le coefficient de partage de la période influe sur l'écart.

- **Résistance de forme parabolique :**

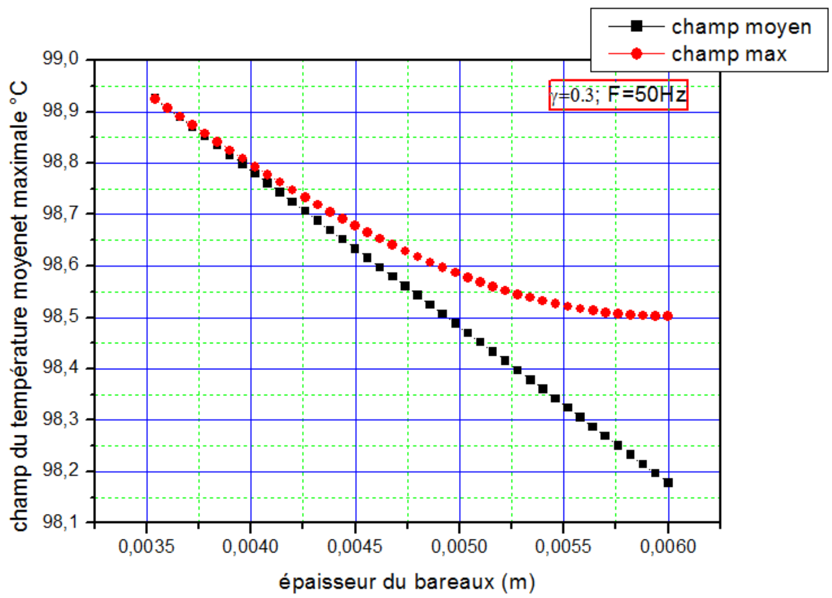


Figure 3.12 : champ de température moyen et maximal du couple Cu-Cu pour un contact imparfait pour une résistance de forme parabolique pour : γ=0.3 ; f=50Hz

On poursuit l'étude des champs moyen et maximal du contact intermittente imparfait pour les même conditions de f et γ, mais cette fois-ci, en prenant une résistance de contact qui évolue durant la phase de contact selon une fonction parabolique ayant une résistance maximale au début de la phase de contact de 10^{-3} °K m^2/W, puis elle prend une valeur maximale de 10^{-4} °k m^2/W au milieu de la phase et à la fin elle revient à 10^{-3} °K m^2/W.

Les effets de fluctuation, qui font décaler le champ moyen à celui du champ maximale, sont moins importants que ceux du contact parfait. Les effets de fluctuation se concentrent d'avantage encore autour de la zone de l'interface.

Selon la figure 3.12 l'écart de la température maximale entre la valeur du champ moyen et du champ maximale et de 0.30 °C. On conclut le contact de la résistance parabolique est en, deuxième position par rapport au contact parfait du point de vue effet des fluctuations

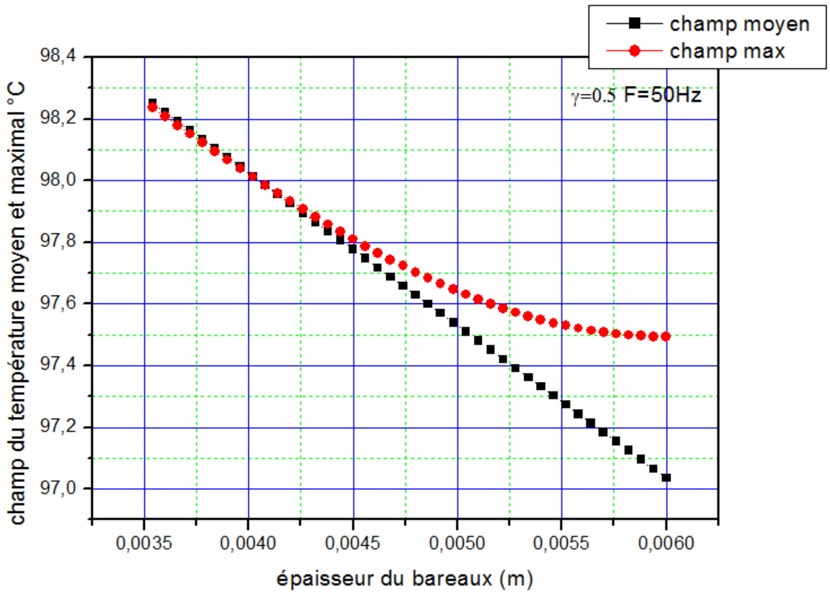


Figure 3.13 : champ de température moyen et maximal du couple Cu-Cu pour un contact imparfait pour une résistance de forme parabolique pour : γ=0.5 ; f=50Hz

La figure 3.13 représente les champs de la température moyenne et maximale du même couple avec une fréquence de : F=50Hz et γ=0.5. D'après cette figure l'écart de température maximale à l'interface entre la valeur du champ moyen et du champ maximale est de : 0.4 C °. Dans courbe on constate que l'effet du coefficient de partage de la période est apparent dans l'écart de température pour γ=0.5, l'écart est 0.4°C et pour γ=0.3 l'écart est 0.3°C.

- **Résistance de forme triangulaire :**

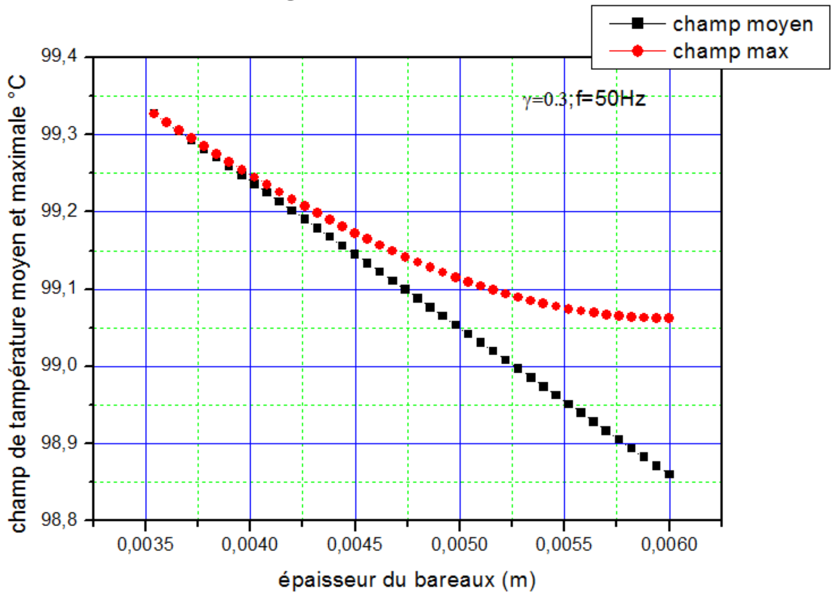


Figure 3.14 : champ de température moyen et maximal du couple Cu-Cu pour un contact imparfait pour une résistance de forme triangulaire pour : γ=0.3 ; f=50Hz

Dans la figure 3.14, on représente le champ moyen et maximale du contact intermittente imparfait dans un couple de cylindres en cuivre, aux mêmes condition de f et γ que ceux des cas précédents, mais en prenant cette fois ci le modèle d'une résistance thermique durant la phase de contact qui évolue selon une courbe de forme triangulaire entre un maximum de 10^{-3}(°K m ²/W) au début de la phase de contact, puis au milieu de la phase elle prend une valeur minimale de 10^{-4} (°K m ²/W).

En remarque que les oscillations sont très restreint a la zone de contact et l'écart de température maximale entre la valeur du champ moyen et le champ maximale est de : 0.0804 C °

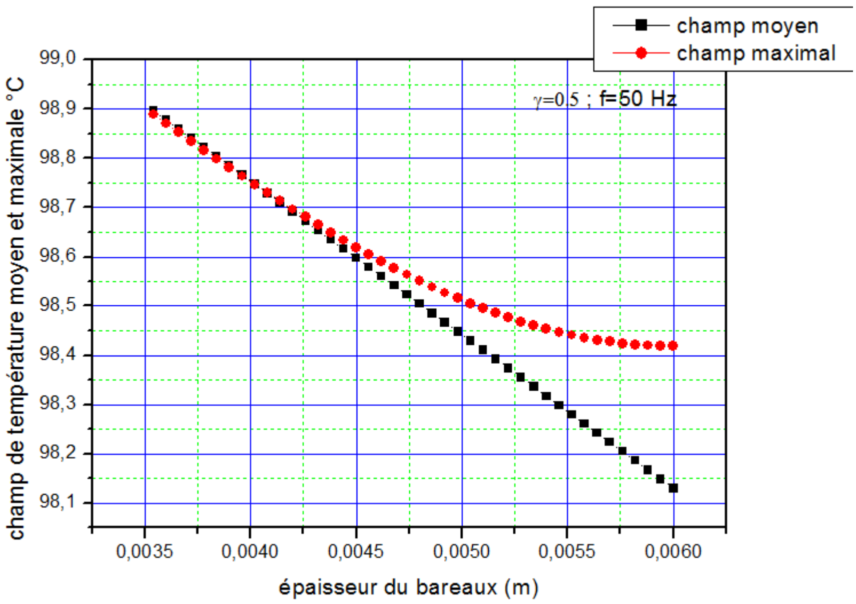


Figure3.15 : champ de température moyen et maximal du couple Cu-Cu pour un contact imparfait pour une résistance de forme triangulaire pour : γ=0.5 ; f=50Hz

La figure 3.15 représente le champ de température moyen et maximale pour le même couple avec une fréquence de f=50Hz et γ=0.5. D'après cette figure l'écart de température maximale à l'interface entre la valeur du champ moyen et du champ maximale est de :0,28847 C°.

- **Résistance de forme sinusoïdale :**

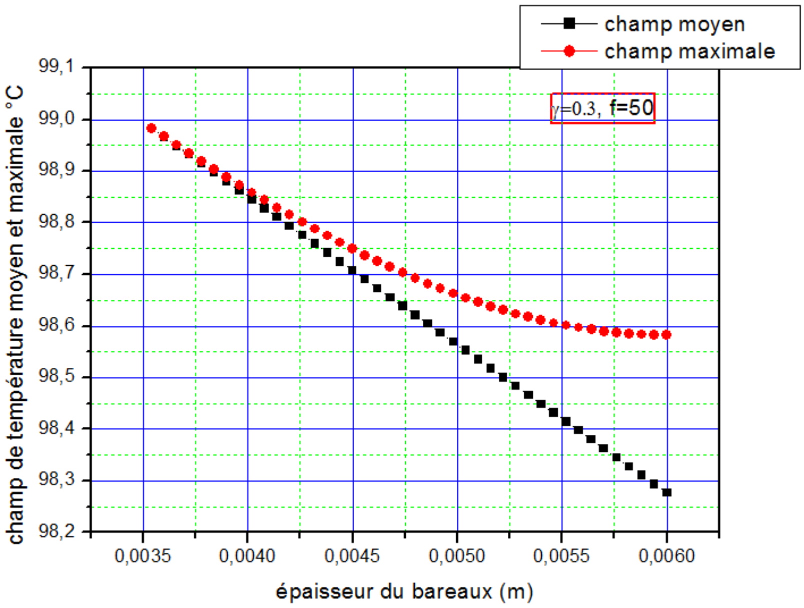


Figure 3.16 : champ de température moyen et maximal du couple Cu-Cu pour un contact imparfait pour une résistance de forme sinusoïdale
pour : γ=0.3 ; f=*50Hz*

Dans la figure 3.16, on représente le champ moyen et maximale du contact intermittente imparfait dans un couple de cylindres en cuivre, aux mêmes condition de f et γ que ceux des cas précédents, mais en prenant cette fois ci le modèle d'une résistance thermique durant la phase de contact qui évolue selon une courbe de forme sinusoïdale entre un maximum de 10^{-3}(°K m²/W) au début de la phase de contact, puis au milieu de la phase elle prend une valeur minimale de 10^{-4} (°K m²/W).

➢ ***Comparaison des 3 courbes des champs de température (Parabolique, triangulaire et sinusoïdale) :***

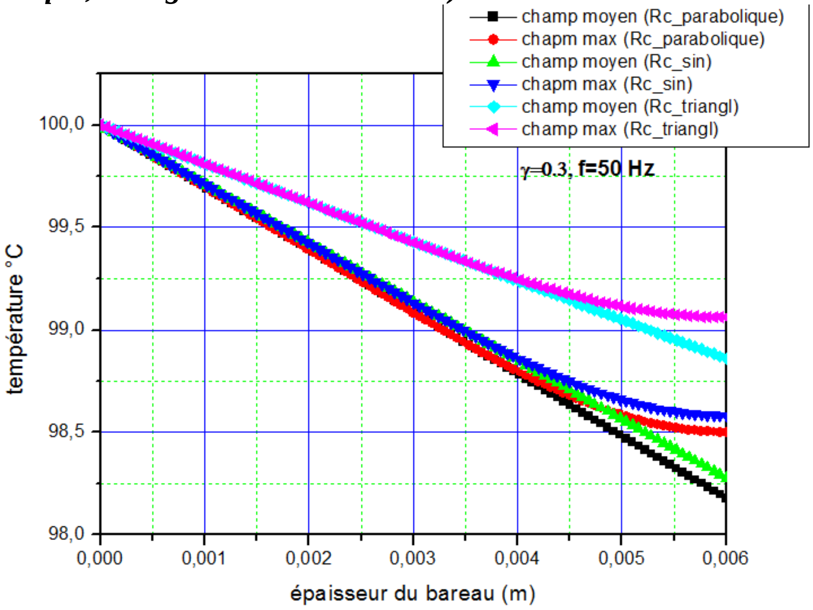


Figure 3.17 :Champs des températures moyens et maximales du couples Cu-Cu pour les 3 formes de résistances (parabolique, sin et triangulaire) pour : γ=0.3 ; f=50Hz

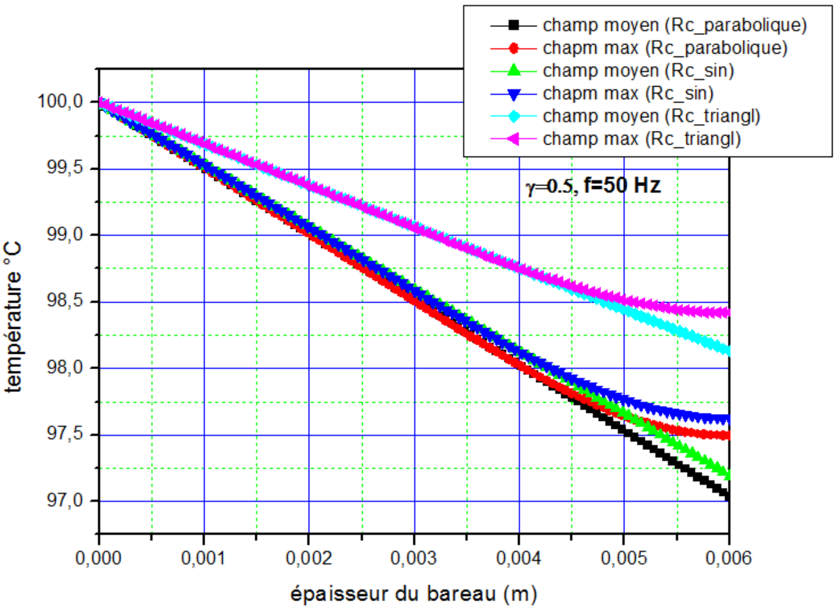


Figure 3.18 : Champs des températures moyens et maximales du couples Cu-Cu pour les 3 formes de résistances (parabolique, sin et triangulaire) pour : γ=0.5 ; f=50Hz

Dans les figures 3.17 et 3.18, on regroupe les champs moyens et maximales pour trois configurations de résistances de contact parabolique, sinusoïdale et triangulaire. On voit que le cas triangulaire prend des amplitudes plus importantes que ceux parabolique et sinusoïdale.

III.4.2 Saut de température:

Dans les figures 3.19 et 3.20, on présente le saut de température à l'interface à la fin de chaque période de non contact, c'est la situation ou le saut est maximal, et le saut de température moyen en fonction de l'effusivité, pour un coefficient de partage de la période égal à 0.5 et une fréquence de 50Hz. On constate que le saut de température maximal et moyen est d'autant plus important que l'effusivité est grande.

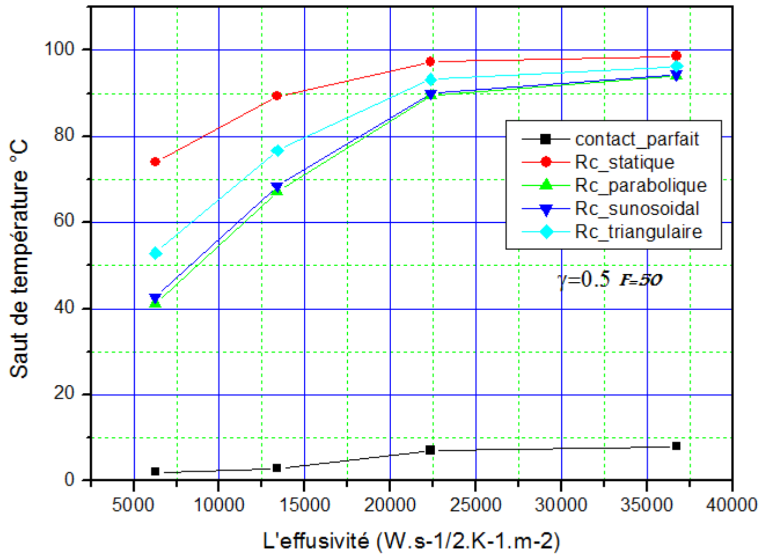


Figure 3.19 : Saut de température maximale en fonction de l'effusivité pour les 5 formes de résistances pour : γ=0.5 ; f=50Hz

Quel que soit la nature des matériaux et le coefficient de partage de la période, le saut de température maximale à l'interface prend les grandes valeurs lorsqu'on impose une résistance statique lors de la période de contact par contre il prend des petites valeurs lorsque le contact est parfait. Le contact pour une résistance imposé sous forme triangulaire prend la 2ème position, par contre le contact sinusoïdale et parabolique ont tendance à ce confondre avec une légère augmentation pour le contact sinusoïdale. Pour les matériaux les plus effusifs, les valeurs des sauts de température maximale à l'interface ont tendance, à l'exception du contact parfait, à se confondre.

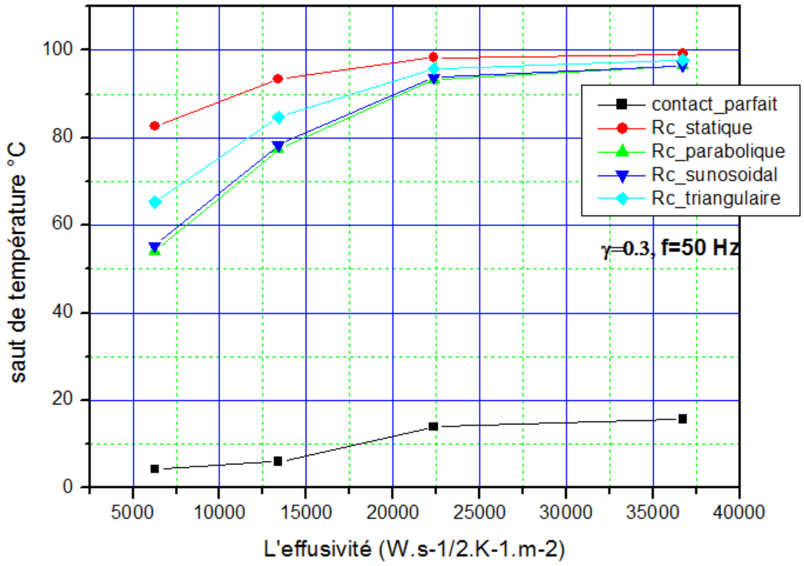


Figure 3.20 : Saut de température maximale en fonction de l'effusivité pour les 5 formes de résistances pour : γ=0.3 ; f=50Hz

Si on fait une comparaison entre la figure 19 et 20 ; on constat que lorsque le coefficient de partage de la p ériode diminue le saut de temp érature à l'interface augmente.

III.4.3 Flux de chaleur :

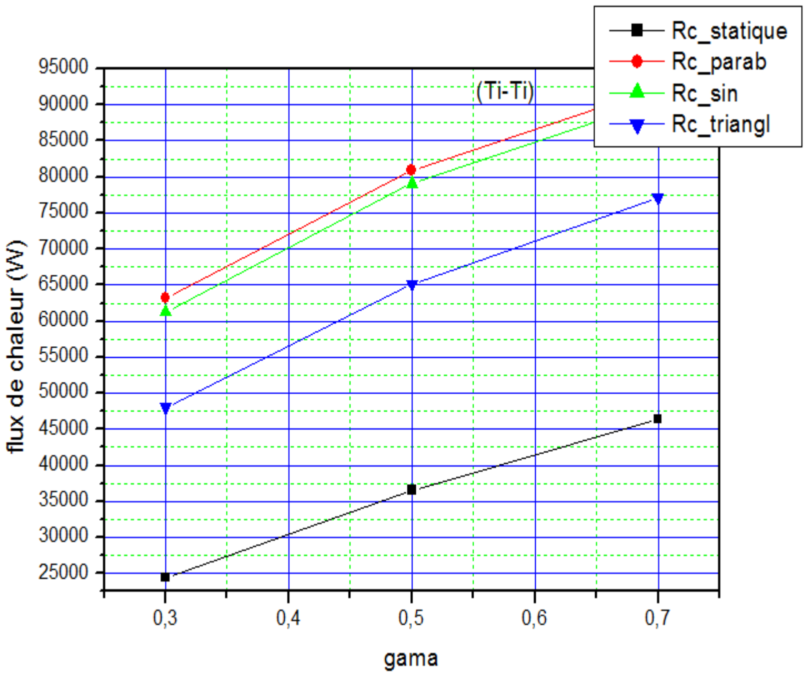


Fig.3.21 : variation de flux de chaleur en fonction de gamma du couple Ti-Ti pour les diff érentes formes de r ésistances

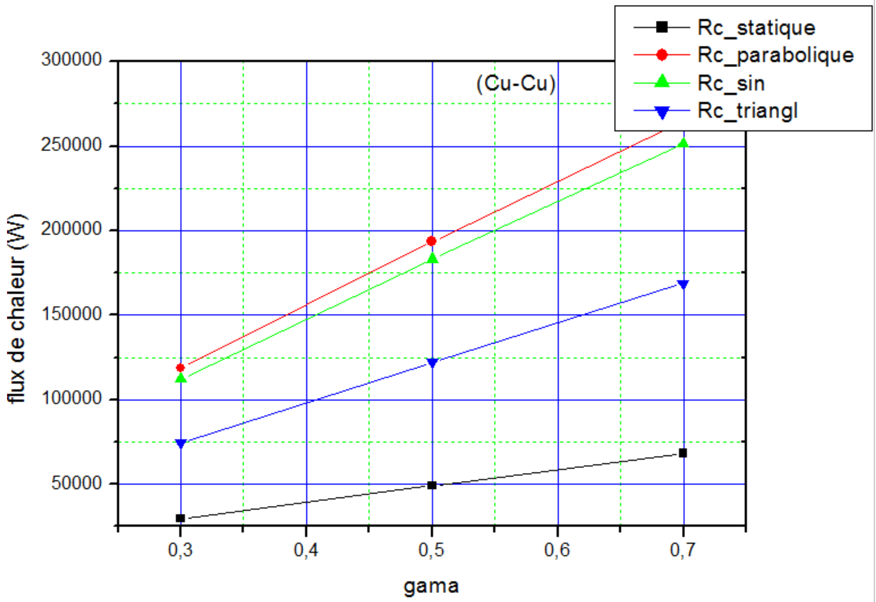


Fig.3.22 : variation de flux de chaleur en fonction de gamma du couple Cu-Cu pour les différentes formes de résistances

D'après les figures 3.21 et 3.22 on constate que les flux transférés à l'interface du contact intermittent prennent des valeurs considérables lorsque la résistance thermique est de forme parabolique, lorsque la résistance thermique est de forme sinusoïdale le flux a tendance à ce confondre au cas parabolique avec des valeurs légèrement inférieure. Pour le cas où la résistance est de forme triangulaire le flux transféré prend des valeurs inferieure au cas parabolique et sinusoïdale. Le flux le plus faible transféré est celui ou la résistance à la forme échelon. Les quatre courbes sont linéairement croissantes en fonction du coefficient de partage de période. Ces études ont été réalisées pour une fréquence de 20Hz

III.4.4 Résistance de contact :

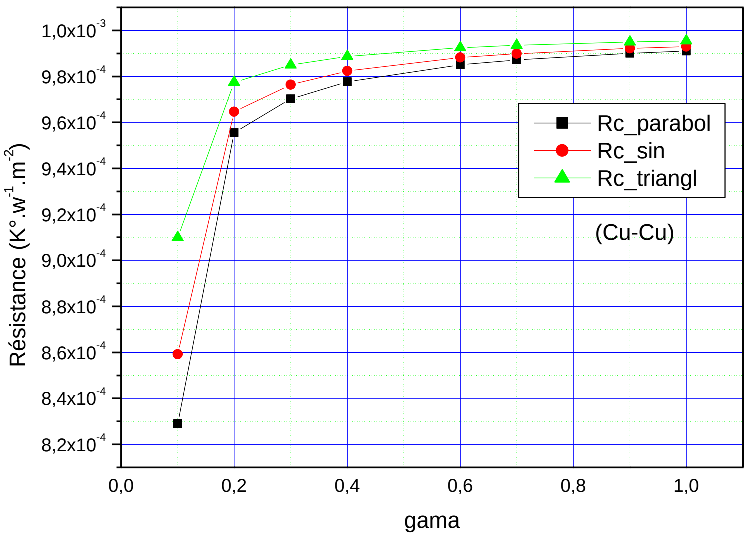


Fig. 3.23 Variation de la Résistance du contact en fonction de gamma du couple Cu-Cu pour les différentes formes de résistances

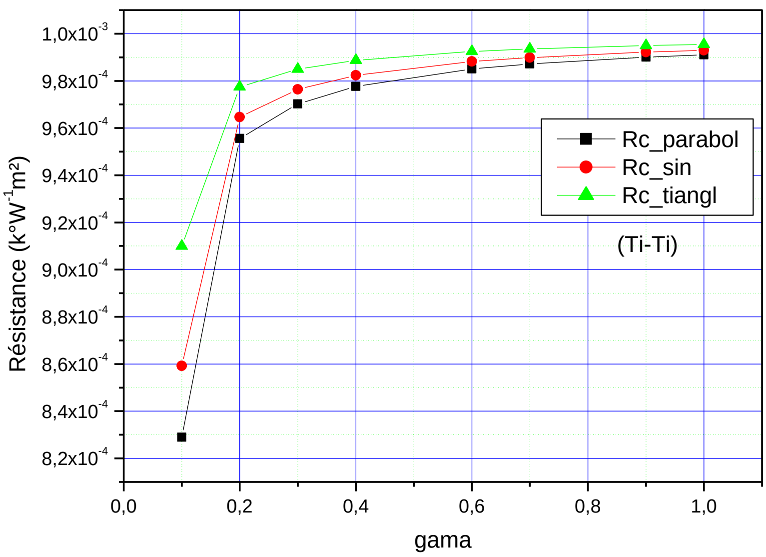


Fig.3.24 Variation de la Résistance du contact en fonction de gamma du couple Ti-Ti pour les différentes formes de résistances

Les figures 3.23 et 3.24 représentent l'évolution de la résistance de contact en fonction du coefficient de partage de la période pour trois formes de résistance de contact parabolique, sinusoïdale et triangulaire. Cette étude a été faite tout d'abord pour un couple cuivre-cuivre, puis pour un couple Titane-Titane. On constate pour les deux cas d'études que la résistance triangulaire prend les valeurs les plus élevée et elle est monotone croissante au début puis la pente diminue et la résistance a tendance à prendre des valeurs constantes. La même remarque concernant l'évolution est faite pour les autres résistances, seulement en valeur la résistance sinusoïdale prend la deuxième position et la résistance parabolique prend la dernière valeur.

Conclusion

L'étude que nous avons menée sur le contact intermittent s'est intéressée à l'influence des modèles des résistances thermiques de contact sur le contact intermittent. Le modèle que nous proposons pour cette étude considère que la surface de contact entre les deux barreaux mis en contact intermittent subie une déformation élastique, c'est-à-dire que les têtes des aspérités formant cette surface évolueront durant la période de contact et reviendrons à leur forme dans la période de non contact. Cette évolution de la surface engendrera obligatoirement la variation de la résistance de contact lors de la période de contact. Cette évolution peut prendre plusieurs forme et ce selon les formes des aspérités. Cependant nous proposons dans cette étude une variété de résistance de contact, parfait (Rc=0), échelon (Rc=constante), parabolique, triangulaire et sinusoïdale. On s'est intéressé à voir l'influence de certains nombre de paramètres tels que, le coefficient de partage de la période, la fréquence, et l'effusivité des matériaux, sur les champs moyens et maximales de part et d'autres des barreaux mis en contact. Nous conservons dans cette le modèle de deux barreaux de même dimensions isolés thermiquement du coté des faces latérales, le tout gouverné par l'équation, de conduction, de la chaleur 1D, mais aux conditions aux limites appropriées à notre étude. Le modèle des résistances, sous les différentes proposées, à été validé dans le programme développé en fortran. Ainsi toutes les formes ont été reproduites aux limites de résistances modérées (sans charge et sous charge). Une fois que le modèle est validé, des études ont été effectuées sur les distributions de températures moyennes et maximales de part et d'autres des deux barreaux mis en contact. La distribution maximale de la température représente aussi la distribution des amplitudes maximales des fluctuations. Ainsi ce choix de cette étude est justifié et concerne surtout l'étude des effets de fluctuations aux zones très restreintes au contact. A travers cette étude on peut dire qu'on a pu se rapprocher aux cas réel, tenant compte de l'évolution de la surface de contact, et ce en envisageant la majorité des cas par le choix de forme multiples des résistances thermiques.

Bibliographie :

- Etude des fluctuant d’un régime de contact intermittent Thèse de Derdachi 2006. (université de Nantes)
- Thèse de doctorat AZZOUZ SALAH-Etude théorique et méthodologie expérimentale du contact thermique intermittent : influence de la fréquence et du coefficient de partage de la période sur le transfert thermique a l’interface
- J.R. HOWARD, A.E. SUTTON, An analogue study of heat transfer through periodically contacting surfaces, Internat. J. Heat Mass Transfer 13 173–183
- J.R. HOWARD, A.E. SUTTON, The effect of thermal contact resistance on heat transfer between periodically contacting surfaces, J. Heat Transfer Trans. ASME 95411–412, 1973
- J.R. REED, G. MULLINEUX, Quasi-steady state solution of periodically varying phenomena, Internat. J. Heat Mass Transfer 16 2007–2012, 1973.
- M.D. MIKHAILOV, Quasi-steady state temperature distribution in finite regions periodically- arying boundary conditions, Internat. J. Heat Mass Transfer 17 1475–1478 1974.
- B. VICK, M.N. ÖZISIK, Quasi-steady-state temperature distribution in periodically contacting finite regions, J. Heat Transfer Trans. ASME 103 739–744, 1981.
- Cours transferts thermique-Yves JANNOT 2011
- Etude de la transmission de chaleur- Université de Sousse
- Thèse de doctorat KAZA GAY 2010- Contribution à l'étude de la Résistance Thermique de Contact et à sa modélisation à travers l'écrasement de l'interface tôle/outil dans la mise en forme à chaud de tôles d'acier-KAZA GAY 2010
- Etude expérimentale des transferts de chaleur à une interface pièce- GUILLOT Emilien_
- Transferts du chaleur par conduction-Dr. Slimane BOUGHALI_UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA
- Ouvrage d’OZISK, « Finite difference in heat transfer ».
- Transferts de chaleur par conductions 2eme partie « les régimes instationnaires » cours de J.P.BARDON 1998, Université de Nantes –ISITEM.