

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

BADJI MOKHTAR ANNABA-UNIVERSITY  
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR ANNABA



جامعة باجي مختار عنابة

FACULTE DES SCIENCES DE L'INGENIORAT  
DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

## MEMOIRE

PRESENTE EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME DE MASTER

### INTITULE

# Convection naturelle dans une cavité carrée différentiellement chauffée

DOMAINE : SCIENCES ET TECHNOLOGIE

FILIERE : GENIE MECANIQUE

SPECIALITE : ENERGETIQUE ET ENVIRONNEMENT

PRESENTE PAR : GOUASMIA ABD ELGHANI

DIRECTEUR DU MEMOIRE : MECHIGHEL FARID

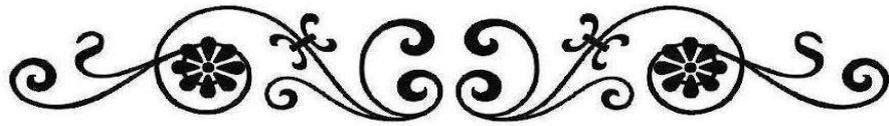
DEVANT LE JURY

PRESIDENT : MZAD H. (PR)      UNIVERSITE BADJI MOKHTAR ANNABA

EXAMINATEURS :

- AZZOUZ S. (MC)      UNIVERSITE BADJI MOKHTAR ANNABA
- DJEMILI A. (MC)      UNIVERSITE BADJI MOKHTAR ANNABA

Année: 2013/2014



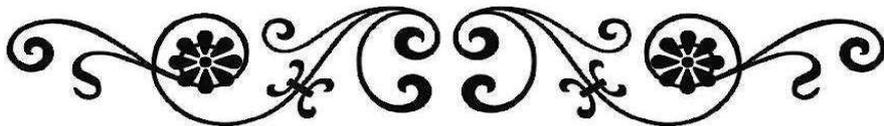
## ***Dédicaces***

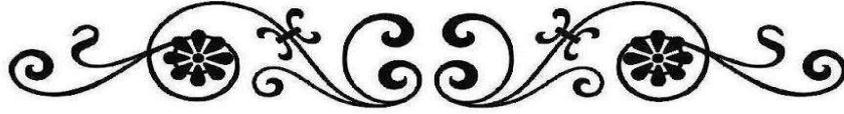
*Je dédie ce modeste travail comme preuve d'amour  
et de reconnaissance à tout ma famille.*

*À mes très chers parents qui m'ont tout donnée pour  
réussir avec tant d'amour et d'encouragements durant toute  
ma vie.*

*À mes chers frères et sœurs*

*À toutes les personnes qui tiennent une place importante  
dans mon cœur, à tous mes amis (e) et à tous ceux qui m'aiment  
et que j'aime.*





## *Remerciements*

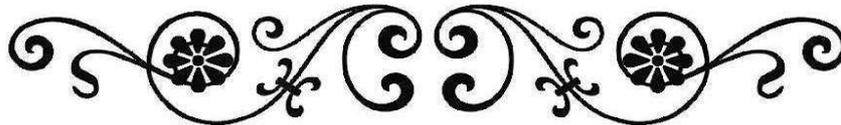
*Nous remercions tout d'abord Dieu le tout puissant de nous avoir ouvert les portes du savoir, de nous avoir aidé surtout dans les moments difficiles et de nous avoir permis d'être ce que nous sommes devenus.*

*Nous tenons en premier à mentionner notre grande gratitude envers notre promoteur M. Mechighel Farid, pour son aide, et encouragement.*

*Nous remercions les membres du jury d'avoir accepté d'évaluer la qualité et la valeur de notre travail.*

*Nous adressons nos remerciements et sincère gratitude à nos parents et à nos amis qui ont participé eux aussi à leur manière à la réussite de ce travail.*

*En fin, nous remercions, toute personne ayant contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce travail.*



**Résumé :**

Le travail que nous avons présenté dans ce mémoire concerne l'étude de la circulation d'air par convection naturelle en régime laminaire. Cette circulation est causée par des variations de la température qui provoquent une variation de la masse volumique du fluide créant ainsi des mouvement de la convection naturelle dans une cavité carrée avec des parois horizontales adiabatiques et des parois verticales sont chauffées différentiellement ( $T_c > T_f$ ) . Le modèle mathématique décrivant le présent problème a été développé en ce basant sur l'équation de Navier-stokes et de l'énergie. Le modèle élaboré permet de déterminer les lignes de courant, les vitesses selon l'axe des x et des y, et aussi les profils de température sont présentés.

**Abstract:**

The work we have presented in this memory concerns the study of air circulation by natural convection in laminar regime. This circulation is caused by temperature variations that cause a variation of the density of the fluid and creating movement of the natural convection in a square cavity with adiabatic walls horizontal and vertical walls are heated differentially. The mathematical model describing this problem has been developed as based on the Navier-Stokes and energy. The model developed to determine the current lines, speeds along the axis x and y, and also the temperature profiles are presented.

**Table des matières :**

<b>Dédicace</b> .....	i
<b>Remerciements</b> .....	ii
<b>Résumé</b> .....	iii
<b>Table des matières</b> .....	iv
<b>Liste des figures</b> .....	vii
<b>Nomenclature</b> .....	ix
<b><i>Introduction générale</i></b> :.....	<b>1</b>

**Chapitre I : Généralités et recherches bibliographiques**

I.1.Introduction :.....	4
I.2.Modes de transfert de chaleur :.....	6
I.2.1.Conduction :.....	7
I.2.1.1.Loi de Fourier :.....	8
I.2.1.2.Résistance thermique :.....	9
I.2.2.Convection :.....	11
I.2.2.1.Calcul du coefficient d'échange par convection :.....	12
I.2.2.2.Convection naturelle :.....	13
I.2.2.3.Convection forcée :.....	14
I.2.3.Rayonnement :.....	14
I.3.Convection dans les enceintes :.....	15
I.3.1.Enceinte avec gradient de température vertical:.....	16
I.3.2.Enceinte avec gradient de température horizontal :.....	17
I.4.Domaines d'applications de la convection naturelle :.....	18

I.5.Revue bibliographique :.....	19
I.6. Objectif de l'étude : .....	24

**Chapitre II : Modèle mathématique de convection naturelle**

II.1.Introduction :.....	24
II.2.Description du problème : .....	25
II.3.Equations du modèle mathématique : .....	26
II.3.1.Equations de Navier-Stokes :.....	27
II.3.2.Equation de conservation de masse ou la continuité : .....	27
II.3.3.Conservation de quantité de mouvement : .....	32
II.3.4.Equation de conservation d'énergie :.....	37
II.4.Forme non-dimensionnelle des équations régissant :.....	40
II.5.Problème de convection naturelle :.....	41
II.5.1. Nombres adimensionnels :.....	44
II.5.1.1.Nombre de Nusselt :.....	44
II.5.1.2. Nombre de Grashof : .....	46
II.5.1.3.Nombre de Rayleigh :.....	46
II.5.1.4.Nombre de prandtl :.....	47
II.6.Convection forcée : .....	47
II.7.Problème de convection mixte :.....	49

**Chapitre III : Application: Etude de la convection naturelle dans une cavité carrée**

III.1. Introduction : .....	55
III.2. Présentation des résultats : .....	55
<b>Conclusion générale.....</b>	<b>64</b>

Références bibliographiques.....

*Liste des Figures*

- Figure (I.1) Schémas de transfert de chaleur par convection
- Figure (I.2) transfert de chaleur par conduction
- Figure (I.3) Conduction dans une couche élémentaire de mur plan
- Figure (I.4) Schématisation du mur monocouche
- Figure (I.5) Schématisation du mur multicouche
- Figure (I.6) Transfert de chaleur par convection
- Figure (I.7) Gradient thermique dans la couche laminaire
- Figure (I.8) Schéma représentant la configuration de Rayleigh – Bénard [2,3].
- Figure (I.9) Schémas représentant les rouleaux de la convection de Rayleigh- Bénard [1]
- Figure (I.10) Schéma représentant la configuration de Rayleigh
- Figure (I.11) Différents endroits de chauffage
- Figure (II.1) Configuration physique
- Figure (II.2) Volume de contrôle infinitésimal (2D). Dérivation de conservation de masse dans un champ d'écoulement
- Figure (II.3) Circulation forcée sur une plaque plane et convection naturelle dans une pièce
- Figure (II.4) Volume de contrôle infinitésimal dans un champ d'écoulement.

- Dérivation de la conservation de quantité de mouvement dans la direction  $x_1$ .
- Taux de variation de quantité de mouvement
- Figure (II.5) volume de contrôle infinitésimal dans un champ d'écoulement.
- Dérivation de la conservation de quantité de mouvement dans la direction  $x$ .
- Les forces de viscosité et de pression
- Figure (II.6) volume de contrôle infinitésimal dans un champ d'écoulement. Dérivation de la conservation d'énergie
- Figure (II.7) Le débit naturel de convection près d'une chaude, plaque verticale
- Figure (III.1) Géométrie et conditions aux limites pour le problème de l'écoulement de convection naturelle dans une enceinte carrée.
- Figure (III.2) Problème de l'écoulement de convection naturelle dans une enceinte carrée : Maillage utilisé
- Figure (III.3) Convection naturelle dans une enceinte carrée : lignes de courant et température pour différents nombres de Rayleigh,  $Pr = 0,71$  (**Lewis et al. [27]**).
- Figure (III.4) Convection naturelle dans une enceinte carrée : lignes de courant et température pour différents nombres  $Ra$ ,  $Pr = 0,71$  (présente étude)

Figure (III.5) Convection naturelle dans une enceinte carrée : lignes de courant et température pour différents nombres Ra, Pr = 0,71 (présente étude)

## *Nomenclature*

H	Dimension caractéristique [m]
L	Dimension caractéristique [m]
g	Accélération de pesanteur [ $\text{m.s}^{-2}$ ]
$T_f$	Température sur la paroi froide [K]
$T_c$	Température sur la paroi chaude [K]
$u_0$	Vitesse caractéristique [ $\text{m.s}^{-1}$ ]
$u, v$	Composantes de la vitesse
$x, y$	Coordonnées cartésiennes dimensionnelles
t	Temps [s]
$C_p$	Capacité calorifique massique à pression constante [ $\text{J.Kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ]
P	Pression du fluide [Pa]
$\rho_a$	Masse volumique de référence [ $\text{Kg.m}^{-3}$ ]
$P_a$	Pression de référence [Pa]
$\theta$	Température adimensionnelle
$\Delta T$	Écart de température entre la paroi chaude et la paroi froid [K]
$i, j$	Coordonnées logiques des points
h	Le coefficient d'échange convectif [ $\text{W/m}^2.\text{K}$ ]
$\psi$	Fonction de courant
$\theta$	Température adimensionnelle

**Symboles grecs :**

$\alpha$	Diffusivité thermique	$[\text{m}^2.\text{s}^{-1}]$
$\beta$	Dilatation thermique	$[\text{K}^{-1}]$
$\lambda$	Conductivité thermique	$[\text{W}.\text{m}^{-1}.\text{K}^{-1}]$
$\nu$	viscosité cinématique	$[\text{m}^2.\text{s}^{-1}]$
$\rho$	Masse volumique du fluide	$[\text{Kg}.\text{m}^{-3}]$
$\mu$	Viscosité dynamique	$[\text{Kg}/\text{m}.\text{s}]$

**Nombres adimensionnelles :**

Pr	Nombre de Prantdl
Nu	Nombre de Nusselt
Re	Nombre de Reynolds
Gr	Nombre de Grashof
Ra	Nombre de Rayleigh

---

# Introduction Générale

---

## *Introduction générale :*

Le transfert de chaleur est fréquemment rencontré dans la nature et dans différents systèmes industriels. Il résulte d'une interaction complexe au sein d'un milieu ou entre milieux dès qu'il y a un gradient de température. Cette interaction est responsable de la diversité des écoulements qui en résultent. La convection thermique est un des quatre modes (conduction, convection, rayonnement et changement de phase) de transfert de chaleur qui a une importance vitale aussi bien dans le domaine fondamental que dans les domaines des applications telles que, la climatisation et le chauffage dans le domaine de l'habitat, le refroidissement dans les thermosiphons et les systèmes **mécaniques ou électroniques**, les systèmes de chauffage de fluides (air ou eau) impliquant les capteurs solaires, le séchage des produits agro-alimentaires, les échangeurs de chaleur et les serres dans le domaine agricole.

Pour ce mode de transfert de chaleur (convection) on distingue : la convection forcée, pour laquelle le mouvement du fluide est produit par une action extérieure (pompe, ventilateur, vent...) et la convection naturelle ou libre, pour laquelle le mouvement du fluide résulte simplement de la différence de la masse volumique entre les régions chaude et froide du fluide en présence d'un champ de gravité. Depuis plusieurs décennies, le transfert de chaleur par **convection naturelle** a fait l'objet de nombreux travaux de recherche et offre également un champ d'application diversifié.

La convection est une mode de transport d'énergie par l'action combinée de la conduction, de l'accumulation de l'énergie et du mouvement du milieu. La convection est le mécanisme le plus important de transfert d'énergie entre une surface solide et un liquide ou un gaz. Le transfert d'énergie par convection d'une surface dont la température est supérieure à celle du fluide qui l'entoure s'effectue en plusieurs étapes.

D'abord la chaleur s'écoule par conduction de la surface aux particules fluides adjacentes. L'énergie ainsi transmise sert à augmenter la température et l'énergie interne de ces particules. Ensuite ces dernières vont se mélanger avec d'autres particules situées dans une région à basse température et transférer une partie de leur énergie, celle-ci est à présent emmagasinée dans les particules fluides et elle est transportée sous l'effet de leur mouvement.

La transmission de chaleur par convection est désignée, selon le mode d'écoulement du fluide, par **convection libre** et **convection forcée**. Lorsqu'il se produit au sein du fluide des courants dus simplement aux différences de densité résultant des gradients de température, on dit que la convection est naturelle ou libre. Par contre si le mouvement du fluide est provoqué par une action externe, telle une pompe ou un ventilateur, le processus est appelé convection forcée. Si les deux causes existent simultanément, sans que l'une soit négligeable par rapport à l'autre, la **convection** est dite **mixte**.

Le phénomène de transfert de chaleur par la convection naturelle, dans des espaces confinés et semi-confinés, est généralement dû à la présence des gradients de température provoquant une distribution non uniforme de la densité du fluide, ce qui produit un mouvement convectif sous l'effet de la gravité.

L'étude de la convection naturelle et des caractéristiques des écoulements, générés par la flottabilité (la poussée d'Archimède) dans des cavités, est un problème dont l'intérêt est important tant sur le plan fondamental qu'au niveau des applications pratiques. Parmi ces applications, nous pouvons citer : le stockage des fluides, l'écoulement d'air dans les pièces d'habitation et dans les capteurs solaires, le refroidissement des circuits électroniques et des réacteurs nucléaires. En plus, la convection naturelle constitue un problème test pour de nombreuses techniques numériques telles que les différences finies, volumes finis, éléments finis et autres méthodes spectrales.

De nombreux travaux concernent l'étude des phénomènes thermiques dans les cavités d'air fermées ; le but ultime étant de pouvoir maîtriser les transferts de chaleur. En effet, pour plusieurs applications, on cherche à améliorer les transferts thermiques dans ces cavités d'air alors que pour d'autres, on cherche à augmenter le degré d'isolation. Pour les écoulements de convection libre dans les cavités fermées, les paramètres les plus importants sont la géométrie de l'espace, les propriétés thermophysiques du fluide et les conditions aux limites thermiques.

La **convection naturelle dans une cavité différentiellement chauffée** avec un gradient de température horizontal consiste en l'écoulement de fluide dans une cavité où deux parois verticales opposées sont maintenues à deux températures constantes et différentes, les autres parois pouvant être adiabatiques ou conductrices figure(I.1). L'écoulement est alors monocellulaire, le fluide ascendant le long de la paroi chaude et descendant suivant la paroi froide.

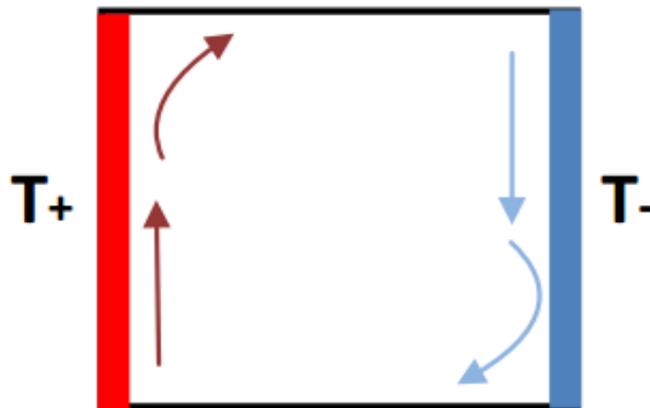


Figure : Schéma de l'écoulement de convection naturelle dans une cavité carrée

Le présent mémoire se compose de trois chapitres suivants :

Ce mémoire débute par une introduction générale dans laquelle on présente l'objectif essentiel de cette étude.

Le **premier chapitre**, on a fait une étude générale sur les différents modes de transfert de chaleur (conduction, convection, rayonnement) et ensuite basé sur les différents type de convection : convection naturelle, convection forcée et convection mixte.

Le **second chapitre** présente en détail le modèle mathématique régissant les écoulements de fluides avec transfert de chaleur par convection. Une dérivation des équations de Navier-Stokes et équation d'énergie est présentée. En particulier, les équations régissant les différents types de convection (naturelle, forcée ou mixte) sont présentées.

Dans le **troisième chapitre**, nous appliquons le modèle mathématique pour réaliser une étude numérique d'un l'écoulement d'un fluide (avec transfert de la chaleur) dans une cavité carrée. Les résultats obtenus pour le problème de convection naturelle dans une cavité carrée sont présentés et commentés.

Enfin une **conclusion générale** est présentée à la fin de cette étude.

---

# CHAPITRE I :

## Modes de transfert de chaleur

---

---

## **I.1.Introduction :**

La détermination du transfert de chaleur et des caractéristiques des écoulements, générés par les forces d'Archimède (forces de flottabilités) dans les cavités est un problème, dont l'intérêt tant sur le plan fondamental qu'au niveau des applications pratiques est important. Parmi ces applications nous pouvons citer : le stockage des fluides, l'écoulement d'air dans les pièces d'habitation, dans les capteurs solaires et le refroidissement des équipements électroniques etc.

La convection est le mécanisme le plus important de transfert d'énergie entre une surface solide et un liquide ou un gaz. Deux types de convection sont généralement distingués :

La convection forcée dans laquelle le mouvement de fluide est provoqué par l'action des forces extérieures (par exemple pompe, ventilateur etc.), qui lui imprime des vitesses de déplacement assez importantes. En conséquence, l'intensité du transfert thermique par convection forcée sera en liaison directe avec le régime de mouvement du fluide.

La convection naturelle dans laquelle le mouvement du fluide est produit par les différences de densité entre les particules chaudes et celles froides existant dans un fluide, situé dans un champ de forces massiques.

Cette différence de densité, qui est la plupart du temps provoquée par une différence de température, avec la force de gravité, crée une force de flottabilité, qui par conséquent crée une différence de quantité de mouvement.

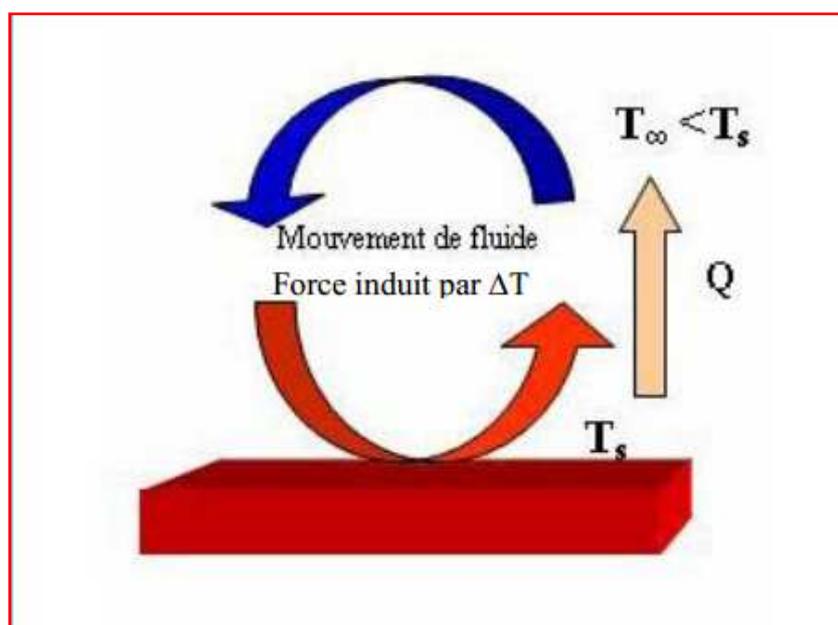


Figure (I.1) : Schémas de transfert de chaleur par convection [1]

## **I.2. Modes de transfert de chaleur :**

La thermodynamique permet de prévoir la quantité totale d'énergie qu'un système doit échanger avec l'extérieur pour passer d'un état d'équilibre à un autre. La thermique (ou thermocinétique) se propose de décrire quantitativement (dans l'espace et dans le temps) l'évolution des grandeurs caractéristiques du système, en particulier la température, entre l'état d'équilibre initial et l'état d'équilibre final.

Le deuxième principe de la thermodynamique admet que la chaleur (ou énergie thermique) ne peut passer que d'un corps chaud vers un corps froid, c'est-à-dire d'un corps à température donnée vers un autre à température plus basse.

Le transfert de chaleur se produit suivant deux modes semblables:

- soit par contact : c'est la conduction thermique;
- soit à distance : c'est le rayonnement thermique.

On considère un troisième mode de transfert d'énergie calorifique qui est la Convection. (Échange de chaleur entre un fluide et un solide). Dans ce cas le phénomène thermique est compliqué par des déplacements de matière et au transfert de chaleur se superpose le transfert de masse.

La thermodynamique établit les conditions de cette transmission de chaleur et détermine les conséquences qui en résultent, mais elle ne se préoccupe pas de la vitesse de cette transmission. En thermodynamique classique, les transformations réversibles supposent essentiellement le voisinage de l'équilibre et par conséquent, les échanges ne peuvent s'effectuer qu'entre corps à températures très voisines. Dans la pratique, ces transferts de chaleur s'effectuent entre corps dont les différences de températures sont finies et la vitesse avec laquelle ils s'effectuent, jouent un rôle important.

### I.2.1. Conduction :

Ce mode de transfert de chaleur se retrouve dans tous les composants "solides" d'une transmission, c'est le plus simple. Il correspond au transfert de chaleur dans un solide d'un point chaud vers un point froid.

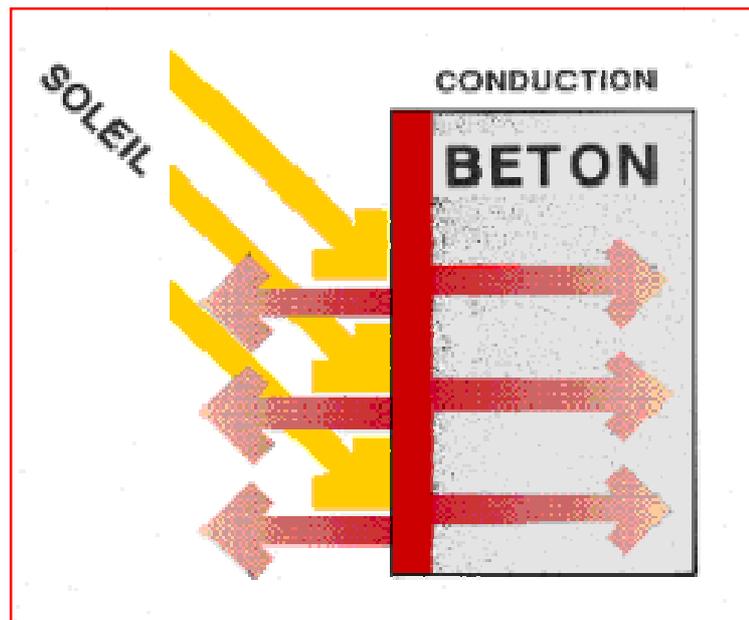


Figure (I.2) : transfert de chaleur par conduction

#### I.2.1.1. Loi de Fourier :

Soit un corps solide, homogène et isotrope à travers lequel passe un courant unidirectionnel de chaleur. Soit une petite couche plane perpendiculaire à la direction  $x$  de propagation de la chaleur d'épaisseur  $dx$  et d'aire  $S$  à l'intérieur de ce milieu.

Les deux faces de cette couche sont des surfaces isothermes. La première est à la température  $\theta$  et la seconde à la température  $\theta + d\theta$  (avec  $d\theta < 0$ ). Le

gradient de température  $\frac{d\theta}{dx}$ , est la variation de la température par unité de longueur, lorsqu'on se déplace dans la direction de propagation de la chaleur.

La conservation d'énergie au sein du volume défini par  $dx$  et  $A$  se traduit par l'équation :

$$k\left(\frac{d^2\theta}{dx^2}\right) + Q = \rho C \frac{d\theta}{dt} \quad (\text{I.1})$$

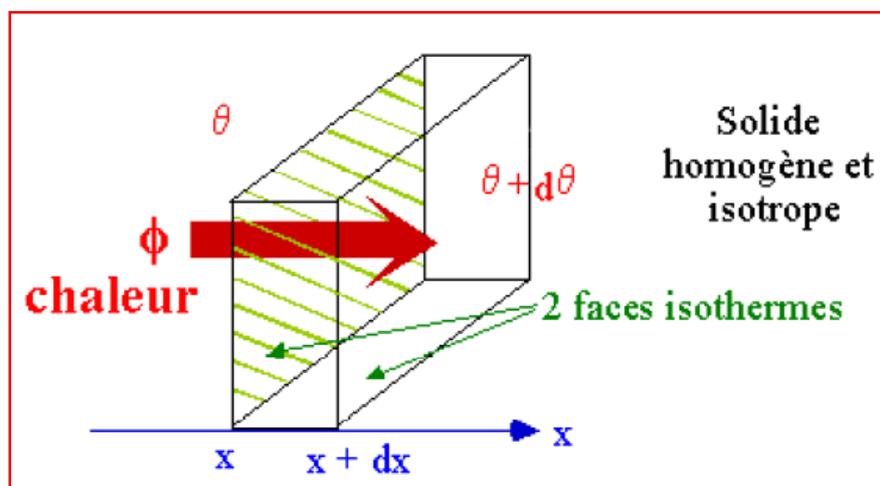


Figure (I.3) : Conduction dans une couche élémentaire de mur plan

Avec :

$\rho$  : est la masse volumique de la pierre ( $\text{Kg m}^{-3}$ ).

$k$  : est la conductivité thermique de la pierre ( $\text{W m}^{-1} \text{C}^{-1}$ ).

$C$  : est la chaleur spécifique ( $\text{J Kg}^{-1} \text{C}^{-1}$ ).

$t$  : est le temps caractéristique (s).

La fonction  $Q$  de l'équation (I.1) représente la source de la chaleur, les variables indépendantes sont la position  $x$  et le temps  $t$ .

### I.2.1.2. Résistance thermique :

Considérons le problème simple de conduction dans un mur (figure 1.3) de conductivité  $k$  constante et d'épaisseur  $L$ . A travers le mur, la température varie de  $\theta_0$  (température de la paroi gauche) à  $\theta_L$  (température de la paroi droite).

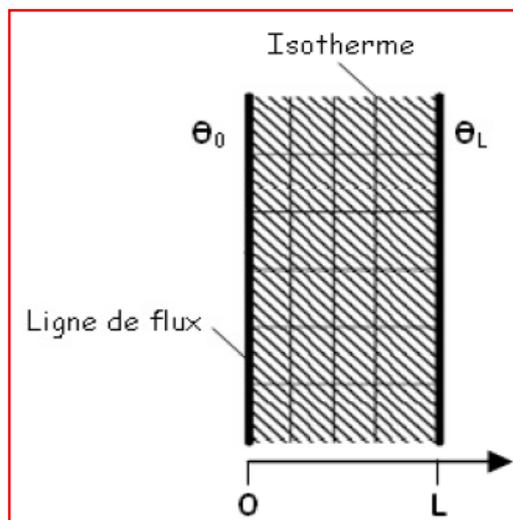


Figure (I.4) : Schématisation du mur monocouche

L'équation qui gouverne le problème en stationnaire et sans génération interne de chaleur est :

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} = 0 \text{ avec pour conditions limites } \begin{cases} x = 0 \rightarrow \theta = \theta_0 \\ x = L \rightarrow \theta = \theta_L \end{cases}$$

La solution de cette équation est:

$$\theta = \theta_0 + (\theta_L - \theta_0) \frac{\theta}{L} \quad (\text{I.2})$$

Le flux qui traverse le mur est:

$$\phi = \frac{k}{L} (\theta_0 - \theta_L) = -k \frac{d\theta}{dx} \quad (\text{I.3})$$

Si la section du mur est  $A$ , la quantité de chaleur qui traverse le mur est :

$$\varphi = \frac{kA}{L} (\theta_0 - \theta_L) \quad (\text{I.4})$$

On définit par  $\frac{kA}{L}$ , la conductance et par  $\frac{L}{kA}$  la résistance thermique du mur.

Pour un mur multicouche

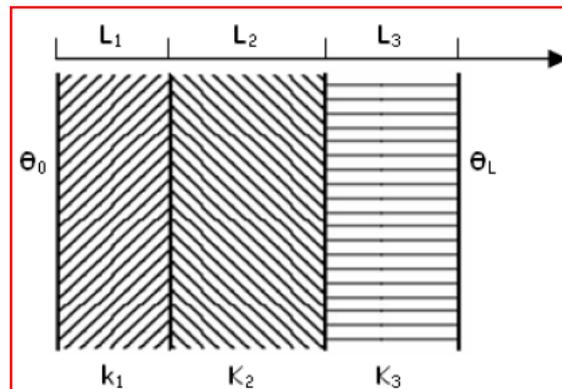


Figure (I.5) : Schématisation du mur multicouche.

Les résistances thermiques s'expriment par:

$$R_i = \frac{L_i}{A_i k_i} \quad (\text{I.5})$$

Et la quantité de chaleur traversant le mur (Figure I.4) par :

$$\varphi = \frac{\theta_0 - \theta_L}{\sum R_i} \quad (\text{I.6})$$

### I.2.2. Convection :

L'échange thermique par convection a pour origine le mouvement d'un fluide. En effet hormis le rayonnement à travers les corps transparents, la conduction est le seul mode de transmission de la chaleur à travers le solide. Pour les fluides, c'est différent:

- le transfert thermique s'effectue par conduction lorsqu'il n'y a pas de mélange de matière, ou lorsque l'écoulement est laminaire.
- dans un écoulement turbulent en contact avec une paroi solide, il existe le long de la paroi une mince couche de fluide en écoulement visqueux que l'on considère comme laminaire. L'épaisseur de ce film laminaire dépend des propriétés physiques du fluide et de la nature de l'écoulement.
- dans une direction perpendiculaire à la paroi (donc à la ligne de courant), on admettra qu'il n'y a aucun mélange de matière et que la chaleur peut se transmettre que par conduction.
- en dehors de la couche laminaire, la chaleur se transmet par mélange des particules de fluides, provoquant une égalisation rapide de la température.

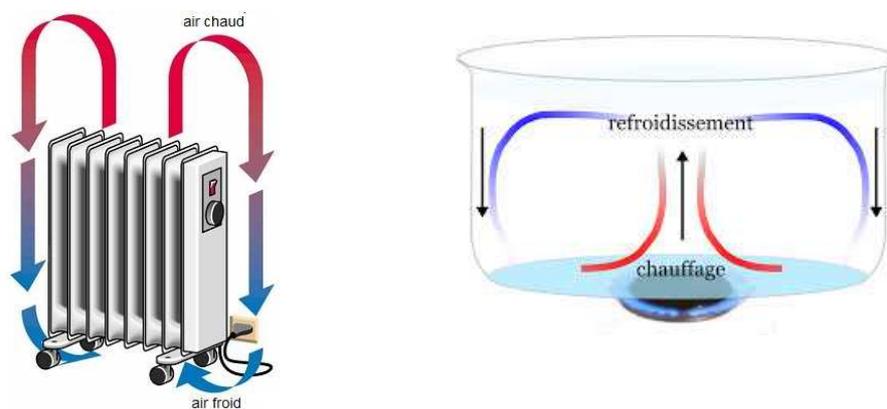


Figure (I.6) : Transfert de chaleur par convection

### I.2.2.1. Calcul du coefficient d'échange par convection :

Le flux thermique de conduction à travers la couche laminaire (Figure I.6) peut s'exprimer par la loi de Fourier par :

$$\phi = \frac{\lambda}{e} S(\theta_m - \theta) \quad (I.7)$$

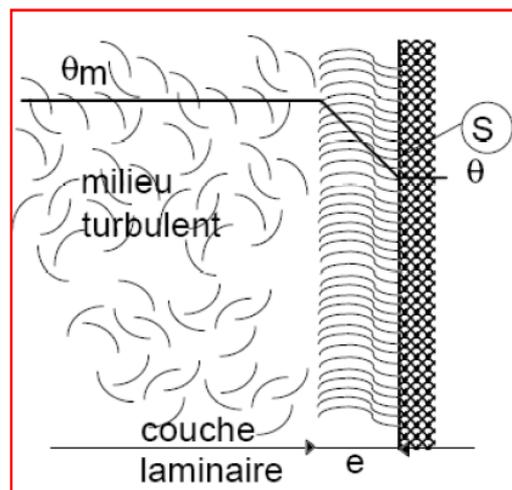


Figure (I.7): Gradient thermique dans la couche laminaire.

Mais en général, on ne connaît pas  $e$ , de plus l'épaisseur du film laminaire dépend de la vigueur de la zone turbulente voisine. On exprime alors le flux thermique par:

$$\phi = hS(\theta_m - \theta) \quad (I.8)$$

$h$  ( $W / m^2 \text{ } ^\circ C$ ) est appelé coefficient d'échange par convection.

Le transfert de chaleur par convection est complexe, car il résulte de la superposition de deux phénomènes:

- conduction entre les particules de fluides qui se rencontrent.

- mélange de ces particules par suite du mouvement d'ensemble du fluide. Si ce mouvement n'est provoqué que par les différences de températures (donc de densité), la convection est naturelle. Si ce mouvement résulte d'une action mécanique (pompe, ventilateur, mise en pression, etc.), la convection est forcée.

### **I.2.2.2. Convection naturelle :**

La convection naturelle est un phénomène de la mécanique des fluides, qui se produit lorsqu'un gradient induit un mouvement dans le fluide. Le gradient peut être de différente nature, telle la température ou la concentration d'un soluté.

La masse volumique est en général fonction de la température et un gradient de température implique une différence de masse volumique au sein du fluide. Cette différence de masse volumique implique une différence de la poussée d'Archimède et donc crée un mouvement. De tels déplacements s'appellent des mouvements de convection. Ils sont à l'origine de certains phénomènes océanographiques (courants marins), météorologiques (orages), géologiques (remontées de magma) par exemple

La convection thermique n'est pas le seul moyen de créer des mouvements verticaux dans des fluides. Ceux-ci vont se stratifier selon leur densité, à température uniforme, par l'effet de la gravité. Cette convection gravitationnelle se déroule comme la convection thermique avec les zones du fluide plus dense descendant et les parties moins denses poussées vers le haut. Cependant, il n'y a pas de variation de températures dans ces échanges. On peut citer la diffusion de la salinité dans une couche isothermale ou le déplacement du sel vers le bas dans une terre humide.

### I.2.2.3. Convection forcée :

La convection forcée est provoquée par une circulation artificielle (pompe, turbine) d'un fluide. Le transfert est plus rapide que dans le cas de convection naturelle. Voici quelques exemples de convection forcée dans des appareillages : chauffage central avec accélérateur, chauffages électriques avec soufflerie, chauffe-eau solaire et four à convection de cuisinière. Le corps humain a son propre système de convection forcée, la circulation sanguine.

Dans un environnement à microgravité comme dans l'espace, la convection naturelle n'est pas possible puisque la poussée d'Archimède s'exerce par la différence de force gravitationnelle sur des volumes de densités différentes. Ainsi la circulation de la chaleur doit être forcée dans une capsule spatiale. Une flamme aurait également de la difficulté à exister car les gaz de combustion resteraient près de la flamme, la coupant de l'apport d'oxygène. Il faut pour l'entretenir une circulation forcée pour éloigner ces gaz et amener l'oxygène.

### I.2.3. Rayonnement :

Un point matériel chauffé émet un rayonnement électromagnétique dans toutes les directions situées d'un même côté du plan tangent au point matériel. Lorsque ce rayonnement frappe un corps quelconque, une partie peut être *réfléchie*, une autre *transmise* à travers le corps (dit diathermique si tout est transmis), et le reste est quantitativement *absorbé* sous forme de chaleur. Si on place dans une enceinte deux corps capables d'émettre un rayonnement thermique, il existe entre ces deux corps à températures différentes un échange de chaleur dû à l'absorption et à l'émission de ces rayonnements thermiques. Cet échange de chaleur est désigné habituellement sous le nom de *rayonnement*. Les transferts par rayonnement se poursuivent même lorsque l'équilibre thermique est atteint, mais le débit net de chaleur échangé est nul.

Ce type de transport de chaleur est analogue à la propagation de la lumière, et il ne nécessite aucun support matériel, contrairement aux écoulements. Les gaz, les liquides et les solides sont capables d'émettre et d'absorber les rayonnements thermiques.

Dans de nombreux problèmes de transformation d'énergie thermique, les trois modes de transfert de chaleur coexisteront mais, généralement, au moins une des trois formes pourra être négligée, ce qui simplifiera le traitement mathématique de l'appareil de transfert. Nous pouvons dire dès à présent, qu'aux températures ordinaires, le transport par rayonnement est négligeable, mais il peut devenir notable et prépondérant lorsque le niveau de température augmente.

En outre, signalons que certains transferts thermiques sont accompagnés d'un transfert de matière entre deux phases. Le flux de chaleur transféré en présence d'un changement de phase dépend de la nature et des propriétés physico-chimiques des phases en présence. C'est le cas de l'ébullition, de la condensation, mais aussi des problèmes d'humidification, de séchage, de cristallisation, etc.

Dans ce qui suit nous allons présenter, pour les trois types de transport de la chaleur, les lois générales qui les gouvernent. Puis nous traiterons, de manière simple, quelques applications où le mode de transport de chaleur étudié est prédominant.

### **I.3. Convection dans les enceintes :**

L'étude de la convection naturelle dans les enceintes a fait l'objet d'un très grand nombre de travaux tant théoriques qu'expérimentaux. L'intérêt de telles études réside dans son implication dans de nombreuses applications industrielles. L'enceinte carrée continue à être la géométrie, qui présente le plus d'intérêt.

Dans ce type d'enceintes, généralement deux parois sont maintenues à des températures différentes, tandis que les autres sont isolées. On distingue principalement deux configurations, la première est celle d'une enceinte contenant un fluide et soumise à un gradient vertical de température (convection de Rayleigh-Bénard), la seconde étant celle d'une cavité avec un gradient de température horizontal.

#### **I.3.1. Enceinte avec gradient de température vertical:**

L'enceinte qui est chauffée par le bas et refroidie par le haut correspond à la configuration de la convection de Rayleigh-Bénard, qui traite la stabilité et le mouvement d'un fluide, confiné entre deux plaques horizontales, maintenues à des températures uniformes et distinctes (figure I.8). La convection de Rayleigh-Bénard a une longue et riche histoire, elle a été étudiée durant des décennies aussi bien pour ses différentes applications industrielles que du point de vue recherche fondamentale.

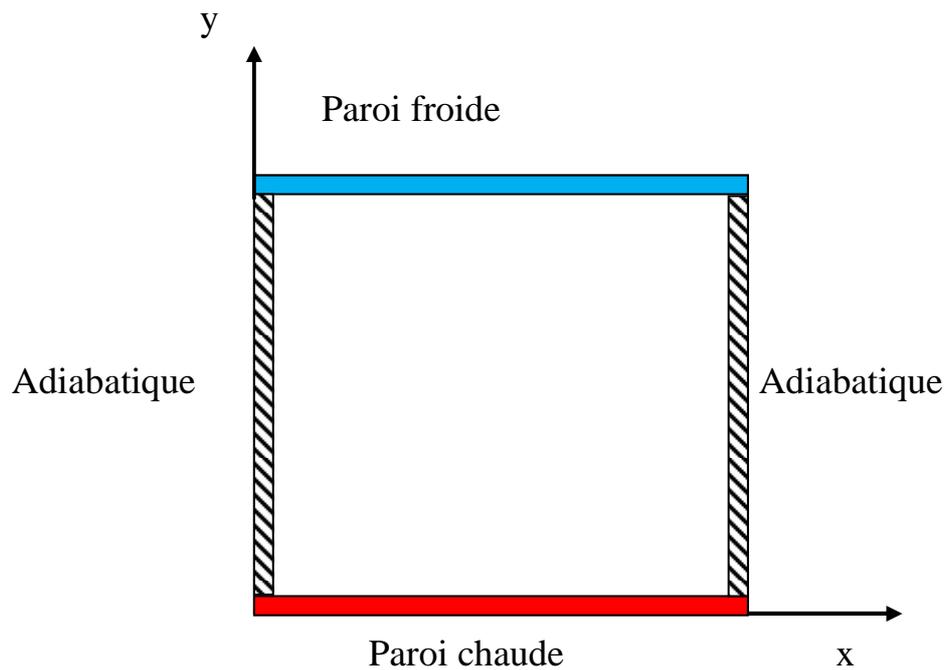


Figure (I.8) : Schéma représentant la configuration de Rayleigh –Bénard [2,3].

Au-delà d'une valeur critique de l'écart de température, des rouleaux contrarotatifs, d'axes horizontaux apparaissent au sein du fluide (figure I.9).

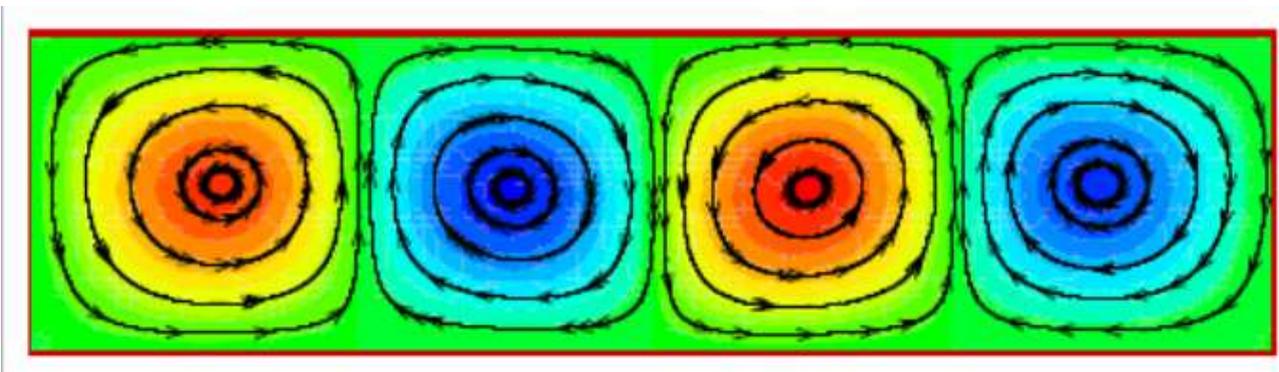


Figure (I.9) : Schémas représentant les rouleaux de la convection de **Rayleigh-Bénard** [1]

### I.3.2. Enceinte avec gradient de température horizontal :

Dans cette configuration, l'une des parois verticales est chauffée, tandis que l'autre est refroidie, les parois horizontales étant considérées comme adiabatiques (Figure I.10).

L'écoulement est alors monocellulaire avec le fluide ascendant le long de la paroi chaude et descendant suivant la paroi froide.

C'est cette dernière configuration qui fera l'objet de notre étude avec des cavités, qui contiennent l'air comme fluide de convection.

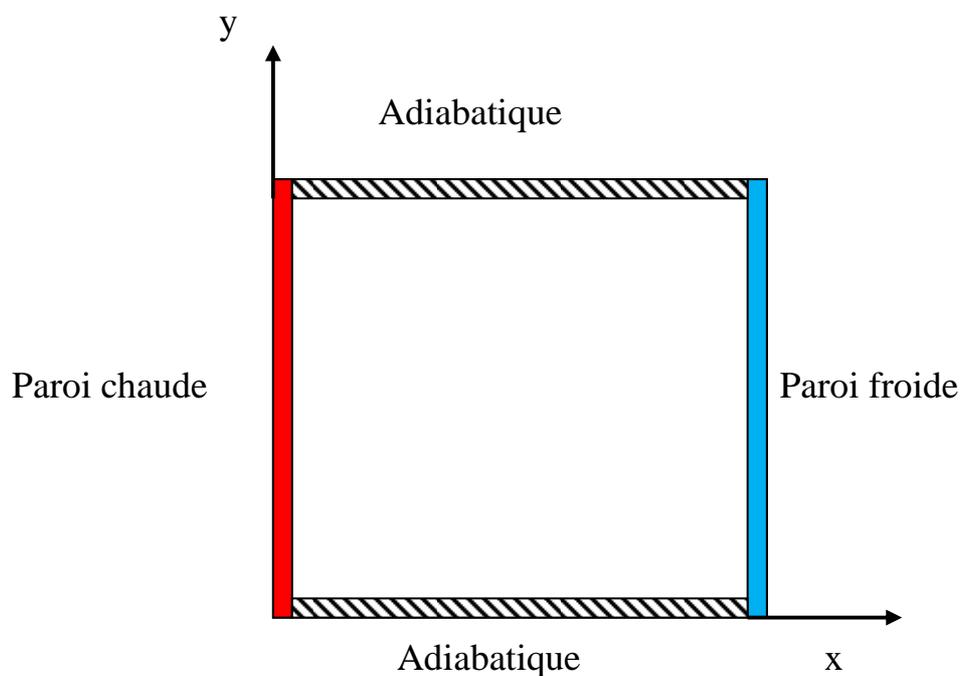


Figure (I.10) : Schéma représentant la configuration de Rayleigh

#### **I.4. Domaines d'applications de la convection naturelle :**

Les applications de transfert thermique sont variées, dans lesquelles la convection naturelle est le phénomène le plus dominant, la meilleure compréhension de ce phénomène augmente le nombre d'applications et mène à un certain nombre de conceptions industrielles et environnementales sophistiquées. Toutefois, les coûts de fonctionnement sont importants, les petites améliorations d'efficacité sont essentielles et peuvent jouer un grand rôle dans la consommation d'énergie.

En outre, les problèmes océanographiques et atmosphériques tels que les effets de serre, les changements extrêmes de climat, ainsi que les problèmes technologiques, à savoir les équipements électriques et les réacteurs nucléaires, les appareils ménagers, les réfrigérateurs et les échangeurs de chaleur sont tous des problèmes, qui ont donné un intérêt particulier à cette science.

#### **I.5. Revue bibliographique :**

Les études de la convection naturelle dans des cavités confinées constituent depuis plusieurs années, l'objet de plusieurs recherches, du fait de son implication dans de nombreux phénomènes naturels et applications industrielles.

L'étude de ce phénomène a suscité et suscite encore aujourd'hui l'intérêt de nombreux scientifiques et industriels. Les recherches menées dans ce domaine, s'étendent sur un peu plus d'un siècle. Un nombre considérable de travaux a été entrepris, suite à la découverte du phénomène par les expériences de **Bénard [4]** et l'analyse théorique de **Rayleigh [5]** au début du XXème siècle jusqu'à présent.

La plupart des travaux antérieurs, qui se sont intéressés au problème de la convection naturelle concernent les cas d'enceintes de forme régulière.

L'écoulement de la convection naturelle dans les applications technologiques et géophysiques se développe dans les cavités rectangulaires et carrée avec parois différentiellement chauffées. Dans les domaines de collection de l'énergie solaire et le refroidissement des composés électroniques, les parois actives peuvent être le sujet à des non-uniformités brusques de la température, dues à des effets imprécises ou autres.

En vue de comprendre le problème ci-dessus, nous devons d'abord consulter les études précédentes, faites par quelques chercheurs.

**Novembre et Nansteel [6]** ont étudié analytiquement et numériquement la convection naturelle dans une enceinte carrée avec chauffage au dessous et refroidissement le long d'un côté. Dans cette étude, des expressions asymptotiques ont été trouvées pour les taux de transfert de chaleur.

**Ganzarolli et Milanez [7]** ont étudié la convection naturelle dans des enceintes rectangulaires chauffées au dessous et symétriquement refroidies par les côtés. Le nombre de Rayleigh a été varié de  $10^3$  à  $10^7$  et le rapport d'aspect varie de 1 à 9. Les influences du nombre de Rayleigh, du nombre de Prandtl et du rapport d'aspect sur le mouvement du fluide et sur le transport d'énergie ont été présentées dans leur étude.

**Vahl Davis [8]** a présenté une solution numérique de la convection naturelle dans une cavité carrée chauffée différemment, où les deux surfaces supérieure et inférieure sont adiabatiques, tandis que les surfaces verticales sont chauffées différemment.

**Lakhal et Hasnaoui [9]** ont étudié numériquement la convection naturelle transitoire dans une cavité carrée soumise par le bas à une variation

sinusoïdale de la température pour un nombre de Prandtl égal à 0,71 (l'air) et pour des nombres de Rayleigh variant de  $10^5$  à  $10^6$ . On y montre que si l'on s'intéresse au transfert thermique moyen, le chauffage périodique est avantageux si l'amplitude de l'excitation est grande et si l'intensité de la convection est importante.

**Hasnaoui et al [10]** ont étudié numériquement par la méthode des différences finies la convection naturelle laminaire dans une enceinte, avec le chauffage localisé sur la paroi inférieure et le refroidissement à travers la paroi supérieure de l'enceinte, tandis que le reste du fond et les murs verticaux étaient adiabatiques. Les paramètres principaux du problème étaient le rapport de forme de l'enceinte, la position de la source de chaleur et le nombre de Rayleigh. L'existence des solutions multiples équilibrées et le comportement oscillant pour un ensemble donné des paramètres ont été démontrés.

**Bourich et al [11]** ont étudié numériquement la convection naturelle double-diffusive bidimensionnelle dans une enceinte poreuse carrée, chauffée partiellement de dessous et refroidie par les côtés à une température constante. Leur analyse a inclus l'influence de la partie chauffée sur le transfert de chaleur.

L'effet du rapport d'aspect sur la convection naturelle bidimensionnelle stationnaire dans une cavité rectangulaire poreuse est analysé numériquement par **Prasad et Kulacki [12]**.

L'écoulement multicellulaire a été trouvé pour un rapport d'aspect  $Ar \leq 1$  et la structure de l'écoulement comporte une cellule de recirculation primaire avec des petites cellules secondaires à l'intérieur. Le nombre de Nusselt est toujours augmenté quand le rapport d'aspect est augmenté.

**Paolucci et Chenoweth [13]** ont étudié la convection naturelle dans les enceintes peu profondes avec des parois différentiellement chauffées. Ils ont

trouvé que la solution de l'écoulement classique parallèle, précise dans le cœur de la cavité, à la limite de Boussinesq n'existe pas quand les propriétés des variables sont introduites.

**Ho et Chang [14]** ont étudié numériquement et expérimentalement l'effet du rapport d'aspect sur le transfert thermique par convection naturelle dans une enceinte rectangulaire verticale avec un chauffage discret bidimensionnel. La simulation numérique est menée pour un rapport d'aspect variant de 1 à 10, avec la taille et l'endroit relatifs, donnés de l'appareil de chauffage. Grâce à la simulation, ils ont trouvé que l'effet du rapport d'aspect de l'enceinte sur le nombre moyen de Nusselt tend à diminuer avec l'augmentation du nombre de Rayleigh modifié. La distribution de la température et les champs d'écoulement vont être trouvés pour avoir un bon accord avec les expériences.

Une étude numérique de la convection naturelle de l'air dans les cavités rectangulaires a été effectuée par **Frederick [15]**, il a conclu que le nombre de Nusselt total diminue rapidement avec l'augmentation du rapport d'aspect. Le taux de circulation augmente toujours avec le nombre de Rayleigh et le rapport d'aspect.

**Tang [16]** a étudié l'effet du rapport d'aspect sur la convection naturelle dans l'eau, près de sa densité maximum. Il a conclu que le rapport d'aspect a un impact fort sur les modèles d'écoulement et les distributions de température dans les enceintes rectangulaires.

**Wakitani [17]** a présenté numériquement la convection naturelle oscillatoire à bas nombre de Prandtl dans les enceintes rectangulaires. Ses résultats numériques sont proches aux résultats expérimentaux disponibles.

L'effet du caractère onduleux et du rapport d'aspect sur le transfert de chaleur à l'intérieur d'une enceinte ondulée a été étudié numériquement par

**Das et al. [18].** Ils ont montré que le transfert de chaleur a changé considérablement quand le caractère onduleux change et aussi dépend du rapport d'aspect du domaine. L'effet du rapport d'aspect sur les phénomènes de transport du fluide thermique dans les cavités sous la pesanteur réduite est étudié numériquement par **Torii [19]**.

**Valencia et Frederick [20]** ont analysé numériquement la convection naturelle de l'air dans une cavité carrée avec parois partiellement thermiquement actives pour cinq différents endroits de chauffage. Ils ont trouvé que le taux de transfert de chaleur est augmenté quand l'endroit de chauffage est au milieu du mur chaud.

**El-Refee et al [21]** ont étudié numériquement la convection naturelle dans des cavités inclinées, partiellement refroidies et différentiellement chauffées avec différents rapports d'aspect.

**Deng et al [22]** ont étudié numériquement la convection naturelle laminaire stationnaire dans une enceinte rectangulaire avec des sources de chaleur discrètes sur la paroi. Ils ont conclu que le rôle des sources de chaleur isothermes est généralement beaucoup plus fort que le flux des sources de chaleur.

**Nithyadevi et al [23]** ont étudié la convection naturelle dans une cavité carrée avec parois partiellement actives. **Kandaswamy et al [24]** ont étudié les effets maximum de densité de l'eau dans une cavité carrée avec parois partiellement thermiquement actives.

Une autre étude par **Kandaswamy [25]** décrit la convection naturelle dans une cavité rectangulaire avec parois partiellement actives, pour neuf différents endroits de chauffage, c'est-à-dire, pour la région chaude située au dessus, milieu et fond et la région froide, qui se déplace du bas en haut, pour localiser

les régions, où le taux de transfert de chaleur est maximum et minimum, comme le montre la figure ci-dessous.

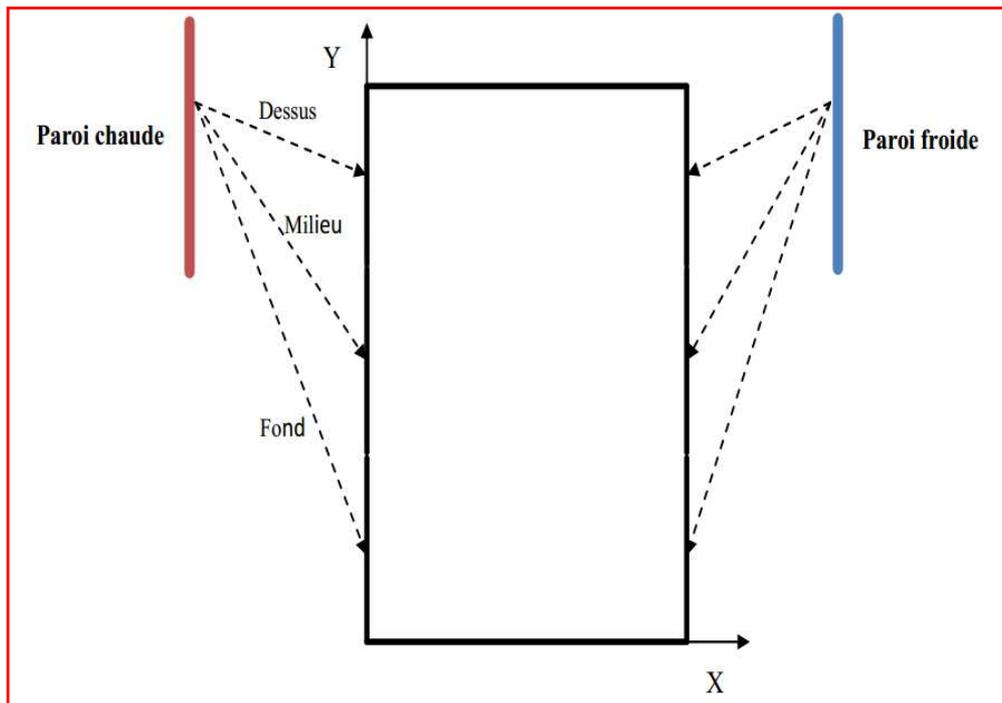


Figure (I.11) : Différents endroits de chauffage.

Dans l'étude, présentée par **Kandaswamy [25]**, les parois partiellement thermiquement actives sont maintenues à des températures différentes et uniformes, nommées respectivement  $T_c$  et  $T_f$  ( $T_c > T_f$ ). Les zones inactives et les parois horizontales  $y = 0$  et  $y = H$  sont thermiquement isolés. La longueur de la partie active est égale à  $H/2$ .

L'écoulement obéit à l'approximation de Boussinesq. Comme méthode de discrétisation, l'auteur **[25]** a utilisé la technique des volumes finis, basée sur le schéma « loi de puissance » pour résoudre numériquement les équations, régissant le mouvement du fluide par **Patankar [26]**. Un processus itératif, basé sur la technique « successive over relaxation [SOR] » est employé pour déterminer les champs, représentant la fonction de courant, la

vorticité ainsi que la température. Le processus est répété jusqu'à ce que le critère de convergence soit atteint.

Le nombre de Nusselt moyen est souvent utilisé pour développer la finesse de la grille, qui est nécessaire pour des simulations numériques bien précises. Les solutions numériques sont obtenues pour différents systèmes de grilles allant de 21x21 jusqu'à 140x140.

### **I.6. Objectif de l'étude :**

La convection naturelle dans les enceintes confinées a fait l'objet de diverses investigations, à cause de son importante application dans les différentes situations industrielles.

Le présent travail consiste à l'étude numérique de la convection naturelle laminaire stationnaire dans une cavité carrée bidimensionnelle, avec deux côtés partiellement actifs. La partie active du côté gauche est à une température supérieure à celle du côté droit, les parois supérieure et inférieure de la cavité et les parties inactives des côtés droit et gauche sont thermiquement isolées.

---

## CHAPITRE II :

### Modèle mathématique de convection naturelle

---

---

## II.1.Introduction :

Comme toute science, la physique a toujours été une discipline où les mathématiques à leur mot à dire par la mise en équation des différents phénomènes observés. Même si on commence d'abord par observer un phénomène naturel avant de tenter de l'expliquer et de généraliser la loi qui le décrit par répétition de plusieurs expériences.

Dans ce chapitre, nous proposons la mise en équation du problème physique considéré, en nous basant sur les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement, et de l'énergie.

Ces équations et les conditions aux limites qui régissent le phénomène sont données sous leur forme générale, puis sous leur forme adimensionnelle après un traitement spécifique.

Dans les écoulements de convection naturelle, nous distinguons les nombres de Rayleigh, Grashof, Prandtl et autres nombres, représentés par plusieurs propriétés physiques dépendantes de la température. L'importance mutuelle de ces propriétés dépend des conditions thermiques et des facteurs géométriques.

L'objectif de ce problème consiste à l'étude de l'échange thermique dans une cavité carrée avec deux côtés actifs par simulation numérique.

## II.2.Description du problème :

Le problème physique considéré est schématisé sur la figure (II-1). Il s'agit d'une cavité bidimensionnelle, de longueur  $L$  et de hauteur  $H$ , remplie de fluide, qui est dans notre cas l'air.

Les parois thermiquement actives de la cavité sont maintenues à deux températures différentes et uniformes, nommées respectivement,  $T_c$  et  $T_f$

( $T_c > T_f$ ). Les parois horizontales sont thermiquement isolées.

L'écoulement dans l'enceinte est induit par la force de flottabilité, résultant de la différence de densité, qui est à son tour due à un gradient de température.

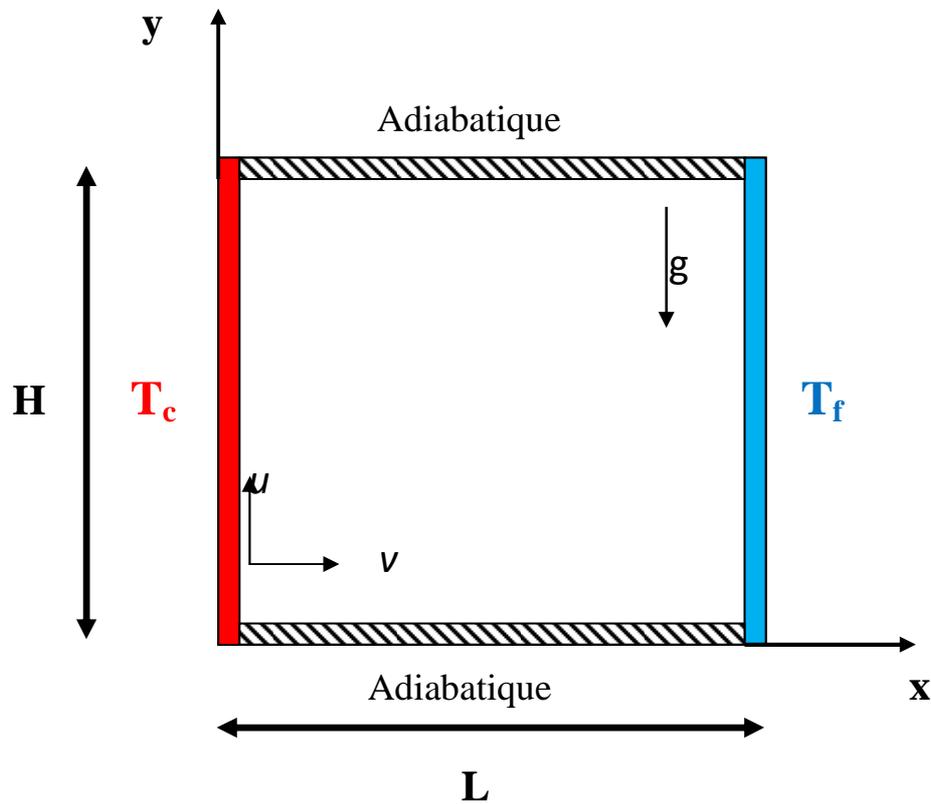


Figure (II-1) : Configuration physique.

### II.3. Equations du modèle mathématique :

La convection naturelle engendrée par des transferts de chaleur au voisinage des surfaces chauffées a été largement étudiée tant au niveau théorique qu'expérimental. En mécanique des fluides, en supposant que le fluide est un milieu continu, on peut utiliser les lois classiques de conservation suivantes :

□ Loi de Lavoisier (principe de conservation de la masse) pour établir l'équation de continuité;

□ Deuxième loi de Newton (principe de conservation de la quantité de mouvement) pour établir les équations de quantité de mouvement;

□ Loi de conservation d'énergie (Premier principe de la thermodynamique) pour établir l'équation de l'énergie.

Dans le cas laminaire, les problèmes d'écoulement de fluide peuvent être traités par la résolution des équations de quantité de mouvement, de continuité et d'énergie.

Nous allons dans ce qui suit présenter ces équations, qui ne sont que des cas particuliers d'une même équation générale (l'équation (III.1) du troisième chapitre).

#### II.3.1. Equations de Navier-Stokes :

Le modèle mathématique de tout problème fondamental de la dynamique des fluides est régi par les **équations de Navier-stokes**. Ces équations sont importantes et représentent le fluide comme un **continuum**. Les équations de conservation de masse, de quantité de mouvement et de l'énergie, sont déterminées conformément soit à une approche intégrale ou différentielle. **La forme intégrale** des équations est dérivée en utilisant le « Théorème de Transport de Reynolds (RTT) » et discutée dans de nombreux ouvrages de la

mécanique des fluides classiques (Lewis et al. [27]). L'approche que nous allons illustrer ici est **l'approche différentielle** dans lequel **un volume de contrôle différentiel** est pris en compte dans le domaine de fluide et un **développement limité en série de Taylor** est utilisé pour présenter la variation de masse, quantité de mouvement et énergie.

### II.3.2. Equation de conservation de masse ou la continuité :

L'équation de conservation de masse atteste que la masse totale est conservée, ou autrement dit, la masse totale d'un système de fluide est totalement pris en compte. Afin de découler une conservation générale de l'équation de masse, considérons le volume de contrôle différentiel comme le montre la figure (II.2). Nous pouvons assumer que le volume de contrôle est infinitésimal pour un problème d'écoulement typique, comme l'écoulement dans un canal, l'écoulement sur une plaque plane ou l'écoulement de circulation de l'air, à l'intérieur d'une chambre, entraîné par des différences de température (ou masse volumique).

Supposons que le taux de flux de masse entrant dans le volume de contrôle (figure II.2) est  $\rho u$  dans la direction  $x$  et  $\rho v$  dans la direction  $y$ . On suppose également qu'il n'y a pas de réaction ou de production de masse dans le domaine fluide. Le développement en série de Taylor peut être utilisé pour exprimer le taux de flux de masse sortant du volume de contrôle comme (voir la figure II.2)

Dans la direction  $x$  :

$$(\rho u)_{x+\Delta x} = (\rho u)_x + \frac{\Delta x}{1!} \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2(\rho u)}{\partial x^2} + \dots \quad (\text{II.2})$$

Et Dans la direction  $y$  :

$$(\rho v)_{y+\Delta y} = (\rho v)_y + \frac{\Delta y}{1!} \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\Delta y^2}{2!} \frac{\partial^2(\rho v)}{\partial y^2} + \dots \quad (\text{II.3})$$

A partir d'une inspection du volume de contrôle illustré à la figure (II.2), nous pouvons écrire la différence entre la masse totale entrant et sortant du volume de contrôle :

$$\Delta_y [(\rho u)_x - (\rho u)_{x+\Delta x}] = -\Delta_y \left[ \frac{\Delta_x}{1!} \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\Delta_x^2}{2!} \frac{\partial^2(\rho u)}{\partial x^2} + \dots \right] \quad (\text{II.4})$$

De même, dans le sens y :

$$\Delta_x [(\rho v)_y - (\rho v)_{y+\Delta y}] = -\Delta_x \left[ \frac{\Delta_y}{1!} \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\Delta_y^2}{2!} \frac{\partial^2(\rho v)}{\partial y^2} + \dots \right] \quad (\text{II.5})$$

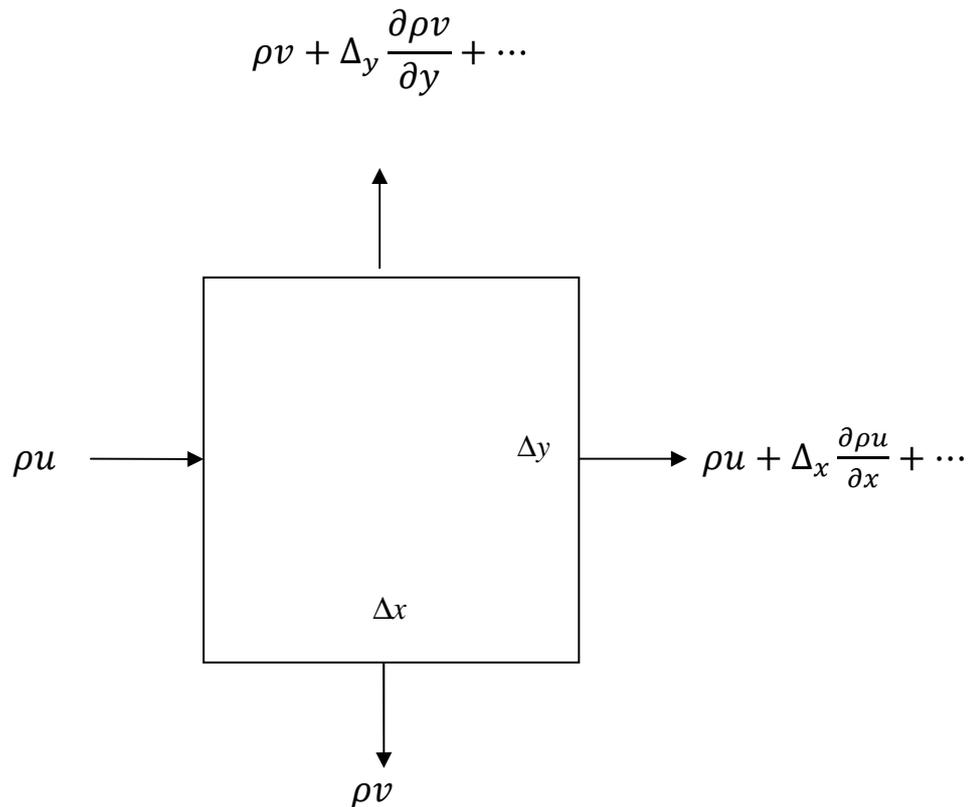


Figure (II.2) : Volume de contrôle infinitésimal (2D). Dérivation de conservation de masse dans un champ d'écoulement (Lewis et al. [27]).

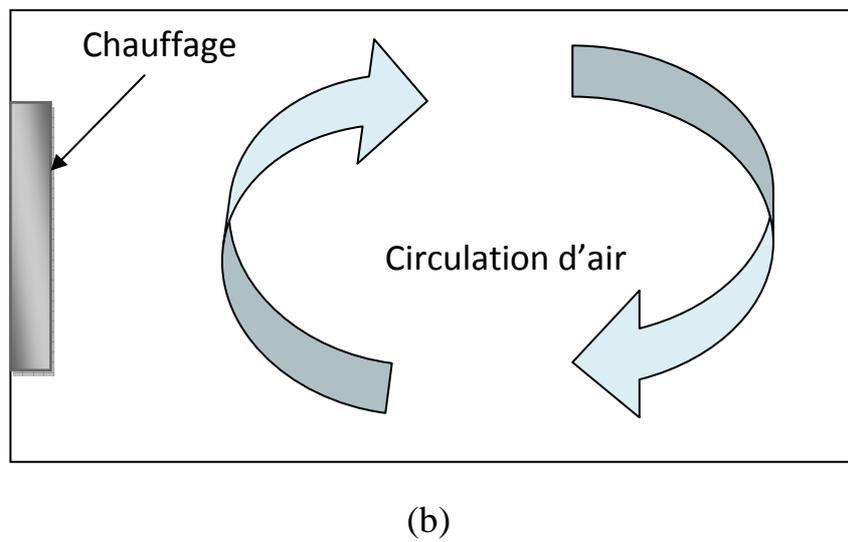
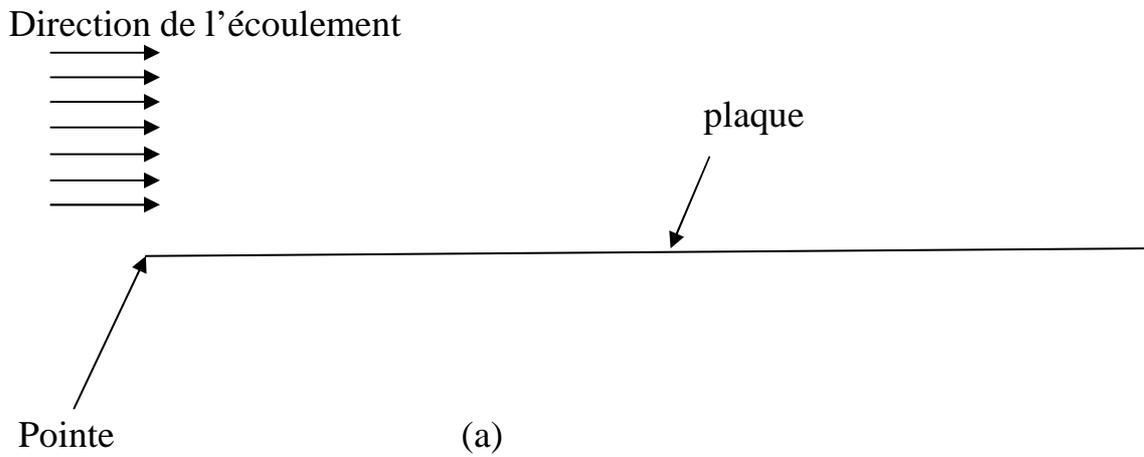


Figure (II.3) : Circulation forcée sur une plaque plane et convection naturelle dans une pièce (Lewis et al. [27]).

Notons que la masse totale est calculée comme étant le taux de flux de masse multipliée par l'aire perpendiculaire. Par exemple, la masse totale entrant dans le volume de contrôle dans la direction x est  $\Delta y \times 1 \times \rho u$ . Avec une épaisseur d'unité est supposée dans la direction z. Additionnons les équations (II.4) et (II.5) donne la masse totale stockée à l'intérieur du volume de contrôle. En négligeant les termes supérieurs à la seconde ordre, la masse totale stockée dans le volume de contrôle s'écrit :

$$-\Delta x \Delta y \left[ \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \right] \quad (\text{II.6})$$

La quantité ci-dessus, stockée dans le volume de contrôle, est égale au taux de changement de la masse totale à l'intérieur du volume de contrôle, qui est donnée par :

$$\Delta x \Delta y \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (\text{II.7})$$

On peut donc écrire :

$$\Delta x \Delta y \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\Delta x \Delta y \left[ \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \right] \quad (\text{II.8})$$

Ou

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (\text{II.9})$$

L'équation précédente est connue comme étant l'équation de conservation de masse, ou l'équation de continuité pour un écoulement 2D. En trois dimensions, l'équation de continuité s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (\text{II.10})$$

Si la masse volumique est supposée constante (fluide incompressible), l'équation (II.10) se réduit à :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{II.11}$$

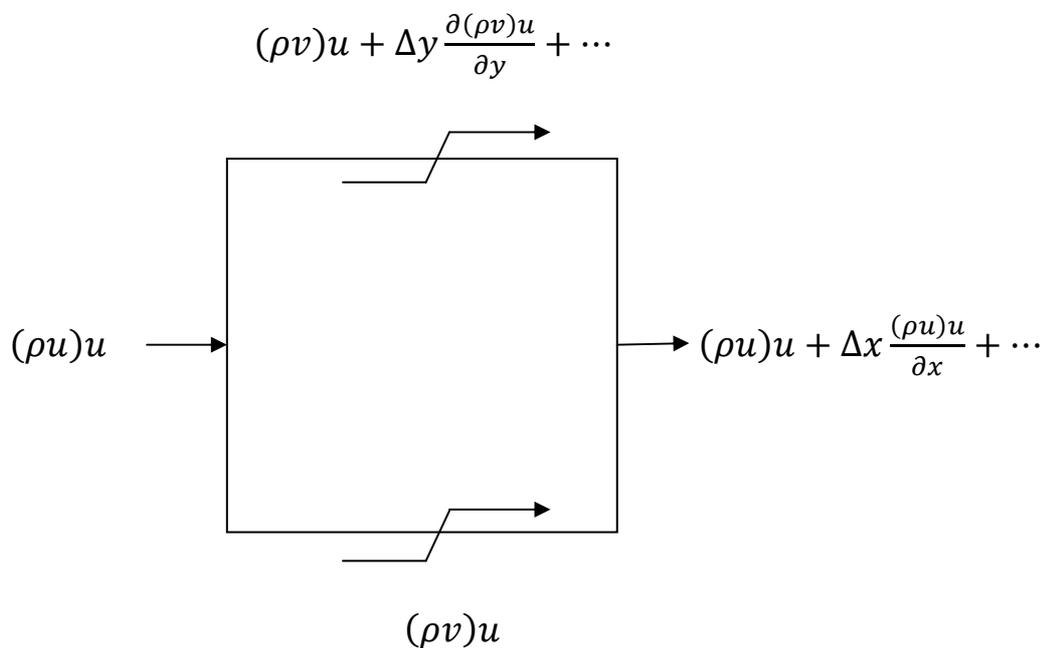


Figure (II.4) : Volume de contrôle infinitésimal dans un champ d'écoulement.

Dérivation de la conservation de quantité de mouvement dans la direction  $x_1$ .

Taux de variation de quantité de mouvement (**Lewis et al. [27]**).

### II.3.3. Conservation de quantité de mouvement :

L'équation de conservation de quantité de mouvement peut être obtenue d'une façon similaire à l'équation de conservation de masse. Ici, les équations de quantité de mouvement sont dérivées sur la base du principe de conservation de quantité de mouvement. A savoir, la force totale générée par le transfert de quantité de mouvement dans les deux directions est composé (égale) par le taux de variation de quantité de mouvement dans chaque direction. L'équation de quantité de mouvement comporte des composantes dans chaque direction et est donc une **équation vectorielle**. En fin d'en tirer l'équation de conservation de quantité de mouvement, considérons le volume de contrôle montré sur la figure (II.4).

L'impulsion (quantité de mouvement) entrant dans le volume de contrôle dans la direction  $x_1$  est donnée par :

$$\rho u \Delta_y u = \rho u^2 \Delta_y \quad (\text{II.12})$$

Comme l'équation de quantité de mouvement est une **équation vectorielle**, la quantité de mouvement dans la direction  $x$  aura également une contribution dans la direction  $y$ . L'impulsion entrant dans la face inférieure dans la direction  $x$  Est :

$$\rho v \Delta_y u = \rho u v \Delta_x \quad (\text{II.13})$$

En utilisant un développement en série de Taylor pour travailler sur la quantité de mouvement selon  $x$  qui sort du volume contrôle. Dans la direction  $x$ , nous avons :

$$\rho u^2 \Delta_y + \Delta_y \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} \Delta_x \quad (\text{II.14})$$

De même la quantité de mouvement selon  $x$  qui sort dans la direction  $y$  (surface supérieure) est :

$$\rho uv \Delta_x + \Delta_x \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} \Delta_y \quad (\text{II.15})$$

Notons que les termes supérieurs ou égaux au second ordre dans le développement en série de Taylor sont négligés. Le taux de changement de quantité de mouvement dans le volume de contrôle du à la composante  $x_1$  s'écrit :

$$\Delta_x \Delta_y \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} \quad (\text{II.16})$$

**La quantité de mouvement nette** du volume de contrôle est calculée comme :

**La quantité de mouvement nette** du volume de contrôle = **La quantité de mouvement sortant du volume de contrôle – la quantité de mouvement entrant dans le volume de contrôle + taux de variation de la quantité de mouvement**

Qui est :

$$\Delta_x \Delta_y \left[ \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} \right] \quad (\text{II.17})$$

Pour l'équilibre, la quantité de mouvement nette précédente doit être équilibrée (égalisée) par la force nette agissant sur le volume de contrôle. Afin d'en tirer la force nette agissant sur le volume de contrôle, voir figure (II.5). à partir de cette figure, la force de pression totale agissant sur le volume de contrôle dans la direction  $x$  s'écrit :

$$p \Delta_y - \left[ p + \frac{\partial p}{\partial x} \Delta_x \right] \Delta_y = - \frac{\partial p}{\partial x} \Delta_x \Delta_y \quad (\text{II.18})$$

Ou elle est prise positive dans la direction  $x$  positive et négative dans la direction  $x$  négative).

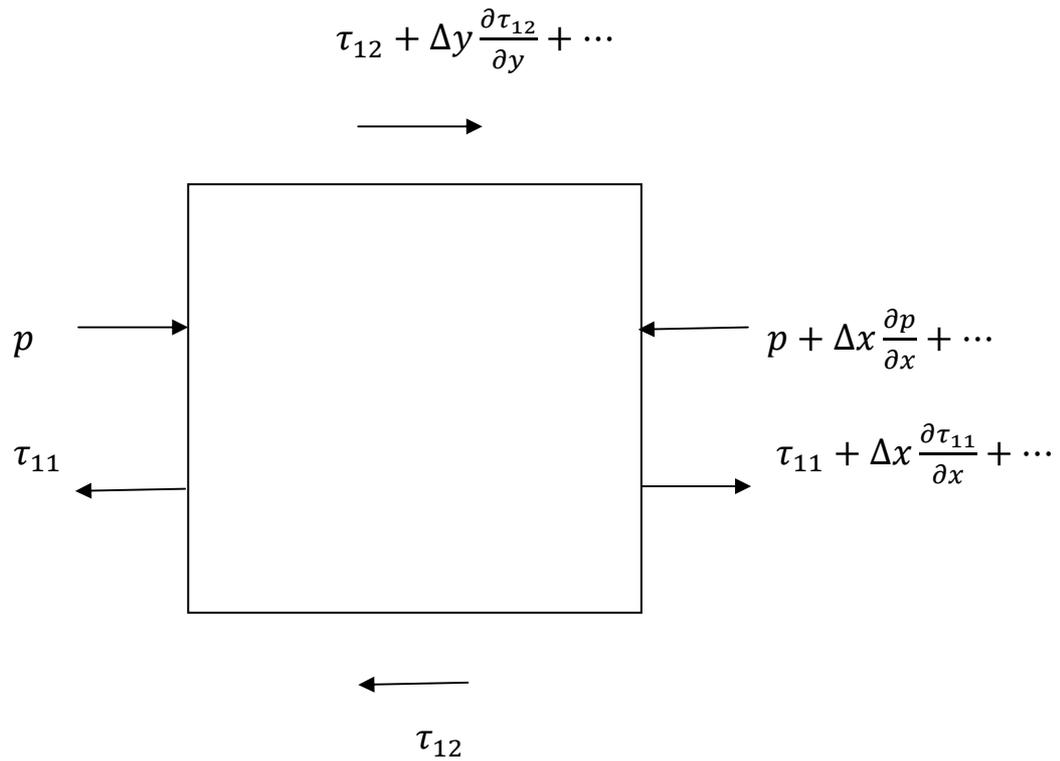


Figure (II.5) : volume de contrôle infinitésimal dans un champ d'écoulement.

Dérivation de la conservation de quantité de mouvement dans la direction x.

Les forces de viscosité et de pression (**Lewis et al. [27]**).

De même, force totale due à la contrainte déviatorique (viscosité ou frottement) agissant sur volume de contrôle dans la direction  $x$  s'écrit (voir la figure (II.5))

$$\left(\tau_{11} + \frac{\partial\tau_{11}}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y - \tau_{11}\Delta y + \left(\tau_{12} + \frac{\partial\tau_{12}}{\partial y}\Delta y\right)\Delta x - \tau_{12}\Delta x \quad (\text{II.19})$$

En simplifiant, on obtient la force nette due à la contrainte déviatorique comme

$$\frac{\partial\tau_{11}}{\partial x_1}\Delta x_1\Delta x_2 + \frac{\partial\tau_{12}}{\partial x_2}\Delta x_2\Delta x_2 \quad (\text{II.20})$$

La force totale agissant sur le volume de contrôle dans la direction de  $x$  est

$$\Delta x_1\Delta y\left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{11}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{12}}{\partial y}\right) \quad (\text{II.21})$$

Comme mentionné précédemment, pour équilibre, l'impulsion (quantité de mouvement) nette dans la direction  $x$  devrait être égale à la force totale agissant sur le volume de contrôle dans la direction de  $x$ , qui est :

$$\Delta x\Delta y\left(\frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial t}\right) = \Delta x\Delta y\left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{11}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{12}}{\partial y}\right) \quad (\text{II.22})$$

En simplifiant, nous obtenons :

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{11}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{12}}{\partial y} \quad (\text{II.23})$$

Notons que les forces externes et du volume (flottabilité) ne sont pas incluses dans le bilan de force ci-dessus. Dans les équations ci-dessus, les contraintes déviatoriques  $\tau_{ij}$  sont exprimées en termes de gradients de vitesse et de viscosité dynamique :

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial x_j} + \frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) \quad (\text{II.24})$$

Ou  $\delta_{ij}$  est le delta Kronecker, qui est égal à l'unité si  $i = j$  égale à zéro si  $i \neq j$ .

De l'expression précédente,  $\tau_{11}$  est exprimée en

$$\tau_{11} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (\text{II.25})$$

Notons que  $i = j = 1$  dans l'équation ci-dessus et  $k = 1, 2$  pour en écoulement à deux dimension.

L'équation ci-dessus peut être simplifiée comme suit :

$$\tau_{11} = \mu \left( \frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (\text{II.26})$$

De même,  $\tau_{12}$  est

$$\tau_{12} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (\text{II.27})$$

En substituant les équations 2.26 et 2.27 dans l'équation 2.23, on obtient la composante selon  $x$  de l'équation de quantité de mouvement comme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \left( \frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) + \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{II.28})$$

La composante de quantité de mouvement dans la direction  $y$ , peut être dérivée par les étapes suivantes, qui sont similaires à la dérivation de la composante  $x$  de l'équation de quantité de mouvement. L'équation de quantité de mouvement selon  $y$  est :

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \left( \frac{4}{3} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right) \quad (\text{II.29})$$

Pour un écoulement de fluide de masse volumique constante (écoulement incompressible ( $\rho$  est constante)), les équations de quantité de mouvement peuvent être simplifiées (car le différentiel de  $\rho$  est nulle). En outre, la substitution de l'équation de conservation de masse (équation II.11) dans l'équation de quantité de mouvement conduite à une simplification supplémentaire de l'équation de quantité de mouvement. Après simplification, les équations de mouvement sont :

Dans la direction de x :

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II.30})$$

Et dans la direction y :

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II.31})$$

### II.3.4. Equation de conservation d'énergie :

L'équation de conservation d'énergie peut être obtenue en suivant une procédure similaire à la dérivation de l'équation de quantité de mouvement. Cependant, la différence ici est que l'équation la température ou énergie, est une *équation scalaire*. Afin d'obtenir cette équation, considérons le volume contrôle comme il est montré sur la figure (II.6). L'énergie transmise par convection dans le volume de contrôle dans la direction  $x$  s'écrit :

$$\rho c_p u T \Delta y \quad (\text{II.32})$$

De même, l'énergie de convection dans le volume de contrôle est en the y direction

$$\rho c_p v T \Delta x \tag{II.33}$$

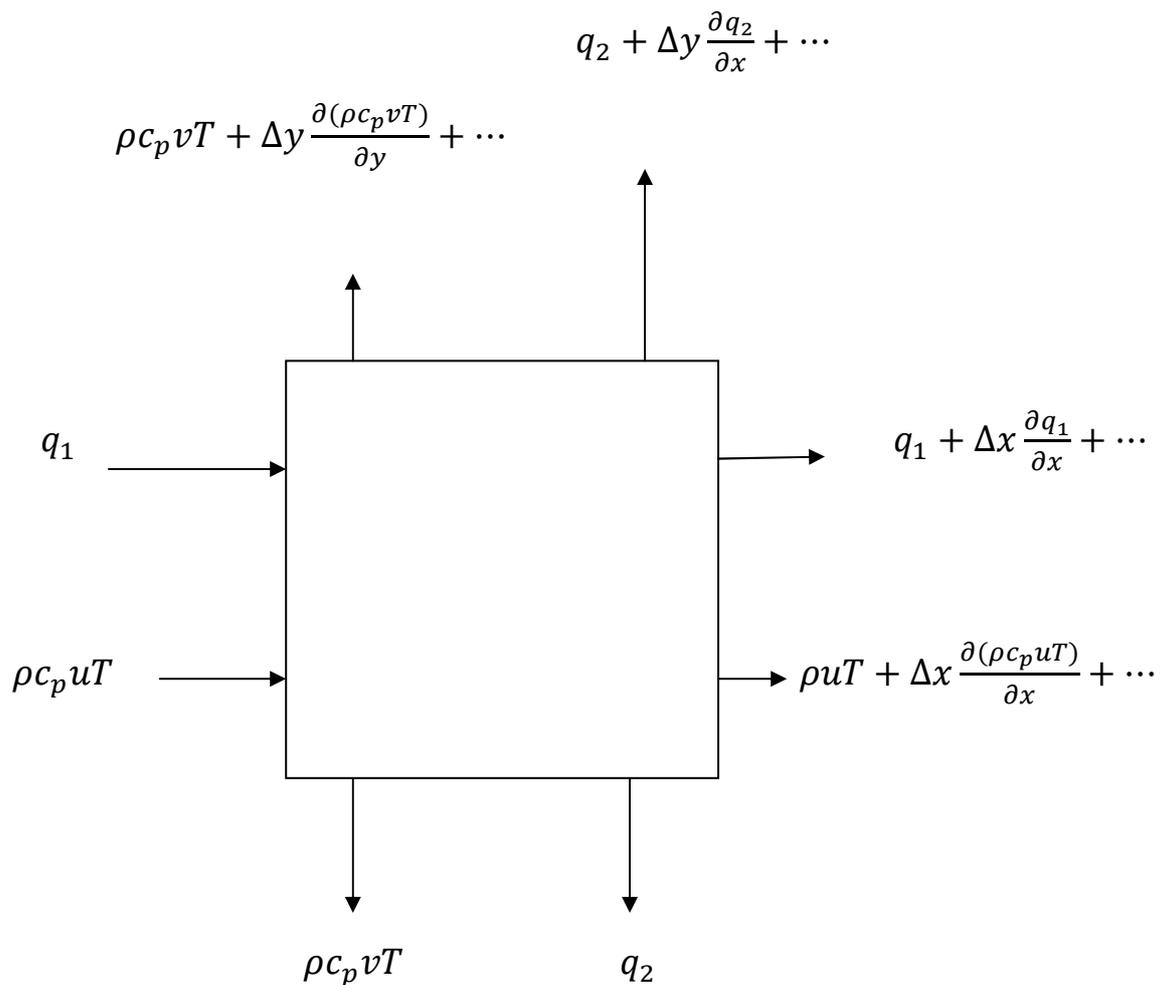


Figure (II.6) : volume de contrôle infinitésimal dans un champ d'écoulement.

Dérivation de la conservation d'énergie (Lewis et al. [27]).

Comme précédemment, un développement en série de Taylor peut être utilisé pour exprimer l'énergie par convection sur le volume de contrôle dans les deux directions  $x$  et  $y$  :

$$\rho c_p u T \Delta y + \rho c_p \frac{\partial(uT)}{\partial x} \Delta x \Delta_2 \quad (\text{II.34})$$

Et

$$\rho c_p v T \Delta x + \rho c_p \frac{\partial(vT)}{\partial y} \Delta y \Delta_1 \quad (\text{II.35})$$

Notons que la chaleur spécifique,  $c_p$  et la masse volumique,  $\rho$ , sont supposées constantes dans la dérivation des équations précédentes. La **diffusion de chaleur (transfert de chaleur par conduction)** dans et hors du volume de contrôle est également dérivée en utilisant l'approche ci-dessus. La diffusion de chaleur dans le domaine (volume de contrôle) dans la direction  $x$  (en utilisant la loi de Fourier pour la conduction de la chaleur) s'écrit :

$$\Delta y q_1 = -k_x \frac{\partial T}{\partial x} \Delta y \quad (\text{II.36})$$

Et la **diffusion** entrant dans le volume de contrôle dans la direction  $y$  s'écrit :

$$\Delta x q_2 = -k_y \frac{\partial T}{\partial y} \Delta x \quad (\text{II.37})$$

En utilisant d'un développement en série de Taylor, **la diffusion** de chaleur sur le volume de contrôle peut s'écrire :

Dans la direction  $x$  :

$$-k_x \frac{\partial T}{\partial x} \Delta y + \frac{\partial}{\partial x} \left( -k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) \Delta y \Delta x \quad (\text{II.38})$$

Et dans la direction  $y$  :

$$-k_y \frac{\partial T}{\partial y} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \left( -k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y \quad (\text{II.39})$$

Enfin, le taux de variation de l'énergie dans le volume de contrôle s'écrit :

$$\Delta x \Delta y \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{II.40})$$

Maintenant, c'est une question simple d'équilibrer l'énergie qui entre et qui sort du volume de contrôle. Le bilan énergétique peut être obtenu comme : « ***La chaleur entrant dans le volume de contrôle par convection + la chaleur entrant le volume de contrôle par conduction = la chaleur sortant du volume de contrôle par convection + la chaleur sortant du volume de contrôle par conduction + taux de variation d'énergie dans le volume de contrôle.*** »

Nous appliquons ce bilan énergétique et réarrangeons, nous obtenons :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial(uT)}{\partial x} + \frac{\partial(vT)}{\partial y} = \frac{1}{\rho c_p} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] \quad (\text{II.41})$$

Nous différencions les termes de convection par parties et nous substituons l'équation de continuité (II.11) dans l'équation (II.41), nous obtenons l'équation de conservation d'énergie simplifiée en deux dimensions (2D) comme :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{\rho c_p} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] \quad (\text{II.42})$$

Si la conductivité thermique est supposée constante et  $k = k_x = k_y$ , L'équation d'énergie se réduit à :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II.43})$$

Où  $\alpha = k/\rho c_p$  est appelé la diffusivité thermique.

L'équation de l'énergie sous forme de vecteur est :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \cdot \nabla T = \alpha \nabla^2 T \quad (\text{II.44})$$

## II.4. Forme non-dimensionnelle des équations régissant :

Dans la section précédente, nous avons illustré la dérivation des équations de Navier - Stokes pour un fluide incompressible. Dans de nombreuses applications de transfert de chaleur, il est souvent préférable de travailler en adimensionnel par conséquent les équations sont mises en forme adimensionnelle à l'aide d'échelles caractéristiques appropriées. Afin d'obtenir la forme adimensionnelle des équations régissant, considérons les équations suivant d'un écoulement incompressible (2D) sous forme dimensionnelle:

Équation de continuité :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Equation de quantité de mouvement selon  $x$  :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

Equation de quantité de mouvement selon  $y$  :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

Équation d'énergie :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

Où  $\nu = \mu/\rho$  est la viscosité cinématique.

Par la suite nous allons développer les modèles mathématiques pour les différents problèmes de convection en générale. Afin de donner au lecteur de ce travail un aperçu global sur les problèmes de convection. Pour ce faire,

Prenons trois cas différents de transfert de chaleur par convection. Nous commençons par le problème de convection naturelle suivie par les problèmes de convection «forcée» et «mixtes». Pour chaque cas, nous distinguons un ensemble d'échelles et variables non-dimensionnelles comme il est illustré ci-après.

### II.5. Problème de convection naturelle :

La convection naturelle est générée par des différences de masse volumique (elles même provoquées par des différences de température) dans un système de fluide. En raison de petites variations de masse volumique qui se présentent dans ces types d'écoulements (dits de convection naturelle), une approximation générale d'écoulement incompressible est souvent adoptée. Dans la plupart problèmes de convection dirigés par flottabilité, l'écoulement est généré par des variations de température ou des variations de concentration dans le système de fluide, ces variations conduisent à des différences locales de la masse volumique. Par conséquent, dans un tel écoulement, un terme de force de volume doit être ajouté aux équations de quantité de mouvement qui comprend l'effet des différences locales de masse volumique. Pour l'écoulement dirigé par des variations de température, **l'approximation de Boussinesq** est souvent utilisée, elle est donnée :

$$g(\rho - \rho_a) = g\beta(T - T_a)$$

Où  $g$  est l'accélération de la pesanteur ( $9,81 \text{ m/s}^2$ ), et  $\beta$  est le coefficient de dilatation thermique.

Le terme force de volume précédent (force de flottabilité thermique) est ajouté à l'équation de quantité de mouvement dans la direction de la pesanteur

(Gravité). Dans une situation normale (voir la figure 7.7), la force de flottabilité est ajoutée à l'équation de quantité de mouvement selon  $y$  (si la direction de la gravité est négative  $y$ ), qui s'écrit :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + g\beta(T - T_\infty)$$

Dans la pratique, les échelles et variables non-dimensionnelles suivantes sont adoptées pour le problème la convection naturelle (dans l'absence d'une valeur de vitesse de référence) :

$$x^* = \frac{x}{L}; \quad y^* = \frac{y}{L}; \quad t^* = \frac{t\alpha}{L^2};$$

$$u^* = \frac{uL}{\alpha}; \quad v^* = \frac{vL}{\alpha}; \quad p^* = \frac{pL^2}{\rho\alpha^2};$$

$$T^* = \frac{T - T_a}{T_w - T_a}$$

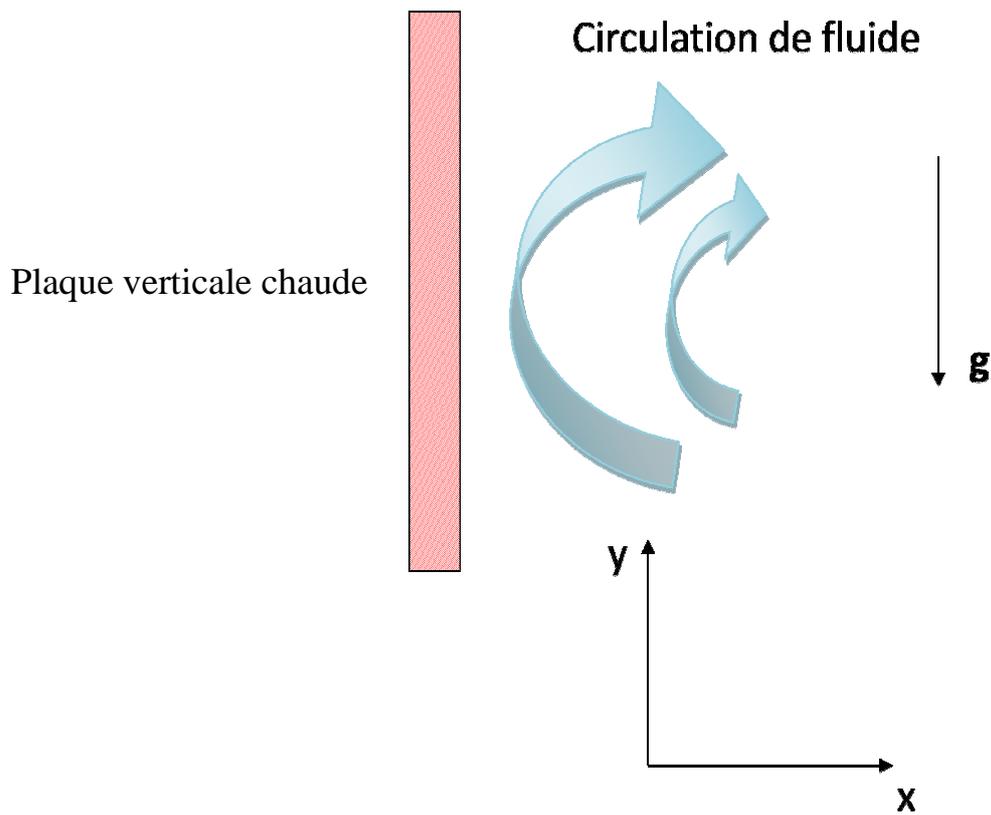


Figure (II.7) : Le débit naturel de convection près d'une chaude, plaque verticale (Lewis et al. [27]).

En introduisant ces échelle et variables s non-dimensionnelles dans les équations de conservation précédentes, nous obtenons la forme non dimensionnelle des équations de la manière suivante:

Équation de continuité :

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0$$

Equation de quantité de mouvement  $x$  :

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p_1^*}{\partial x^*} + \text{Pr} \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right)$$

Equation de quantité de mouvement  $y$  :

$$\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \text{Pr} \left( \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right) + GrPr^2 T^*$$

Équation d'énergie :

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \left( \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} \right)$$

Où  $Gr$  est le nombre de Grashof donné que :

$$Gr = \frac{g\beta\Delta TL^3}{\nu^2}$$

Souvent, un autre nombre sans dimension appelé le nombre de Rayleigh est utilisé dans les calculs. Ceci est donné comme :

$$Ra = GrPr = \frac{g\beta\Delta TL^3}{\nu \alpha}$$

En comparant les équations adimensionnelles de la convection naturelle et celle de la convection forcée, il est facile d'identifier les différences

## II.5.1. Nombres adimensionnels :

### II.5.1.1. Nombre de Nusselt :

C'est un nombre adimensionnel, il représente le rapport entre le flux thermique échangé par convection à celui par conduction. Sa définition triviale est donnée comme suit :

$$Nu = \frac{h_c L}{k}$$

Toutefois, le nombre de Nusselt peut être calculer comme suit (**Lewis et al. [27]**). Supposons qu'une surface chaude est refroidie par un écoulement de fluide froid. La chaleur de la surface chaude, qui est maintenue à une température constante, est diffusée à travers une couche limite par convection et par l'écoulement froid. Ce phénomène est défini par la loi de Newton de refroidissement par unité de surface. Celle-ci est donnée comme suit :

$$h_c(T_w - T_f) = -k \frac{\partial t}{\partial n}$$

où  $h_c$  est le coefficient de transfert de chaleur (par convection),  $k$  est une conductivité thermique moyenne du fluide,  $T_f$  est la température de l'écoulement du fluide et  $n$  est la direction normale à la surface de la chaleur transférée. L'équation ci-dessus peut être réécrite comme :

$$\frac{h_c L}{k} = - \frac{1}{T_w - T_f} \frac{\partial T}{\partial n} L$$

où  $L$  est une dimension caractéristique.

La quantité sur le côté gauche de ce qui précède l'équation est le nombre de Nusselt (c.-à-d.  $Nu = \frac{h_c L}{k}$ ). Si nous appliquons les échelles non-dimensionnelles, nous pouvons réécrire l'équation ci-dessus :

$$Nu = \frac{\partial T^*}{\partial n^*}$$

où  $Nu$  est le nombre de Nusselt local. Il est noté que le nombre de Nusselt local est égale au gradient de température adimensionnelle local ( $\frac{\partial T^*}{\partial n^*}$ ).

### **II.5.1.2. Nombre de Grashof :**

C'est un nombre sans dimension, utilisé en mécanique des fluides pour caractériser la convection naturelle dans un fluide.

Il correspond au rapport des forces de gravité sur les forces visqueuses. On le définit par :

$$Gr = \frac{g\beta\Delta T L_c^3}{\nu^2}$$

où :  $L_c$  : La longueur caractéristique entre la paroi chaude et froide.

### **II.5.1.3. Nombre de Rayleigh :**

C'est un nombre sans dimension, caractérisant aussi le transfert de chaleur au sein d'un fluide. Ce nombre est utilisé en mécanique des fluides. Inférieur à une valeur critique de 2000, le transfert s'opère par conduction, au-delà de cette valeur, c'est la convection libre (naturelle) qui devient importante. On le définit de la manière suivante :

$$Ra = \frac{g\beta\Delta T L_c^3}{\nu \alpha} = GrPr$$

**II.5.1.4. Nombre de Prandtl :**

C'est un nombre adimensionnel. Il représente le rapport entre la diffusivité de quantité de mouvement (ou viscosité cinématique) et la diffusivité thermique. On le définit de la manière suivante :

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha}$$

**II.6. Convection forcée :**

Dans les problèmes de convection forcée, les échelles caractéristiques et variables non-dimensionnelles suivantes sont utilisées:

$$x^* = \frac{x}{L}; \quad y^* = \frac{y}{L}; \quad t^* = \frac{tu_a}{L};$$

$$u^* = \frac{u}{u_a}; \quad v^* = \frac{v}{u_a}; \quad p^* = \frac{p}{\rho u_a^2};$$

$$T^* = \frac{T - T_a}{T_w - T_a}$$

où \* indique une quantité adimensionnelles (sans dimension), L est une dimension caractéristique, l'indice a indique une valeur de référence constante et  $T_w$  est la température de référence constante. La masse volumique  $\rho$  et la viscosité  $\mu$  du fluide sont supposées constantes partout et égale à la valeur d'entrée.

Nous substituons les variables adimensionnelles ci-dessus dans les équations dimensionnelles précédentes après réarrangement nous obtenons les formes adimensionnelles des équations régissant le problème de la convection forcée dans un canal :

Équation de continuité :

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0$$

Equation de mouvement x :

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right)$$

Equation de mouvement y :

$$\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right)$$

Équation d'énergie :

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \frac{1}{Re Pr} \left( \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} \right)$$

où  $Re$  est le nombre de Reynolds défini comme :

$$Re = \frac{u_a L}{\nu}$$

Et  $Pr$  est le nombre de Prandtl donné que :

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha}$$

Une fois de plus, notons que la masse volumique, la viscosité cinématique et la conductivité thermique sont supposée constante dans la dérivation des équations non-dimensionnelles précédentes.

Un autre nombre sans dimension, qui est souvent utilisé dans les calculs de transfert de chaleur par convection forcée est le nombre de Péclet et est donnée par :

$$Pe = RePr = u_a L / \alpha$$

## II.7. Problème de convection mixte :

Le problème de convection mixte comporte des éléments à la fois des conditions d'écoulement convection forcé et naturelle. Les effets de flottabilité deviennent comparables aux effets d'écoulement forcé à petite et moyenne nombres de Reynolds. Puisque l'écoulement est en partie forcé, une valeur de vitesse de référence est normalement connue (exemple: vitesse à l'entrée d'un canal). Par conséquent, les échelles et variables non-dimensionnelles convection forcé peuvent être adoptées ici. Toutefois, dans les problèmes de convection mixtes, le terme de flottabilité doit être ajouté à l'équation de quantité de mouvement appropriée. Si nous remplaçons  $1/Pr$  avec  $Re$  dans les équations non-dimensionnelles précédentes de convection naturelle, nous obtenons les équations non-dimensionnelles pour les écoulements de convection mixte. Ces équations sont les mêmes que pour le problème d'écoulement de convection forcée à l'exception du terme de force de volume, qui est ajoutée à l'équation de mouvement dans la direction de la gravité.

Le terme de force de volume dans le cas du problème de convection mixte est :

$$\frac{Gr}{Re^2} T^*$$

Notons que, parfois, un paramètre sans dimension appelé nombre de Richardson ( $Gr/Re^2$ ) est également utilisé dans les problèmes de convection mixte dans la littérature.

---

## CHAPITRE III

**Application: étude de la convection naturelle  
dans une cavité carrée**

---

---

### III.1. Introduction :

Dans ce chapitre, nous exposons les résultats de simulation obtenus à l'aide du code « Femlab », en adoptant les mêmes conditions citées ci-dessus.

En premier lieu, nous présentons une représentation du maillage, dans le but de bien choisir le maillage convenable à notre étude. Les résultats ont été testés et validés avec succès par rapport à ceux obtenus par d'autres auteurs.

Dans notre cas, nous présentons les champs d'écoulement, dynamique et thermique, ainsi que les profils de température et de vitesse le long de la paroi verticale. Les variations de Nusselt local et moyen à différents nombres de Grashof sont illustrées dans cette étude.

Pour toutes les simulations réalisées, nous avons adopté un nombre de Prandtl égal à 0,71 (l'air), un nombre de Rayleigh, variant de  $10^2$  à  $10^7$ .

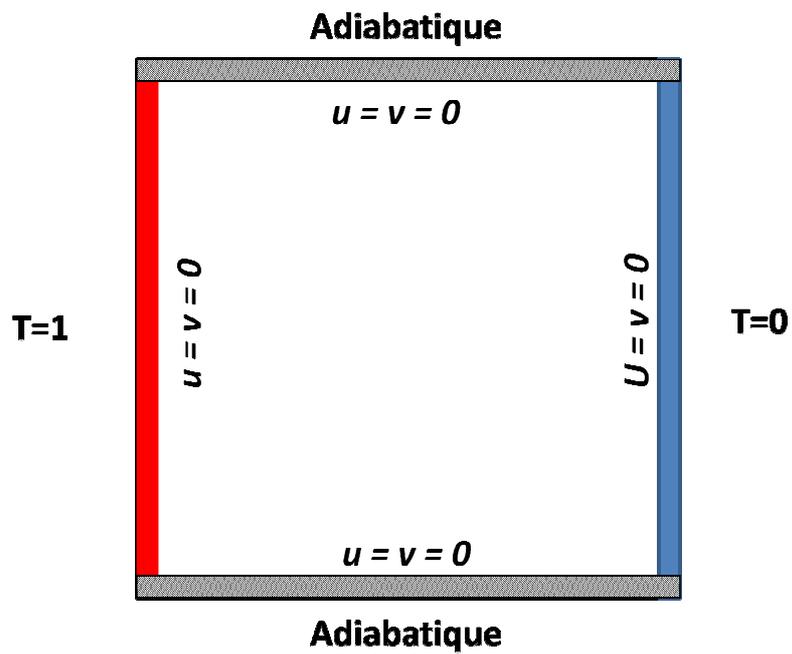
### III.2. Présentation des résultats :

Comme nous avons déjà mentionné aux chapitres précédents, la convection naturelle, induite par la force de flottabilité thermique, est créée par l'apparition de différences locales de température dans un fluide. Elle est présente dans la plupart des situations d'écoulements ; cependant, sa signification peut varier en fonction de la situation. Par exemple, dans une situation dans laquelle une surface chaude et un fluide froid interfèrent, sans autre force externe, un modèle de convection de flottabilité se développera. Par exemple : radiateurs à l'intérieur d'une chambre froide, la plupart des appareils solaires, des applications de refroidissement de dispositifs électronique et enfin les applications de changement de phase (**Lewis et al. [27]**).

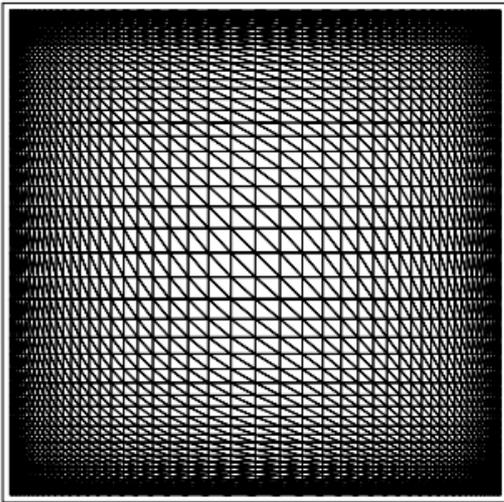
Les principes de la convection induite par la flottabilité sont simples. Une différence de température locale crée une différence de masse volumique locale dans le fluide et résulte en un mouvement dans le fluide en raison de la variation de masse volumique locale. Bien que les principes soient simples, le développement d'une solution numérique exacte pour ces écoulements convectifs entraînés par la flottabilité est loin d'être simple (Lewis et al. [27]). Ceci est principalement dû à des taux d'écoulements très lents, qui sont souvent marqués par le phénomène de turbulence, qui encore une fois complique la prédiction numérique.

Afin d'étudier le problème de convection induite par la flottabilité, nous allons considérer le cas test, (le problème de la convection naturelle dans une cavité carrée à deux dimensions « 2D »), comme illustré à la figure (III.1). La géométrie est un carré à 2D, de dimensions unité (en adimensionnelle). Les parois sont rigides et soumises à des conditions aux limites de vitesse (vitesse nulle (*non-glissement*)). L'une des parois verticales est soumise à une température plus élevée « paroi chaude » ( $T_h^* = 1$ ) que l'autre paroi verticale ( $T_c^* = 0$ ). Les deux parois supérieure et inférieure sont supposées être isolées « adiabatique » (flux de chaleur zéro). Nous cherchons la solution en régime établi de ce problème.

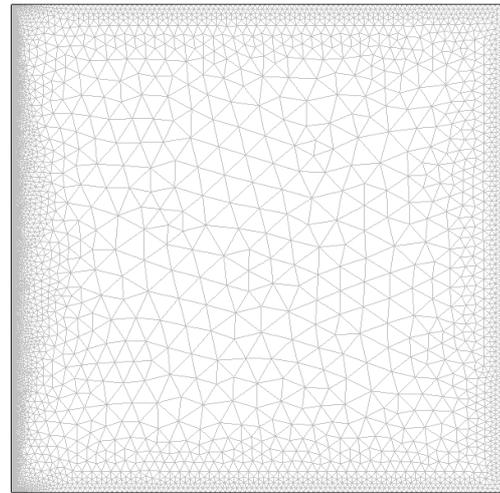
Afin d'obtenir une solution en régime établi, le code commercial de calcul « Femlab » est utilisé ici. Le paramètre qui varie dans ce problème est le nombre de Rayleigh. Le maillage utilisé dans les calculs est le maillage représenté et sur la figure (III.2b). Le maillage de la figure (III.2b) contient 17818 éléments.



**Figure (III.1)** : Géométrie et conditions aux limites pour le problème de l'écoulement de convection naturelle dans une enceinte carrée (cas test).



Maillage utilisé dans **(Lewis et al. [27])** :  
5000 éléments



Maillage utilisé dans le travail présenté :  
17818 éléments **(Femlab)**

**Figure (III.2)** : Problème de l'écoulement de convection naturelle dans une enceinte carrée : Maillage utilisé

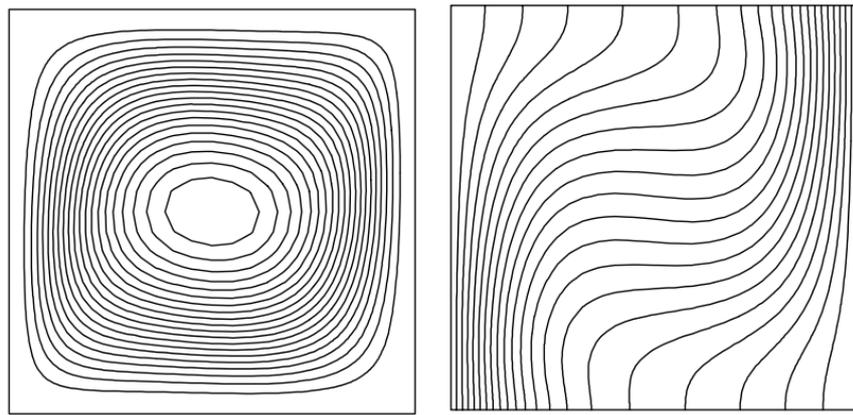
Les figures (III.3), (III.4) et (III.5) montrent les contours de température (isothermes) et lignes de courant (en régime établi) pour différents nombre de Rayleigh. L'écoulement augmente le long de la paroi chaude du côté gauche, en prenant la chaleur avec lui et finalement la perd le long de la paroi latérale droite. Comme le nombre de Rayleigh augmente l'écoulement devient plus fort et il est marqué avec un régime d'écoulement *plus fin* et de *minces* couches limites thermiques dans les régions proches des parois verticales (voir les figures (III.3) et (III.5) pour le cas où  $Ra = 10^6 - 10^7$ ).

Le Tableau (III.1) rapporte diverses quantités qui ont été calculées pour la convection naturelle dans une cavité carrée (**Lewis et al. [27]**). Dans le tableau (III.1),  $\psi$  est la fonction de courant,  $Nu_{moy}$  est le nombre de Nusselt moyen et  $v_{max}^*$  représente la composante maximale de la vitesse verticale (vitesse adimensionnelle).

Nos résultats se comparent très bien avec les données dans la littérature (**Lewis et al. [27]** et **Mechighel & al. [28]**).

**Tableau III.1** : Résultats quantitative pour le problème de convection naturelle dans une cavité carrée (**Lewis et al. [27]**)

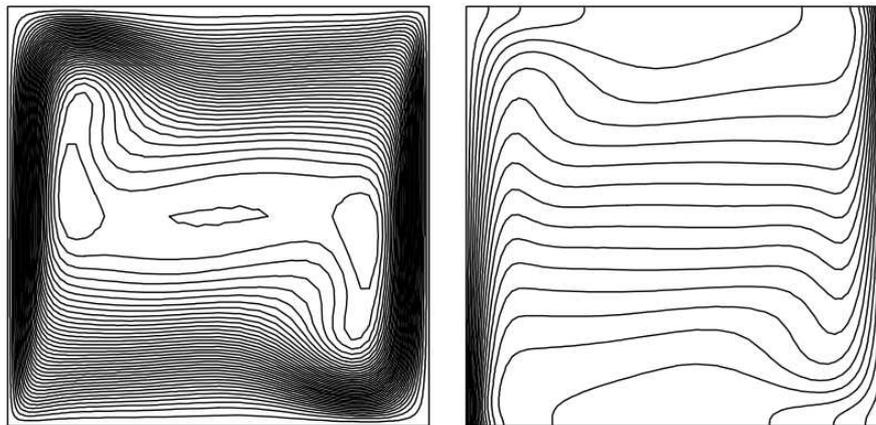
Ra	Nu <sub>moy</sub>		v* <sub>max</sub>	
	Lewis et al. [27])	Présente étude	Lewis et al. [27])	Présente étude
10 <sup>3</sup>	1,116	1,118	3,692	3,701
10 <sup>4</sup>	2,243	2,245	19,63	19,67
10 <sup>5</sup>	4,521	4,521	68,85	68,64
10 <sup>6</sup>	8,806	8,806	221,6	221,1
10 <sup>7</sup>	16,40	16,40	702,3	701,4



(a) Streamlines

(b) Temperature

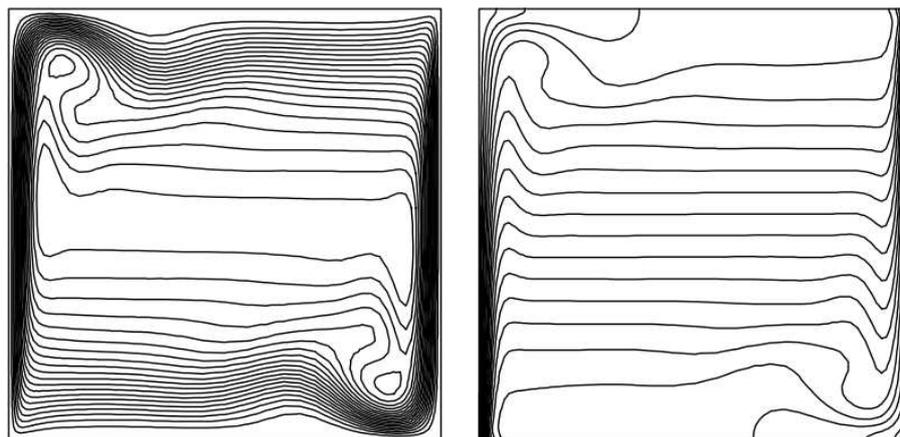
$Ra = 10^4$



(c) Streamlines

(d) Temperature

$Ra = 10^6$

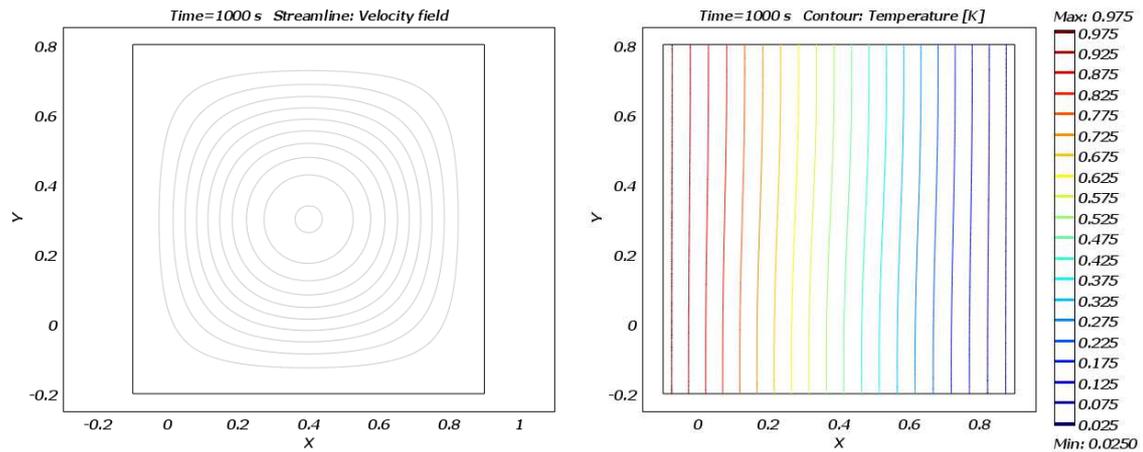


(e) Streamlines

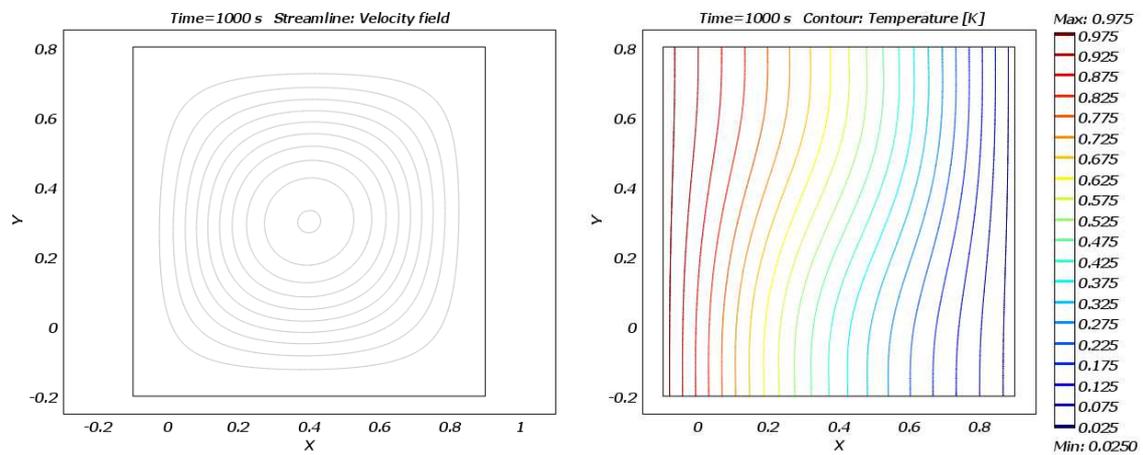
(f) Temperature

$Ra = 10^7$

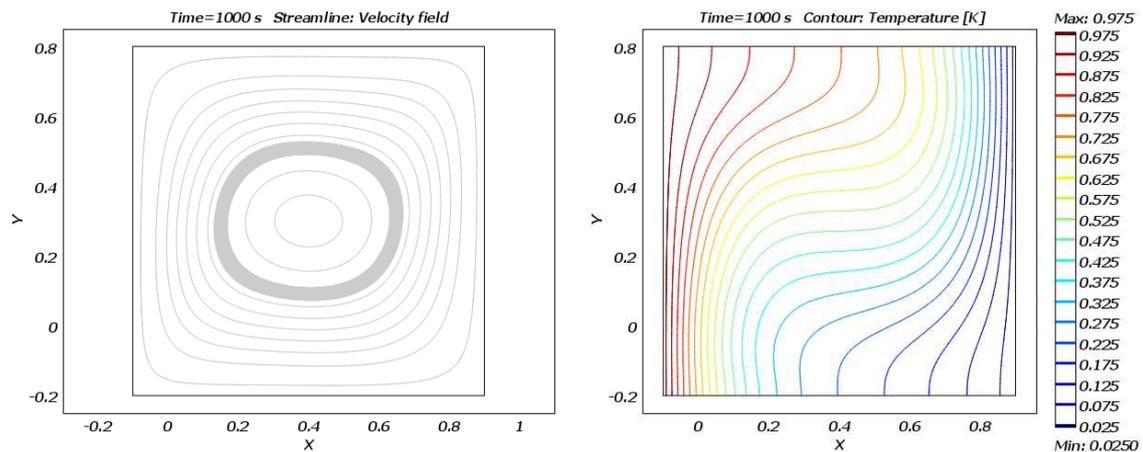
**Figure III.3 :** Convection naturelle dans une enceinte carrée : lignes de courant et température pour différents nombres de Rayleigh,  $Pr = 0,71$  (Lewis et al. [27]).



$Ra = 10^2$

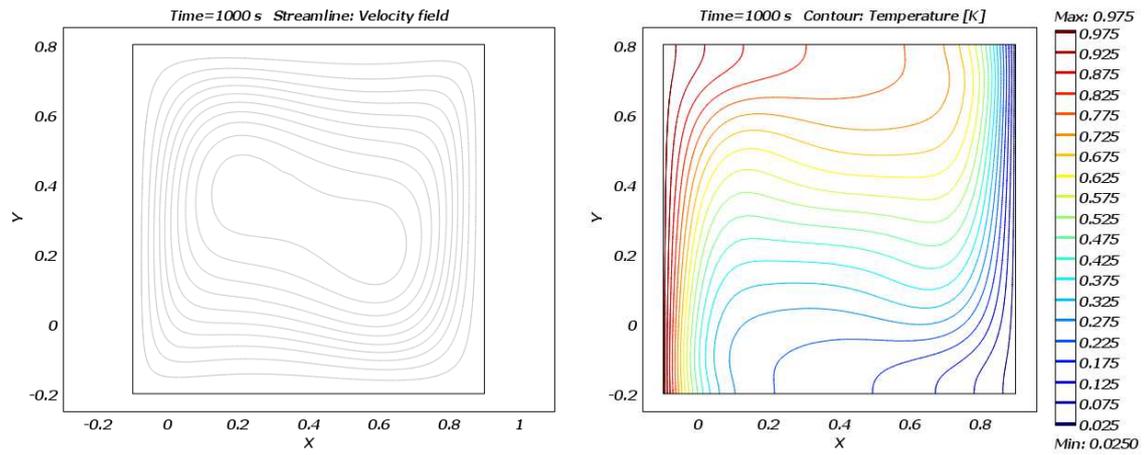


$Ra = 10^3$

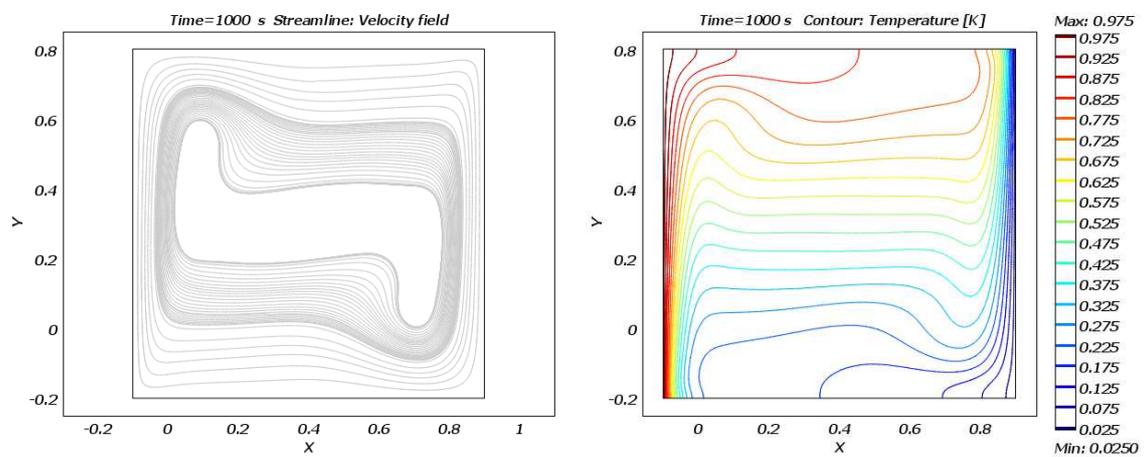


$Ra = 10^4$

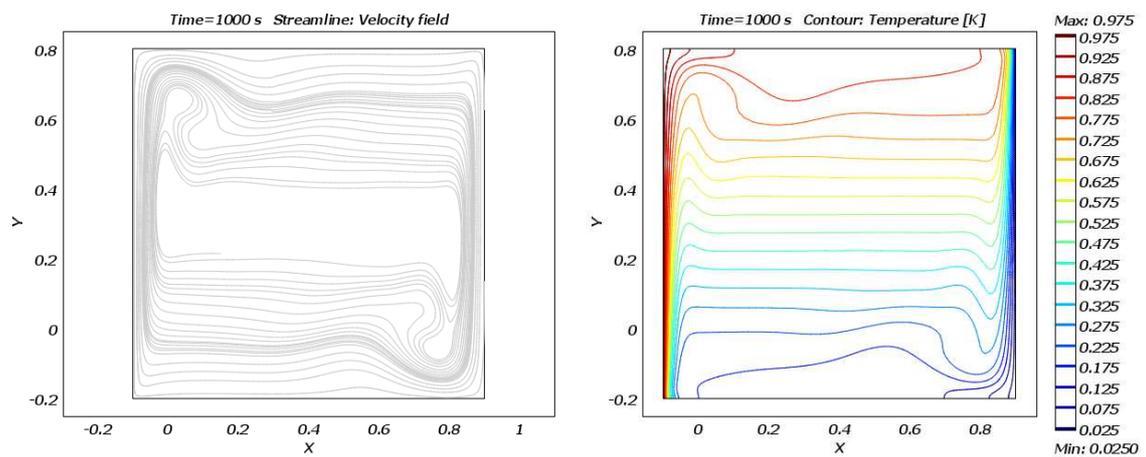
Figure III.4 : Convection naturelle dans une enceinte carrée : lignes de courant et température pour différents nombres de Rayleigh,  $Pr = 0,71$  (présente étude).



$Ra = 10^5$



$Ra = 10^6$



$Ra = 10^7$

**Figure III.5 :** Convection naturelle dans une enceinte carrée : lignes de courant et température pour différents nombres Ra, Pr = 0,71 (présente étude).

---

# Conclusion Générale

---

---

## *Conclusion*

L'étude présentée dans ce mémoire porte sur la convection naturelle laminaire dans une cavité. La configuration géométrique du modèle physique est une cavité carrée, soumise à un gradient de température horizontal.

Le problème a été abordé selon une approche numérique, en utilisant le code « Femlab ».

Nous avons pu déterminer les contours des lignes de courant et des isothermes, ainsi que les variations du nombre de Nusselt moyen et local en fonction du nombre de Grashof.

La détermination du champ d'écoulement nous a permis d'analyser le comportement du fluide à l'intérieur de la cavité. Pour un nombre faible de Ra, de l'ordre de  $10^2 - 10^3$  ( $Gr = 71 - 710$  (c.-à-d.  $Gr < 1000$ )), on a remarqué la dominance du mode de transfert de chaleur par conduction. Au-delà de cette valeur ( $Gr > 1000$ ), la convection domine et apparaît d'une manière plus claire pour  $Gr = 10^5$ .

Afin de continuer les recherches dans notre domaine d'étude, qui concerne les cavités carrées avec des parois différentiellement chauffées, nous recommandons :

- D'étendre cette étude à d'autres formes et configurations plus complexes;
- D'élargir le domaine de simulation en trois dimensions;
- Etude du problème dans le cas de l'écoulement en régime turbulent;
- Introduire le mode de transfert de chaleur par rayonnement, ainsi que le champ magnétique.

---

# Références bibliographiques

---

---

*Références bibliographiques*

- [1] S. Djimli. « Modélisation de la convection à faible nombre de Prandtl ». Mémoire de magister, option thermo-fluides, université MENTOURI Constantine (2004).
- [2] A. Abidi. « Convection naturelle laminaire conjuguée dans une enceinte avec bloc conductif au milieu ». Mémoire de magister, option procédés et énergétique, Université KASDI MERBEH Ouargla (2009).
- [3] M. Guestal. « Modélisation de la convection naturelle laminaire dans une enceinte avec une paroi chauffée partiellement ». Mémoire de magister, option énergétique appliquée en engineering, Université MENTOURI Constantine (2009).
- [4] H. Bénard. « Les Tourbillons cellulaires dans une nappe Liquide transportant de la chaleur par convection en régime permanent ». Ann. Chim. Phys. 7 (Ser. 23): pp.62-79 (1901).
- [5] L. Rayleigh. « On convection currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the underside ». Phil. Mag. 32: pp.529-538 (1916).
- [6] November M et Nansteel M.W. « Natural convection in rectangular enclosures heated from below and cooled along one side». Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 30No. 11, pp. 2433-40 (1987).
- [7] M.M. Ganzarolli, L.F. Milanez. « Natural convection in rectangular enclosures heated from below and symmetrically cooled from the sides ». Int. J. Heat Mass Transfer, 38, pp.1063-1073 (1995).

- [8] G de Vahl Davis. « Natural convection of air in a square cavity »: a bench mark solution. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, vol. 3, pp. 249-264 (1983).
- [9] E.K. Lakhal et M. Hasnaoui. « Convection naturelle dans une cavité carrée chauffée périodiquement par le bas ». *Revue générale de thermique*, 27, pp.480-485 (1995).
- [10] M. Hasnaoui, E. Bilgen, P. Vasseur. « Natural convection heat transfer in rectangular cavities partially heated from below ». *J. Thermophys. Heat Transfer*, 6, pp. 255-264 (1992).
- [11] M. Bourich, M. Hasnaoui, A. Amahnid. « Double-diffusive natural convection in a porous enclosure partially heated from below and differentially salted ». *Int. J. Heat Fluid Flow* 25(6), pp.1034-1046 (2004).
- [12] V. Prasad, F. A. Kulacki. « Convective heat transfer in a rectangular porous cavity effect of aspect ratio on flow structure and heat transfer ». *J. Heat Transfer* 106, pp.158-165 (1984).
- [13] S. Paolucci, D.R. Chenoweth. « Natural convection in shallow **enclosures with** differentially heated end walls ». *J. Heat Transfer* 110, pp. 625-634 (1988).
- [14] C.J. Ho, J.Y. Chang. « A study of natural convection heat transfer in a vertical rectangular enclosure with two-dimensional discrete heating: effect of aspect ratio ». *Int. J. Heat Mass Transfer* 37 (6), pp. 917–925 (1994).
- [15] R.L. Frederick. « On the aspect ratio for which the heat transfer in differentially heated cavities is maximum ». *Int. Comm. Heat Mass Transfer* 26 (4), pp. 549–558 (1999).

- [16] W. Tong. « Aspect ratio effect on natural convection in water near its density maximum temperature ». *Int. J. Heat Fluid Flow* 20 (6), pp. 624–633 (1999).
- [17] S. Wakitani. « Numerical study of three-dimensional oscillatory natural convection at low Prandtl number in rectangular enclosures », *J. Heat Transfer* 123, pp. 77–83 (2001).
- [18] P.K. Das, S. Mahmud, S.H. Tasnim, A.K.M.S. Islam. « Effect of surface waviness and aspect ratio on heat transfer inside a wavy enclosure ». *Int. J. Numer. Meth. Heat Fluid Flow* 13 (8), pp.1097–1122 (2003).
- [19] S. Torii. « Effect of aspect ratio of unsteady thermal–fluid transport phenomena in cavities under reduced gravity ». *Int. J. Comput. Eng. Sci.* 4 (1), pp. 85–97 (2003).
- [20] A. Valencia, R.L. Frederick. « Heat transfer in square cavities with partially active vertical walls ». *Int. J. Heat Mass Transfer* 32, pp. 1567–1574 (1989).
- [21] M.M. El-Refae, M.M. Elsayed, N.M. Al-Najem, A.A. Noor. « Natural convection in partially cooled tilted cavities ». *Int. J. Numer. Meth. Fluids* 28, pp. 477–499 (1998).
- [22] Q.-H. Deng, G.-F. Tang, Y. Li. « A combined temperature scale for analyzing natural convection in rectangular enclosures with discrete wall heat sources ». *Int. J. Heat Mass Transfer* 45, pp. 3437– 3446 (2002).
- [23] N. Nithyadevi, P. Kandaswamy, J. Lee « Natural convection in a rectangular cavity with partially active side walls ». *International Journal of Heat and Mass Transfer - INT J HEAT MASS TRANSFER* , vol. 50, no. 23, pp. 4688-4697, 2007

- [24] N. Nithyadevi, P. Kandaswamy, S. Sivasankaran. « Natural convection in a square cavity with partially active vertical walls; time periodic boundary condition ». *Math. Probl. Eng.*, pp. 1–16 (2006).
- [25] P. Kandaswamy, S. Sivasankaran, N. Nithyadevi. « Buoyancy-driven convection of water near its density maximum with partially active vertical walls ». *Int. J. Heat Mass Transfer* 50, pp. 942–948 (2007).
- [26] A. Bionchi, Y. Fantrelle, J. Etay. « Transferts thermiques ». presses polytechniques et universitaires romandes, pp.189-192 (2004).
- [27] R.W.lewis, P.nithiarasu, K.N.seetharamu « Fundamentals of the finite element method for heat and fluid flow » (2004) John Wiley & Sons, Ltd ISBNs: 0-470-84788-3 (HB); 0-470-84789-1 (PB)