

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

BADJI MOKHTAR- ANNABA UNIVERSITY

UNIVERSITE BADJI MOKHTAR ANNABA



جامعة باجي مختار- عنابة

Année : 2018

Faculté: Sciences de l'Ingéniorat

Département: Electronique

MEMOIRE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de : MASTER

Intitulé :

**Commande et identification partielle d'une
installation de broyage-classification**

Domaine : Electronique

Filière : Automatique

Spécialité: Automatique et informatique industrielle

Par : FADHEL Taki eddine

DEVANT LE JURY :

Président : **S.BENMOUSSA**

Directeur de mémoire: **M.BEKAIK**

Examineur: **K.CHAKER**

Examineur: **N.DOGHMANE**

MCA

MCA

MCA

Professeur

Pr U. Annaba

Pr U. Annaba

Pr U. Annaba

Pr U. Annaba

Remerciement

Tout d'abord, je remercie le Dieu, notre créateur de nos avoir donné les forces, la volonté et le courage afin d'accomplir ce travail modeste.

J'adresse le grand remerciement à mon encadreur Dr. BEKAÏK Mounir qui a proposé le thème de ce mémoire, pour ses conseils et ses dirigés du début jusqu'à la fin de ce travail. Tous les enseignants qui ont contribué à notre formation.

Mes remerciements s'adressent aussi aux membres du jury :

Mr. S. BENMOUSSA, MCA de l'université de Badji Mokhtar Annaba.

Mme. K. CHAKER, MCA de l'université de Badji Mokhtar Annaba.

Mr. N. DOGHMANE, Professeur de l'université de Badji Mokhtar Annaba.

Pour avoir accepté d'évaluer mon travail et pour avoir pris le temps de soigneusement étudier ce manuscrit. Leurs conseils ne seront qu'enrichissant et bénéfiques.

En fin je remercie tout mon entourage mes amis qui m'ont aidé a concrétise ce travail.

Dédicaces

Ce travail modeste est dédié :

À mes chers parents ;

À mes frères Ala, Haroun et Islam ;

*À tous mes proches de la famille tout
à son nom ;*

*À tous mes chers amis et mes collègues
de l'université BADJI MOKHTAR.*

Résumé

L'identification du système est la science de la construction des modèles mathématiques des systèmes dynamiques à partir de données entrées-sorties observées. Il peut être vu comme l'interface entre le monde réel des applications et le monde mathématique de la théorie du contrôle et des abstractions de modèles. L'identification du système est un sujet très vaste, avec différentes techniques qui dépendent du caractère des modèles à estimer: linéaire, non linéaire, hybride, paramétrique, non paramétrique, etc. Notre objectif principal est de réaliser un programme d'identification interactive des systèmes dynamiques linéaires mono variables. Ce programme sera articulé autour de trois méthodes d'estimation des paramètres des modèles basé sur la technique du moindre carré. L'application du logiciel sur un système de broyage-classification a donné des résultats qui sont jugés par les différents tests de validation (graphique) de modèle. Ensuite, nous calculons la réponse du système partielle-broyage classification avec une commande prédictive, cette dernière est atteindré par un programme Matlab.

Mots clés : Identification, estimation, broyage-classification, moindre carré, systèmes dynamique linéaire, commande prédictive.

Abstract

System identification is the science of building mathematical models of dynamical systems from observed input-output data. It can be seen as the interface between the real world of applications and the mathematical world of control theory and model abstractions. The identification of the system is a very large subject, with different techniques depending on the character of the models to be estimated: linear, non-linear, hybrid, non-parametric, etc. Our main goal is to carry out an interactive identification program of linear dynamical systems. This program will be based on three methods of estimating model parameters based on the least square technique. The application of the software on a grinding-classification system has yielded results that are judged by the various validation tests (graph) model. Then we give the system partial grinding-classification response with a predictive command, the latter is reached by a Matlab program.

Keywords: Identification, grinding-classification, estimation, least squares, linear dynamic systems, predictive control.

ملخص

تحديد النظام هو علم بناء نماذج رياضية للأنظمة الديناميكية من بيانات المدخلات والمخرجات المرصودة. يمكن اعتباره واجهة بين العالم الحقيقي للتطبيقات والعالم الرياضي لنظرية التحكم ونماذج التجريد. يعتبر تعريف النظام موضوعاً كبيراً للغاية، مع اختلاف التقنيات التي تعتمد على طبيعة النماذج التي سيتم تقديرها: خطية، غير خطية، هجينة، غير معلمية، إلخ. هدفنا الرئيسي هو تنفيذ برنامج التعرف التفاعلي للأنظمة الديناميكية الخطية. سوف يعتمد هذا البرنامج على ثلاث طرق لتقدير معلمات النموذج على أساس تقنية المربع الأقل. وقد أسفر تطبيق البرنامج على نظام تصنيف طحن عن النتائج التي يتم الحكم عليها من خلال نموذج اختبارات التحقق من الصحة المتنوعة (الرسم البياني). ثم نقوم بحساب استجابة نظام تصنيف الطحن الجزئي بأمر تنبؤي، يتم الوصول إلى هذا الأخير من خلال برنامج "متلاب".

الكلمات المفتاحية: تحديد الهوية، النموذج، التقدير، طحن-تصنيف، المربعات الصغرى، الأنظمة الديناميكية الخطية، التحكم التنبؤي.

Sommaire

Liste des figures

Liste des tableaux

Introduction générale

CHAPITRE 1 : LE PROCESSUS DE BROYAGE

1.1 Introduction.....	2
1.2 Fracture et mécanismes de rupture des matériaux	2
1.2.1 Physique de la fracture.....	2
1.2.2 La fragmentation.....	4
Objectifs de la fragmentation.....	5
Mécanismes de fragmentation	5
Les conditions opératoires	6
Influence sur les propriétés d'usage.....	7
1.2.3 Caractéristiques des matériaux à broyer	7
1.3 Le choix de types des broyeurs	9
1.4 Quantification du phénomène de broyage	13
1.4.1 Approche énergétique.....	14
1.4.2 Approche cinétique.....	18
Equation de bilan de population en broyage discontinu - cinétique de broyage.....	19
Broyage en continu - Couplage de broyage et d'un modèle d'écoulement	19
1.4.3 Etude comparative	21
Avantages et inconvénients de l'approche énergétique.....	21
Avantages et inconvénients de la proche cinétique	21
1.5 Circuits de broyage – classification	22
1.5.1 Techniques d'estimation des paramètres.....	25
Mesure de la fonction de broyage	25

Mesure de la fonction de sélection.....	27
1.5.2 Calcul des paramètres cinétique à partir de données discontinues ou industrielles	29
1.6 Conclusion	31

CHAPITRE 2 : BROYAGE-CLASSIFICATION

2.1 Introduction.....	33
2.2 Les Classificateurs.....	34
2.2.1 Caractéristiques de la machine	35
2.2.2 Les classificateurs Hydrocyclones.....	36
2.2.3 Couplage Broyage-classification.....	38
2.3 Contrôle et régulation du broyage.....	40
2.3.1 Alimentation de la trémie tampon	40
2.3.2 Régulation du débit du broyage.....	40
2.3.3 Régulation de la classification.....	41
2.3.4 Enregistrement des paramètres du broyeur	41
2.4 Modélisation du système	42
2.4.1 Equations entrée-sorties:.....	42
2.4.2 Représentation d'état	46
Exemple	46
2.5 Conclusion	46

CHAPITRE 3 : IDENTIFICATION LINEAIRE DES SYSTEMES

MONOVARIALE INVARIANT

3.1 Introduction.....	48
3.2 Méthodologies d'identification de modèles à temps continu.....	48
3.2.1 Formulation du problème d'identification.....	52
3.2.2 Choix du modèle d'identification	54
3.2.3 Notion du modèle	55

3.3	Forme générale des modèles invariants stochastiques	55
3.3.1	Modèle à erreur d'équation (Auto Régressif éXogène ‘ARX’)	58
3.3.2	Modèle à erreur de sortie (OE : Output Error)	60
3.4	Identification basé sur l'erreur de sortie (output error : OE)	61
3.5	Identification basé sur l'erreur d'équation.....	62
3.6	La prédiction	63
3.6.1	Les modèles de prédiction	65
	Cas d'un modèle ARX	65
	Cas d'un modèle OE	66
3.7	Estimation des paramètres.....	67
3.7.1	Méthodes d'estimation paramétrique de modèles à temps continu	68
3.7.2	Méthode des moindres carrés	69
3.8	Exemple d'un circuit RC	76
3.8.1	Equations dynamiques	76
3.8.2	La fonction de transfert.....	77
3.8.3	Analysé les données.....	78
	Elimination de l'offset (Centré les données).....	79
3.8.4	Estimation des paramètres du modèle par la méthode des moindres carrés.....	81
	a) Méthode des moindres carrés normale	81
	b) Estimation des paramètres a et b (méthodes de dérivation)	85
	c) Estimation de deux paramètre a et b (méthodes d'intégration).....	88
3.8.5	Etude comparative	94
3.9	Conclusion	97

CHAPITRE 4 : APPLICATION

4.1	Introduction.....	99
4.2	Représentation sous forme des blocs	99
4.3	Analyse des données	100
4.4	Le protocole expérimental	101

4.5 Centrer les données	102
4.6 Le choix de la fonction de transfert	103
4.7 Estimation des paramètres du modèle par la méthode des moindres carrés	104
4.7.1 Méthode des moindres carrés normale	105
4.7.2 Estimation de deux paramètres a et b (méthodes de dérivation).....	110
4.7.3 Estimation de deux paramètres a et b (méthodes d'intégration).....	114
4.7.4 Etude comparative	120
4.8 Commande prédictive	123
4.8.1 Fonctionnement	123
4.8.2 Elément de la commande prédictive.....	124
4.8.3 Modèle et prédiction.....	125
4.8.4 Application sur Matlab	126
4.9 Conclusion	127
Conclusion générale	128
Bibliographie	129

Liste des figures:

Figure 1.1 La déformation en fonction de la contrainte.....	2
Figure 1.2 Les différentes contraintes de broyage.	4
Figure 1.3 Echelle de dureté de Mohs.....	8
Figure 1.4 Les différents types de broyeur en fonction de la dureté et de la taille du produit à obtenir.....	9
Figure 1.5 Validité des lois énergétiques.	16
Figure 1.6 Distribution des tailles de particule.	20
Figure 1.7 Couplage Broyage-Classification.	22
Figure 1.8 Représentation stœchiométrique de la fragmentation.....	25
Figure 2.1 Schéma simplifié de l'étape de broyage.	33
Figure 2.2 Broyage et classification dans l'industrie.	35
Figure 2.3 Conception d'un hydro-cyclone.....	37
Figure 2.4 Couplage Broyeur – Classificateur.	38
Figure 2.5 Les paramètres du broyeur (entrées/sorties).	42
Figure 2.6 Les paramètres du bache (entrées/sorties).	43
Figure 2.7 Schéma représentant les paramètres au niveau de la bache.....	44
Figure 2.8 Un circuit du broyage-classification.	46
Figure 3.1 Procédure d'identification.....	49
Figure 3.2 Schéma bloc des modèles invariants stochastiques.	56
Figure 3.3 Représentation graphique générale du modèle ARX et OE.....	57
Figure 3.4 Représentation graphique du modèle ARX.	58
Figure 3.5 Représentation graphique du modèle OE.	60
Figure 3.7 Principe d'identification fondée sur l'erreur de prédiction.	62
Figure 3.8 Schéma d'identification et d'estimation.....	68
Figure 3.9 Schéma représentant un circuit RC.....	76
Figure 3.10 Evolution de la commande U (tension) en fonction du temps.	78
Figure 3.11 Evolution de la sortie Y (courant) en fonction du temps.	79
Figure 3.12 Les valeurs de la sortie « y » après l'élimination de l'offset.	80
Figure 3.13 Les valeurs de la commande « u » après l'élimination de l'offset.....	80

Figure 3.14 Les valeurs des $y(k)$ et $\hat{y}(k)$	82
Figure 3.15 Les valeurs des $y(k)$ et $\hat{y}_2(k)$ estimés.	86
Figure 3.16 Les valeurs de $y(k)$ et de $y_{\text{int}}(k)$	91
Figure 3.17 Les valeurs de sortie de la méthode normale et la méthode de dérivation	94
Figure 3.18 Les valeurs de sortie de la méthode normale et la méthode d'intégration.....	95
Figure 3.19 Les valeurs de sortie de la méthode dérivation et la méthode d'intégration.....	96
Figure 4.1 Schéma bloc d'un circuit broyage-classification.	99
Figure 4.2 Evolution de l'entrée V_s (vitesse) en fonction du temps.	100
Figure 4.3 Evolution de la sortie Q_{pf} (débit) en fonction du temps.	101
Figure 4.4 Les valeurs de la sortie « Q » et de la commande « V » après l'élimination de l'offset.	102
Figure 4.5 Les valeurs des $Q(k)$ et $\hat{Q}(k)$	106
Figure 4.6 Les valeurs de $Q(k)$ et du $\hat{Q}_2(k)$	111
Figure 4.7 Les valeurs des $Q(k)$ et du $Q_{\text{int}}(k)$	117
Figure 4.8 Les valeurs de sortie de la méthode normale et la méthode de dérivation.	120
Figure 4.9 Les valeurs de sortie de la méthode normale et la méthode d'intégration.....	121
Figure 4.10 Les valeurs de sortie de la méthode de dérivation et la méthode d'intégration...122	
Figure 4.11 Principe de la commande prédictive.....	124
Figure 4.12 La réponse du système partielle-broyage classification avec une commande prédictive.....	126

Liste des tableaux

Tableau 1.1 Propriétés des matériaux et mode de broyage.	2
Tableau 1.2 La granulométrie finale de la matière de chaque opérations.....	5
Tableau 1.3 Les différents types de broyeur en fonction de la taille du produit à obtenir.....	12
Tableau 2.1 Les types des classificateurs et ses tailles de coupure et ses conditions de fonctionnement.....	36
Tableau 2.2 L'ensemble des paramètres d'un circuit broyage-classification.	39
Tableau 2.3 Les paramètres d'équation d'état broyeur-bâche.	45
Tableau 3.1 La différence entre modèle "ARX" et modèle "OE".....	67

Introduction générale

L'analyse de la prédiction, de la surveillance, de la commande, et / ou de l'optimisation du système nécessite un modèle mathématique du système réel. En l'absence de celle-ci, Il est nécessaire d'effectuer son identification lorsque nous disposons des mesures expérimentales en temps réel des paramètres physiques. L'identification [7], [8], [9], [13], [14], [15], [16], [17], [20], [21], [25], [26] des systèmes ait été largement utilisée dans de nombreux domaines, parmi lesquels nous trouvons les systèmes mécaniques, les systèmes biologiques et les systèmes environnementaux.

L'identification consiste à construire des modèles mathématiques de systèmes dynamiques basés sur les données observées des systèmes. Les modèles dynamiques de commande sont de deux sortes: Modèles non paramétriques (réponse en fréquence, réponse en échelon) et modèles paramétriques [4], [27], [30] (fonction de transfert, équations différentielles).

Dans la littérature, nous trouvons des techniques d'identification basées sur l'estimation des paramètres physiques telles que la méthode appelée N4SID [5], [22], [28], [29] qui est basée sur l'algorithme linéaire quadratique, cette technique est utilisée lorsqu'il s'agit de trouver une commande stabilisante qui vérifie des contraintes issues des critères de minimisation quadratiques. D'autres techniques sont évoquées par les chercheurs scientifiques comme l'identification sous espaces [5], [22], [28], [29] telles que la technique MOESP [5], [22], [29]; ces sous espaces sont identifiés à l'aide des algorithmes de classifications afin d'obtenir des sous modèles linéaires.

Dans ce contexte, nous avons choisis de mettre l'accent sur la technique de moindre carrée simple et récursive. Afin de trouver une meilleure estimation des paramètres, une synthèse de comparaison est réalisée entre les différentes techniques de moindre carrée.

En effet, la méthode des moindres carrés [10], [14], [15], [16], [17], [19] permet de comparer des données expérimentales, généralement entachées d'erreurs de mesure, à un modèle mathématique censé décrire ces données. La méthode des moindres carrés est une approche standard dans l'analyse de régression pour approximer la solution des systèmes indéterminés, c'est-à-dire des ensembles d'équations dans lesquelles il y a plus d'équations et plus d'inconnues. "Moindres carrés" signifie que la solution globale minimise la somme des carrés

des résidus faits dans les résultats de chaque équation unique (un résidu étant: la différence entre une valeur observée et la valeur estimée fournie par un modèle).

Les problèmes des moindres carrés se répartissent en deux catégories: les moindres carrés linéaires ou ordinaires et les moindres carrés non linéaires. Le problème linéaire des moindres carrés se produit dans l'analyse de régression statistique, il a une solution fermée. Le problème non linéaire est généralement résolu par un raffinement itératif; à chaque itération, le système est approximé par un système linéaire, et le calcul de base est donc similaire dans les deux cas.

Ensuite, l'identification récursive [8], [10], [14], [17], [18], [20], [23], est le nom des algorithmes d'estimation où les paramètres estimés sont mis à jour pour chaque nouvelle observation. La nécessité d'une identification récursive se produit lorsque nous voulons avoir une nouvelle estimation de paramètre après chaque nouvelle observation. L'identification récursive repose sur des algorithmes rapides où la charge de calcul et la mémoire requise n'augmentent pas avec le temps. L'idée clé est d'arranger le calcul de sorte que l'estimation obtenue pour N observations soit utilisée pour calculer l'estimation des observations $N + 1$. Nous traitons dans ce mémoire deux méthodes de moindre carrée, la première utilise des mesures entières qui sont traitées simultanément par la procédure d'ajustement tandis que la méthode récursive traite les observations séquentiellement dans le temps. La méthode récursive est donc adaptée aux applications en temps réel dans lesquelles les observations sont collectées séquentiellement dans le temps.

Afin d'obtenir une meilleure estimation linéaire sans biais en utilisant la méthode des moindres carrés, soit sous forme normale, soit sous forme récursive, le choix réaliste du modèle stochastique des observables est une question essentielle. Ceci décrit les propriétés statistiques des observables au moyen d'une matrice de covariance. La matrice de covariance des observables est relativement connue et exprimée comme une combinaison linéaire inconnue de matrices de cofacteurs connues pour la plupart des applications géodésiques. L'estimation des paramètres de co/variance inconnus est appelée composante de la variance d'estimation. Enfin et après l'estimation des paramètres du modèle "ARX" de système nous obtenons une fonction de transfert du système identifié, ensuite nous ferons une commande prédictive [1], [6], [24] linéaire à base de la fonction de transfert obtenue précédemment pour prédire le comportement du système.

Nous appliquons notre solution au niveau d'une installation du broyage-classification. D'abord il faut définir le broyage [2], [3], [7], [11], [19] et les classificateurs [7], [12]. Le processus de broyage est une opération de réduction de la taille souvent utilisée dans l'industrie minérale pour libérer les minéraux précieux des résidus. En effet, le processus de broyage représente près de la moitié des coûts d'exploitation totaux associés à l'exploitation minière, et la taille des particules du produit influence grandement le taux de récupération des minéraux précieux et le volume de rejet des résidus dans les processus subséquents. Il y a beaucoup des applications du broyage dans l'industrie agroalimentaire, voici quelques exemples : Industrie des céréales, Industrie fromagère, Industrie de la viande, Industrie de la pêche, Industrie des épices et des condiments, Industries du café et de la chicorée.

Les classificateurs séparent les particules grossières des particules plus fines et traditionnellement regroupés en classificateurs humides et secs. Les techniques de classification peuvent également être classées dans des classificateurs mécaniques et non mécaniques. Ensuite, en termes de forces exercées sur les particules, les classificateurs peuvent être classés en deux types principaux: les classificateurs gravitationnels et les classificateurs centrifuges.

En particulier, dans ce mémoire notre étude porte sur le classificateur hydrocyclone qui est un dispositif mécanique pour classifier, séparer ou trier des particules dans une suspension liquide basée sur le rapport de leur force centripète à la résistance de fluide.

Ce rapport de mémoire est organisé comme suit :

Le **premier chapitre** est consacré à la définition du processus de broyage et son approche énergétique et cinétique. En effet, nous abordons des notions fondamentales du processus de broyage. Le **deuxième chapitre** est consacré à étudier le système choisi pour notre application, il s'agit d'une installation broyage-classification où une présentation détaillé du processus est donnée. Ensuite, nous évoquons les techniques d'identification et estimation basée sur le moindre carré sont présentées dans le **troisième chapitre**. Afin de bien choisir le meilleur technique pour définir les paramètres de notre modèle, nous avons effectué une synthèse de comparaison entre les deux techniques récursives (dérivation et intégration) basé sur la technique du moindre carré. Le **dernier chapitre** est dédié à la présentation des résultats de simulation lors l'étude d'une installation de broyage- classification afin d'estimer ses paramètres, les différents résultats de simulation ont été obtenus grâce à Matlab.

L'objectif assigné à ce travail est de réaliser, en tant que premier objectif, une recherche bibliographique concernant le sujet de l'identification des systèmes dynamiques linéaires. Une synthèse de comparaison de différentes techniques d'estimation paramétriques est effectuée.

De plus, la réalisation d'un programme Matlab des techniques des moindres carrés proposées et les appliquer à un système réduit.

CHAPITRE 1 : LE PROCESSUS DE BROYAGE

1.1 Introduction	2
1.2 Fracture et mécanismes de rupture des matériaux	2
1.3 Le choix de types des broyeurs	9
1.4 Quantification du phénomène de broyage	13
1.5 Circuits de broyage – classification	22
1.6 Conclusion	31

CHAPITRE 1 : LE PROCESSUS DE BROYAGE

1.1 Introduction

L'opération du broyage consiste à réduire une matière à une dimension donnée, correspondant à son emploi, ou facilitant la séparation de constituants mixtes.

Il s'agit de diviser un solide, pour augmenter sa surface spécifique (surface développée de la poudre par unité de masse) et donc sa réactivité.

1.2 Fracture et mécanismes de rupture des matériaux

1.2.1 Physique de la fracture

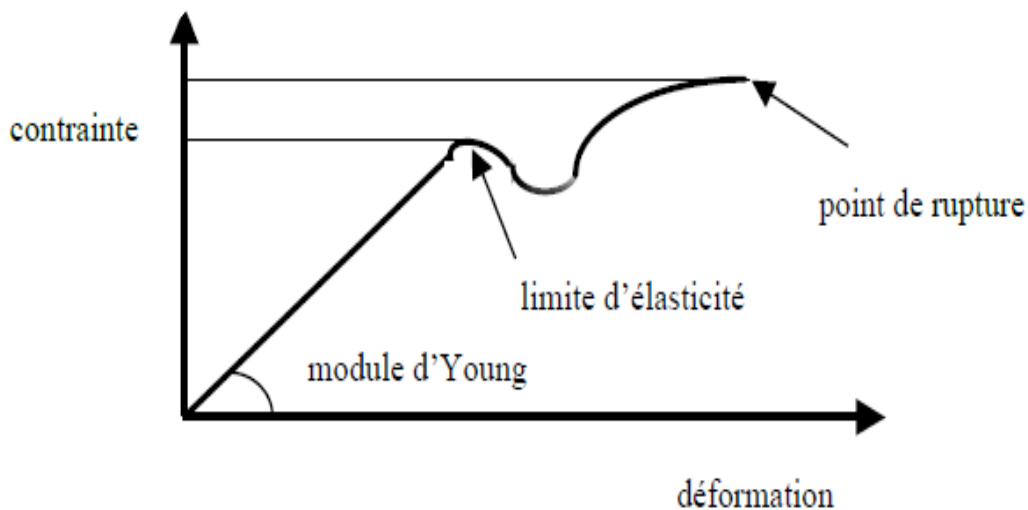


Figure 1.1. La déformation en fonction de la contrainte.

- Dans la première zone on peut définir le module de Young parce que la déformation est linéaire et donc élastique (réversible).
- Si on augmente la contrainte et que l'on dépasse un point appelé limite d'élasticité, on entre dans un domaine dit de plasticité, dans lequel les déformations sont irréversibles. ce domaine se termine par un point de rupture (fracture des matériaux dans ce point).

- Les courbes déformation-contrainte, permettent de classer les matériaux en trois grandes catégories:
 - Déformation élastique : matériau fragile.
 - Déformation élastique et plastique : matériau semi-fragile.
 - Déformation plastique : matériau ductile.

La Figure 1.1 montre une relation entre les propriétés des matériaux. L'axe des abscisses est le rapport E/Y (limite d'élasticité/ module de Young) et l'axe des ordonnées est le rapport H/Y où H est la dureté du matériau. $\Phi = H/Y$ est appelé facteur de contrainte, et il représente le degré de ductilité. Ce facteur vaut 1 pour les matériaux élastiques et il dépasse 3 pour les matériaux ductiles.

Le tableau suivant représente les propriétés des matériaux en fonction des paramètres H/Y et E/Y .

Tableau 1.1. Propriétés des matériaux et mode de broyage.

Déformations	Propriétés des matériaux	H/Y	E/Y
Élastique	Fragile	1.5-3.0	10-100
Élastique et plastique	semi-fragile	3-3.5	100-200
Plastique	Ductile	> 3.5	> 200

1.2.2 La fragmentation

La fragmentation des solides est une opération de réduction par un procédé industriel ou de laboratoire des matières solides en éléments ou particules de taille inférieure et de granulométrie déterminée. Différentes opérations mécaniques sont utilisées pour la fragmentation des solides:

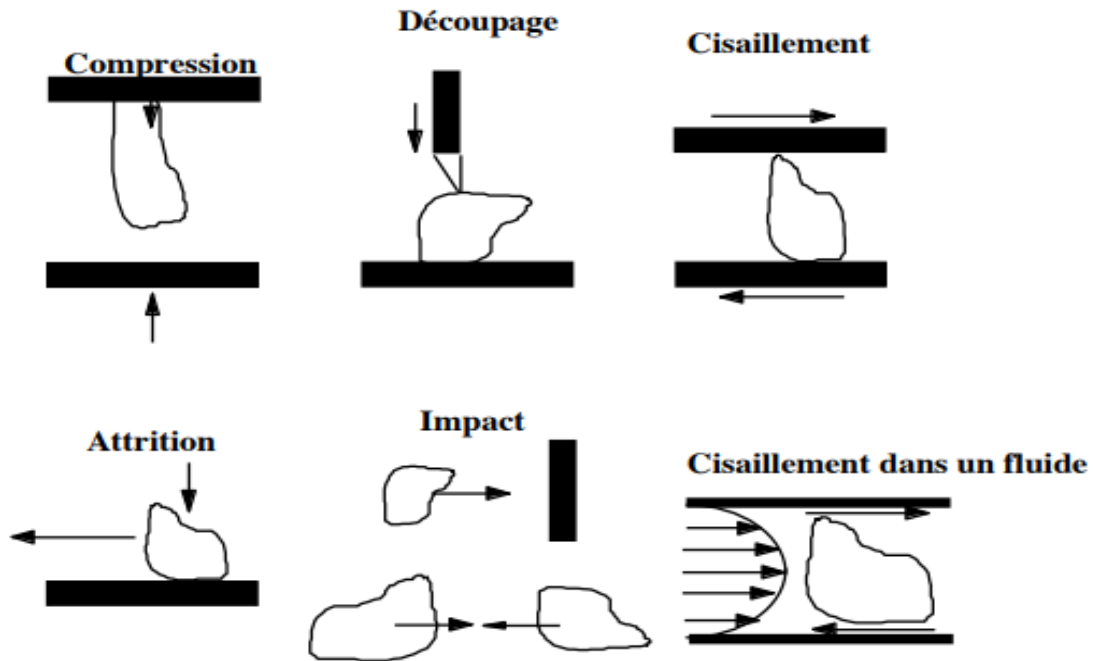


Figure 1.2. Les différents modes de fragmentation.

Le tableau suivant représente la granulométrie finale de la matière pour chaque opération de fragmentation.

Tableau 1.2 La granulométrie finale de la matière de chaque opérations.

Technique	Granulométrie finale de la matière			
	Ultra fin 10 μm	Fin 100 μm	Moyen 1 mm	Grossier 10 mm
découpage et cisaillement				Broyeur à couteaux
			Emoteur	
Impacts	Broyeurs à jets d'air	Broyeurs universels		Broyeurs à marteaux
Attrition	Broyeurs à Disques	Broyeurs à colloïdes		
Compression ou l'écrasement			Broyeur à cylindres	Broyeur à mâchoires

Objectifs de la fragmentation

Le but de la fragmentation est de conduire une taille de particule acceptable pour une utilisation spécifique et pour un traitement ultérieur à appliquer. Dans le traitement du minerai, la fragmentation vise également à conduire à une libération satisfaisante de différents minéraux pour mieux effectuer l'opération de séparation.

Mécanismes de fragmentation

L'abrasion: consiste en une érosion de la surface des particules ; elle génère deux grandes populations : la première de taille voisine de la particule abrasée, la seconde constitué par les

fragments arrachés étant une population de particules beaucoup plus fines que la population de départ.

Désintégration: résulte d'un apport énergétique suffisamment intense pour engendrer une contrainte qui dépasse largement le point de fracture. Les particules ainsi générées sont de petite taille devant celle de la particule mère et la distribution de taille de ces fragments est très étalée.

Le clivage: engendre la production de particules du même ordre de grandeur que la particule mère, il résulte d'un apport énergétique juste suffisant à la propagation de fractures préexistantes dans le matériau traité.

Les conditions opératoires

A chaque cycle, l'échantillon subit un broyage très court pour se rapprocher le plus possible de la situation où chaque grain subit une seule fragmentation. Prenons l'exemple du broyage d'une plaquette de 2-3,15 mm. Le critère de durée est que le passeur à la limite inférieure de la plaquette (par exemple 2 mm pour une plaquette de 2-3.15 mm) doit constituer environ 5% de l'échantillon initial.

À la fin d'un cycle, la passe de 2 mm est séparée de l'échantillon original et remplacée par une quantité égale de 2-3.15 mm. Lorsque les cycles sont équilibrés, c'est-à-dire lorsque la quantité de passage à 2 mm est approximativement constante, ces quantités sont collectées pour constituer le produit "équivalent" d'une simple fragmentation en régime permanent.

La distribution granulométrique de cette dernière constitue une colonne de la matrice de broyage.

Cette deuxième manipulation est plus longue que la précédente, en raison du nombre de cycles à effectuer. Cependant, il est beaucoup plus rigoureux parce que l'analyse finale de la taille des particules concerne un produit ayant la même composition minéralogique que l'alimentation de l'usine.

Influence sur les propriétés d'usage

La fragmentation génère une réduction de taille, convient de voir que les opérations de broyage mises en œuvre pour atteindre cette fin incitent également des changements significatifs dans d'autres propriétés: structure, forme des particules, état de surface, propriétés physicochimiques chimiques. Ces transformations s'expliquent par le fait que l'énergie fournie mécaniquement lors de la rectification augmente l'énergie libre du matériau activable. Le système devient transitoirement instable et l'énergie peut être dissociée par des transformations de nature physico-chimique.

Les influences du broyage sur les propriétés d'utilisation sont:

- Modification des propriétés de surface.
- Modification des propriétés massiques - Amorphisation, mécano-chimie, Hyper solubilité.

1.2.3 Caractéristiques des matériaux à broyer

Le choix d'un broyeur dépend principalement de trois facteurs :

- La nature de la matière première : est-elle abrasive, huileuse, dure, cassante.
- La distribution granulométrique du produit que l'on cherche à obtenir.
- Le dimensionnement de l'unité industrielle : quantité et/ou débit.

La dureté : La dureté est la résistance du matériau à la propagation des fissures. Cette propriété est représentée dans l'échelle de Mohs.

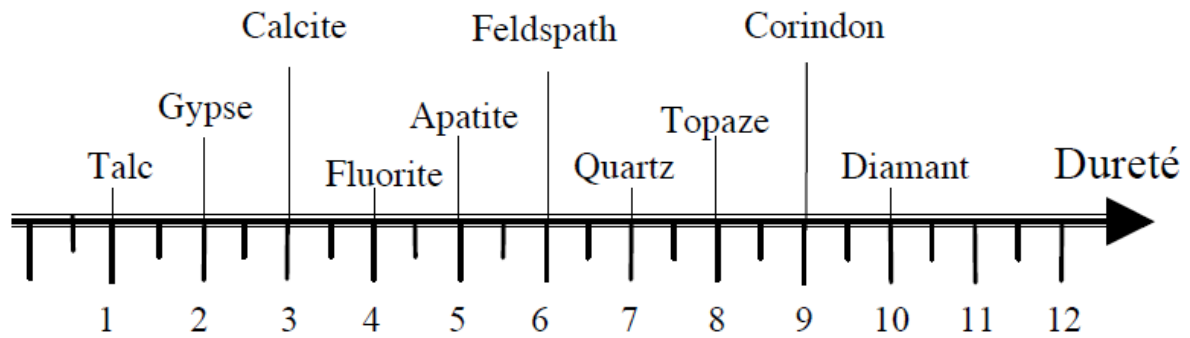


Figure 1.3. Echelle de dureté de Mohs.

Adhésivité : L'adhésivité traduit l'aptitude des particules à se coller entre elles ou aux parois du broyeur.

Abrasivité : L'abrasivité est l'aptitude d'un matériau à user une surface.

Forme : La forme, ou plus généralement la structure des particules, joue un rôle important dans les processus de broyage. En effet, les propriétés d'utilisation des particules peuvent être liées à leur forme; il faudra alors choisir le type de broyeur ayant le mode d'action approprié pour obtenir une forme donnée de particules.

Distribution de taille : La distribution de taille des particules à broyer joue un rôle fondamental dans le choix d'un broyeur, il sera particulièrement nécessaire d'envisager plusieurs étapes de fragmentation si le produit à broyer présente une distribution de tailles étalée.

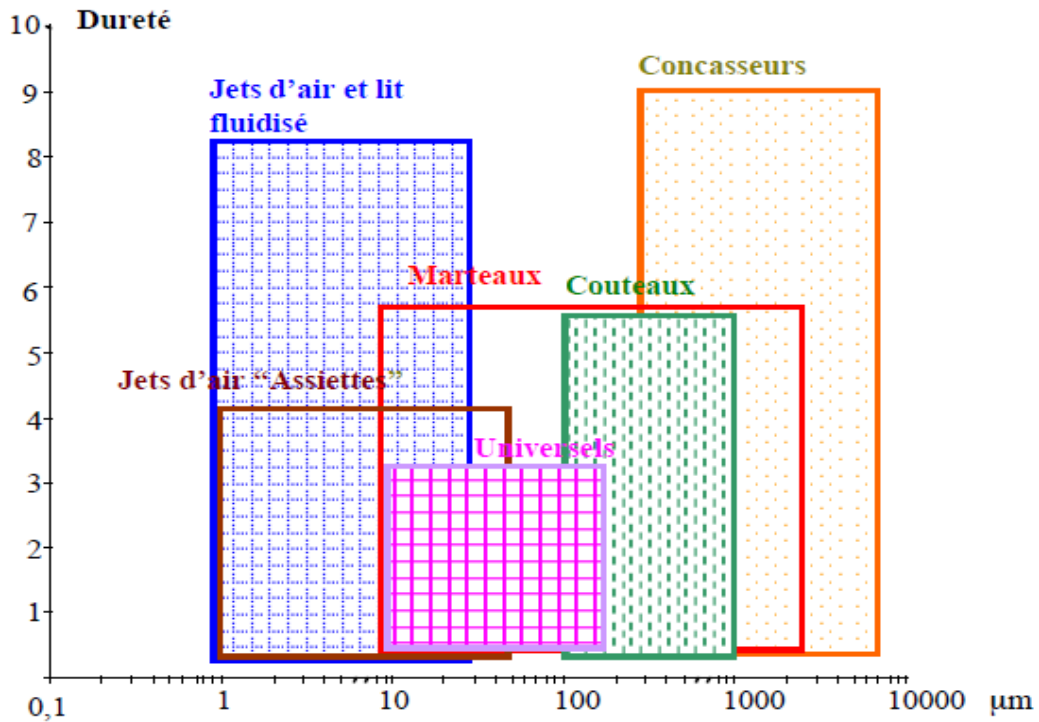


Figure 1.4. Les différents types de broyeur en fonction de la dureté et de la taille du produit à obtenir.

1.3 Le choix de types des broyeurs

Le choix d'un broyeur se fait en deux temps :

- La première étape, il est préférable de déterminer les types de dispositifs appropriés en fonction de la taille des particules désirées à la sortie de l'opération et de la dureté du matériau à broyer.
- La seconde étape, on affine la sélection en introduisant les contraintes spécifiques du produit traité et du secteur industriel.

a) Broyeurs à couteaux

- Les broyeurs à couteaux sont utilisés pour broyer les matériaux visqueux qui ne peuvent être affinés sous l'effet de l'impact ou du frottement.

- Dans un broyeur à couteaux, l'échantillon est placé dans une chambre de broyage, où il est affiné entre des couteaux en rotation et des couteaux fixes.
- Le matériau qui dispose d'une taille suffisamment fine quitte la chambre de broyage par le biais d'une tamiseuse.
- Les tailles obtenues sont généralement de l'ordre de 1 à 6 mm.

b) Broyeurs à marteaux

- Les broyeurs à marteaux sont utilisés pour broyer des matériaux tendres à moyennement durs.
- Ils sont conçus pour traiter de gros débits avec un minimum d'entretien.
- Les broyeurs à marteaux sont particulièrement adaptés pour broyer très finement des matériaux grossiers avec un gros débit.
- la vitesse périphérique des marteaux (20 à 60 m.s⁻¹).
- les tailles de particules en sortie de 90 à 850 µm pour des débits de 15 t.h⁻¹.

c) Broyeurs universels

- Ils s'utilisent pour broyer les résidus végétaux dans l'agriculture, les surfaces publiques, dans les vergers et dans les vignes et pour nettoyer les pâtures.
- Le fonctionnement silencieux est assuré par le rotor équilibré électroniquement avec une répartition de marteaux brevetée.
- Cette répartition assure moins de vibrations, des contraintes de flexion et des déformations minimales, ce qui prolonge la durée de vie du broyeur.
- les tailles de particules en sortie est fin (500 à 1000 µm) à très fin (50 à 150 µm).

d) Broyeurs équipés d'un dispositif de classification intégré

- un équipement fréquemment mis en œuvre est le couplage d'un broyeur à marteaux avec un dispositif de classification à air intégré au broyeur pour l'obtention de distributions granulométrique resserrée.

- Le produit à broyer est introduit dans la zone de broyage sur un rotor à marteaux ou à broches dans ce type de broyeurs.
- La capacité de production est fonction du débit d'air et de la taille requise en sortie du broyeur.
- Ce type d'appareil est en particulier intéressant pour les produits thermosensibles, et des minéraux.
- Les tailles des granulométries finale est de l'ordre de 30 μm .

e) Broyeurs à jets de fluide

- Ce broyeur à jets innovant est capable de broyer finement tous types de produits secs avec pratiquement aucune contamination. Par ce concept spécifique de broyage, la réduction granulométrique se fait de manière autogène. Seuls les jets de gaz créent l'énergie de broyage. Il n'y a donc pas d'usure d'outils.
- Le broyeur AFG à lit fluidisé et à jets d'air opposés est utilisé pour la fabrication de poudres très fines à distribution très resserrée pour l'obtention de finesses allant de 5 μm à 200 μm .

f) Broyeurs à cylindres

- Le broyeur à cylindres permet la réduction grossière ou primaire de matières dures, abrasives, éventuellement collantes.
- La matière est écrasée entre deux cylindres, en rotation lente ou rapide, lisses ou garnis de dents ou de rainures, sélectionnées suivant la nature du produit et le broyage visé.
- L'écartement entre les cylindres est fixé suivant la granulométrie recherchée. Le broyage génère très peu de fine.

g) Broyeurs à meules

- Les broyeurs à meule peuvent être considérés des machines universelles si l'on tient compte de toutes les actions qu'elles accomplissent sur la matière

première et sur les additifs, notamment l'écrasement des masses plastiques, la rupture des masses dures et l'extrusion à travers les grilles.

- Ils offrent en outre la possibilité de régler l'humidité du mélange.

Pour résumer, le choix du broyeur dépendra de la taille désirée des matières selon le tableau suivant :

Tableau 1.3. Les différents types de broyeur en fonction de la taille du produit à obtenir.

Taille (µm)	Broyeur à couteaux	Concasseurs	Broyeurs universel et à broches	Broyeurs à marteaux	Broyeurs mécaniques à classificateur intégré	Broyeur à Cylindres	Broyeur à jets de fluides	Broyeurs à corps broyants en voie sèche	Broyeurs à corps broyants en voie humide
> à 5000	+	+	-	-	-	-	-	-	-
1000 à 5000	+	+	+	-	-	-	-	-	-
500 à 1000	+	+	+	+	-	-	-	-	-
150 à 500	+	-	+	+	+	-	-	-	-
50 à 150	-	-	+	+	+	+	-	-	-
10 à 50	-	-	+	+	+	+	+	+	-
< à 10	-	-	-	-	-	-	+	+	+
< à 1	-	-	-	-	-	-	-	-	+

1.4 Quantification du phénomène de broyage

Le choix d'un schéma spécifique du circuit de broyage dépend de deux facteurs :

- Les caractéristiques recherchées pour le produit broyé.
- La capacité de l'installation.

Laquelle installation, peut s'effectuer soit en conditions humides ou sèches. Avant d'étudier le contrôle d'un tel procédé, il importe de faire une étude approfondie de l'influence des variables et des lois qui relient ces variables afin d'établir une relation claire de leur évolution. Ce qui revient, entre autres, à rechercher la définition physique des paramètres s_i , b_i et dont dépend le modèle de connaissance du système. Malgré qu'il soit utilisé depuis des décennies, le procédé de broyage n'a pas encore une base théorique prononcée et les connaissances de son comportement dynamique sont encore établies de façon empirique.

Les études expérimentales, les tests standards et de similitudes ont permis le développement des modèles empiriques de broyage en batch. En effet, pour réaliser la commande proposée du procédé, la formulation d'un modèle interne du broyeur et la simulation des phénomènes de broyage en condition dynamique (broyage en continu), passent avant tout par le développement de la théorie des différentes lois fondamentales.

Rappelons que même si les travaux des uns et des autres tentent d'expliquer l'une ou l'autre des deux principales technologies du procédé (broyage en discontinu ou en continu), il n'en demeure pas moins que le dénominateur commun de ces technologies, que sont les principes de la fragmentation de la matière, reste la base des concepts de la modélisation des broyeurs.

Cependant, il s'avère nécessaire de comprendre la nuance entre l'utilité des formules mathématiques, et des lois découlant des expériences et leur fondement théorique afin d'éviter les applications en dehors de leur vrai domaine de validité. C'est dans cette optique que, nous citons entre autres, différentes approches qui sont utilisées pour estimer des données :

- Loi de Von Rittinger.
- Loi de Kick.

- Loi de Bond.
- La loi de Gaudin-Schumann.
- La loi de Rosin-Rammler.

1.4.1 Approche énergétique

La théorie de la fragmentation est basée sur la relation entre l'énergie consommée et la taille des particules du produit obtenu à partir d'une taille donnée de l'aliment. Dans ce qui suit, E est l'énergie de broyage requise par unité de masse au sol, x est une caractéristique granulométrique, n un exposant exprimant la taille du processus, K est une constante caractérisant le matériau à broyer dont les unités équilibrent l'équation, voici les trois lois principales de la théorie de broyage:

Loi de Von Rittinger

Elle établit que l'aire de la nouvelle surface produite par le broyage est directement proportionnelle à l'énergie nécessaire au broyage.

Von Rittinger postule que l'énergie consommée E est directement proportionnelle à la quantité de surface nouvellement créée. Il écrit alors la relation :

$$E = K \left[\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1} \right] \quad (1.1)$$

d_1, d_2 : L'état granulométrique de la matière avant et après broyage.

K : Une constante caractéristique de la matière.

Loi de Kick

Kick, pour sa part, émet l'énergie nécessaire pour la fragmentation d'un matériau homogène est proportionnelle à la variation de volume. L'équation qu'il propose est la suivante :

$$E = K \ln \left(\frac{d_1}{d_2} \right) \quad (1.2)$$

d_1, d_2 : L'état granulométrique de la matière avant et après broyage.

K : Une constante caractéristique de la matière.

Loi de Bond

Sur la base de nombreux résultats expérimentaux, Bond (1952) propose de relier l'énergie nécessaire pour fragmenter des particules de taille d à la quantité $\frac{1}{\sqrt{d}}$. Cela se traduit pour une variation de taille de d_1 à d_2 par une relation de la forme:

$$E = K \left(\frac{1}{\sqrt{d_2}} - \frac{1}{\sqrt{d_1}} \right) \quad (1.3)$$

d_1, d_2 : L'état granulométrique de la matière avant et après broyage.

K : Une constante caractéristique de la matière.

Limites et domaine de validité

Les lois de Von Rittinger, Kick et Bond seront rassemblées par Charles (Charles, 1957) qui constate que les relations établies entre l'énergie E et l'état granulométrique x par ces trois auteurs sont des formes particulières d'une même équation différentielle:

$$dE = -K \frac{dx}{x^n} \quad (1.4)$$

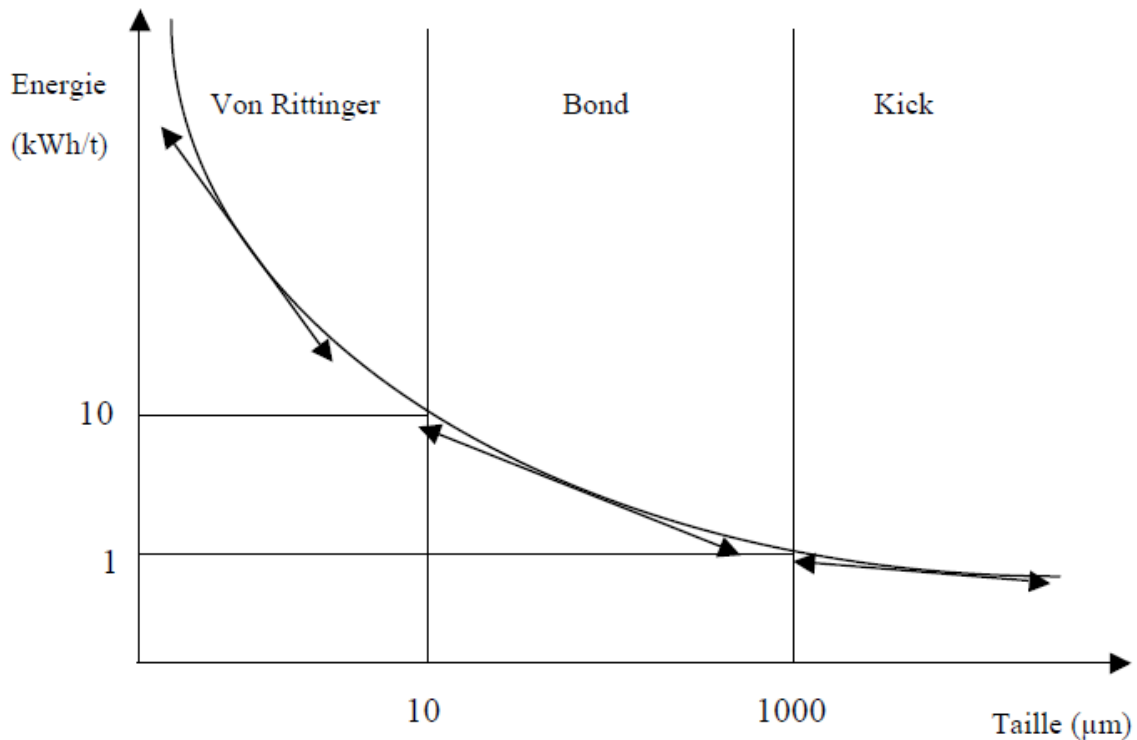


Figure 1.5. Validité des lois énergétiques.

L'exposant n de x prenant respectivement pour les lois de Von Rittinger, Bond et Kick les valeurs 2, 1 et 5.

Limitations de l'approche énergétique

Les relations précédemment décrites entre l'énergie de broyage et la taille des particules sont intéressantes, mais elles ne reflètent pas entièrement les réalités industrielles. En fait, la part d'énergie utilisée pour produire de nouvelles surfaces pendant du broyage est très faible. Dans certains cas, la variation de l'énergie spécifique n'a pratiquement aucun impact sur la fracturation, ou du moins ses effets sont "masqués" par d'autres phénomènes consommant de l'énergie.

De plus, si certains de ces phénomènes sont théoriquement mesurables, comme les pertes dues à la dissipation thermique (jusqu'à 85% de l'énergie totale), aux transmissions mécaniques (frottement, bruit), d'autres sont difficiles à évaluer: frottement entre particules sans broyage, pertes d'énergie potentielle et cinétique, déformations élastiques et plastique des particules et

production de bruit. Et, par exemple, la plupart des pertes d'énergie se sont dissipées sous forme de chaleur, car cette dernière ne joue pratiquement aucun rôle dans la fracturation.

On peut donc exprimer toute opération de comminution par la relation suivante :

Grosse particule + énergie \longrightarrow petites particules + chaleur + son

En résumé, toutes ces théories sont sujettes à la critique parce qu'elles supposent que l'énergie ne dépend pas des états initiaux et finaux. Ou cette énergie dépend également du temps de séjour de la charge dans le broyeur. Les théories cinétiques permettent de prendre en compte tous ces paramètres, grâce à l'étude des phénomènes physiques dans l'opération de fragmentation.

Lois de distributions granulométriques

La loi de Gaudin Schumann

$$P(d) = 1 - \left(\frac{1-d}{d_{moy}} \right)^n \quad (1.5)$$

P : Le passant cumulé à la maille de taille d .

d_{moy} : La taille de la plus grosse particule.

n : Un paramètre de dispersion de la distribution.

La loi de Rosin Rammler

$$R(d) = 1 - e^{\left(\frac{-d}{d_{63,2}} \right)^n} \quad (1.6)$$

R : est la fraction cumulée retenue à la maille de taille d .

$d_{63,2}$: La taille de la maille laissant passer 63,2% de la masse de produit.

n : Un paramètre de dispersion de la distribution.

- ✚ Les représentations de type “Gaudin Schumann” mettent en évidence la partie fine de la distribution et présentent donc un intérêt pour le suivi des opérations destinées à la production de particules fines.
- ✚ Inversement, les représentations de type Rosin Rammler, mettent l’accent sur les grandes tailles et seront donc utiles à la visualisation des opérations destinées à la suppression des grosses particules.

1.4.2 Approche cinétique

L'étude cinétique des bilans matières a été introduite par BASS (1953). Pour cet auteur, l'évolution dans le temps de la distribution granulométrique est représentée par des équations similaires à celles qui régissent la cinétique des réactions chimiques de décomposition. Ces équations expriment le bilan matière dans chaque fraction granulométrique. De nombreux auteurs ont approfondi les idées de BASS mais c'est surtout l'équation d'AUSTIN (1966) qui s'est avérée applicable dans la modélisation.

Il considère que la variation de poids d'une classe de taille de particules est proportionnelle à l'abondance de celle-ci. Il admet ainsi une approche du phénomène par une loi cinétique de premier ordre.

Cette approche consiste à analyser l'effet de broyage en séparant le processus de fragmentation en deux fonctions:

- Une fonction de **sélection** $S(x)$ qui définit le pourcentage de grains de dimension x qui par unité de temps sont broyés.
- Une fonction de **broyage** $B(x, y)$, qui définit la distribution granulométrique des fragments obtenus, c'est-à-dire le pourcentage de grains de dimension y qui étant broyés, donnent des grains de taille inférieure à x , avec $y \geq x$.

Equation de bilan de population en broyage discontinu - cinétique de broyage

L'approche par bilan de population est basée sur la répartition des particules en classes de tailles :

$$\frac{d_{mi}}{dt} = -s_i + \sum_{j=1}^i s_i b_{i,j} m_j \quad (1.7)$$

$$b_{n,n} = 1 ; b_{i,i} = 0 ; s_n = 0$$

Où :

m_i : La fraction massique de produit dans la classe i , t , le temps.

s_i : La valeur de la fonction de sélection pour la classe i .

$b_{i,j}$: La valeur de la fonction de broyage quantifiant la proportion des éléments fragmentés de la classe j qui se retrouvent dans la classe i .

- la fonction s_i permettre d'évaluer la quantité de particules broyées entre t et $t + dt$.
- la fonction $b_{i,j}$ permettre de décrire la répartition entre les différentes classes des fragments obtenus.

✚ L'approche actuelle consiste à déterminer directement les fonctions S et B lorsque cela est possible par du broyage mono classe.

Broyage en continu - Couplage de la cinétique de broyage et d'un modèle d'écoulement

Dans le domaine de la recherche, le broyage continu est généralement considéré comme un cas compliqué, qui pourrait être décrit par des équations cinétiques de broyage discontinu.

Dans ce contexte, divers auteurs, dont AUSTIN (1966), ont tenté d'appliquer le bilan matière à une tranche géométrique infinitésimale de la chambre de broyage. L'équation ainsi obtenue caractérise l'évolution de la charge traversant le broyeur.

Pour pouvoir modéliser des opérations de broyage en continu:

- Il faut introduire la notion de distribution de temps de séjour pour prendre en compte l'écoulement des particules dans le broyeur.
- il est facile d'imaginer que la réduction de taille que va subir une particule dépend du temps qu'elle va passer dans la zone où s'effectue le broyage.
- On définit ainsi une fonction $E(t_s)$ assimilable à la densité de probabilité du temps de séjour t_s dans le courant de particules issues de l'appareil.

Exemple:

Considérez le modèle des filets parallèles, nous pouvons représenter l'écoulement des particules par une infinité de filets indépendants se comportant comme un élément de broyeur en écoulement piston (figure I.6). Dans ces conditions, le temps de séjour t_s est le même dans toutes les particules natives d'un même filet dans le broyeur et il est donc possible de caractériser la distribution des tailles de particules native de ce filet par la fraction cumulée retenue $R(x, t_s)$.

$R(x)$ correspond à la distribution granulométrique exprimée en fraction massique cumulée retenue, c'est-à-dire le pourcentage massique des particules de taille supérieure à x .

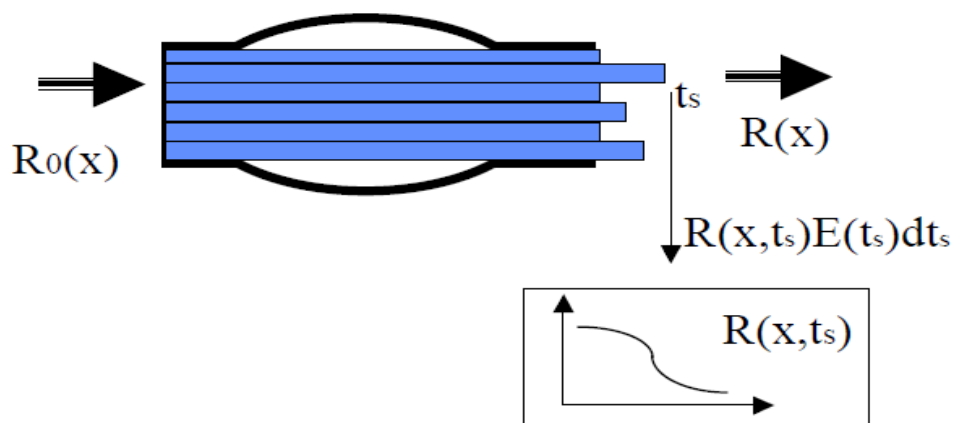


Figure 1.6. Distribution des tailles de particule.

Chaque filet contient la fraction de l'écoulement $R(x, t_s) \cdot E(t_s) \cdot dt_s$ à la sortie du broyeur, et pour déterminer la distribution de taille de l'ensemble du produit issu du broyeur en régime permanent, il faut faire une intégration sur l'ensemble des temps de séjour :

$$R(x) = \int_0^{\infty} R(x, t_s) E(t_s) dt_s \quad (1.8)$$

t_s : Temps de séjour.

$E(t_s)$: Fonction de distribution des temps de séjour.

$R(x, t_s)$: Distribution granulométrique cumulée retenue obtenue dans la fraction du courant de sortie ayant eu un temps de séjour t_s .

1.4.3 Etude comparative

Avantages et inconvénients de l'approche énergétique

Le principal inconvénient de l'approche énergétique est que son application la plus directe est une méthode de dimensionnement et non un modèle. En particulier, l'utilisation de cette méthode dans la modélisation ne donne qu'un seul point de la distribution granulométrique de sortie.

Les hypothèses qui permettent de calculer le reste de la courbe sont nécessairement restrictives. De plus, le concept de transport de matière dans les dispositifs est ici complètement ignoré. D'autre part, la méthode de conception de BOND (1952) permet de caractériser l'influence de certains paramètres de fonctionnement tels que les dimensions du broyeur, la charge de broyage, la vitesse de rotation, etc.

Avantages et inconvénients de la proche cinétique

En premier lieu, les théories cinétiques permettent de traiter de manière logique et mathématique la conception et la simulation de circuits de broyage par une explication des phénomènes physiques ; alors que l'approche énergétique reste totalement empirique.

Cependant, pour appliquer les équations de conservation de la matière aux problèmes de simulation et de dimensionnement, il est indispensable de connaître les relations de dépendance entre les paramètres cinétiques ($b_{i,j}, s_i$) et des paramètres "techniques", comme les dimensions du broyeur, la vitesse de rotation, etc...

Malheureusement, rien n'apparaît dans la structure des modèles cinétiques qui permettrait la prédiction a priori de ces relations de dépendance. C'est pourquoi certains auteurs se sont efforcés de définir ce type de relations, principalement par l'analyse de données de laboratoire (AUSTIN et al. 1980).

1.5 Circuits de broyage – classification

- Les opérations de broyage sont couplées avec des opérations de classification qui permettent notamment de recycler les particules trop grossières.
- Cette classification permet également de séparer des particules de nature physico-chimiques différentes avec les différentes particules issues du grain de blé (Figure 1.7).

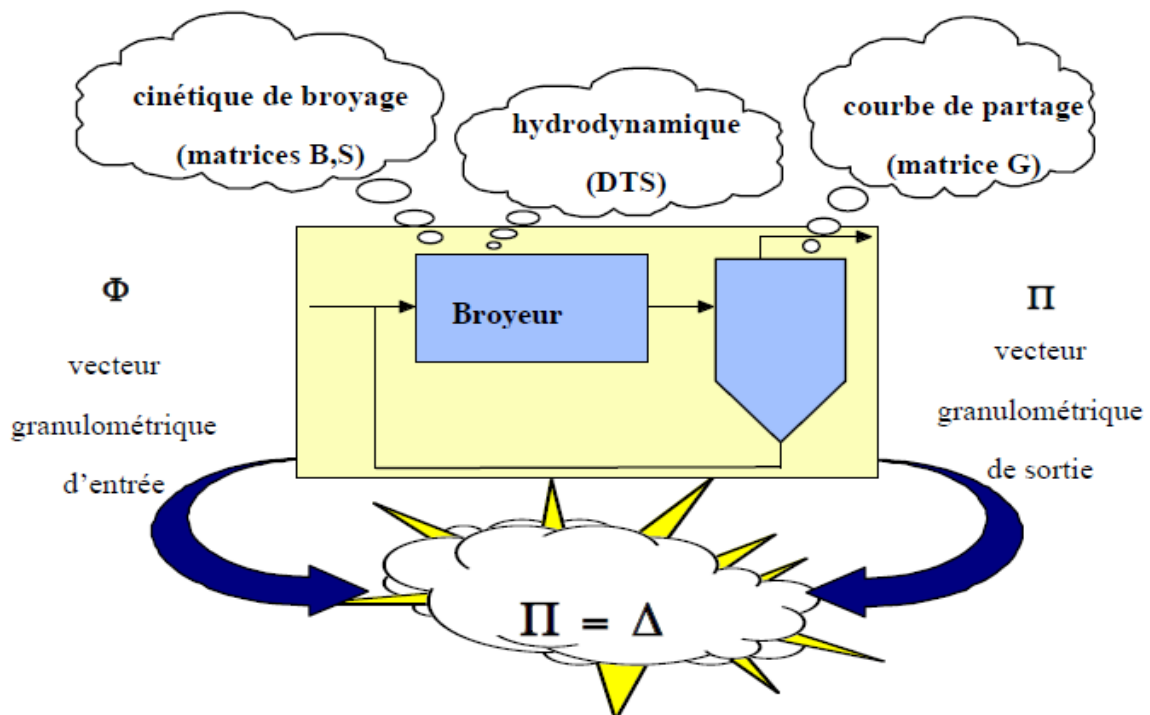


Figure 1.7. Couplage Broyage-Classification.

S : La matrice de sélection.

B : La matrice de broyage.

G : Une matrice diagonale correspondant à la courbe de partage du classificateur utilisé (matrice classification).

A partir de ces trois matrices on peut déterminée la distribution granulométrique en sortie du circuit par le biais d'une matrice triangulaire inférieure à Δ .

L'estimation des fonctions B et S est effectuée par minimisation d'un critère des moindres carrés des différences entre les distributions granulométriques observées lors des essais et les valeurs estimées par intégration de l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = -s_i x_i(t) + \sum_{j=1}^i s_j b_{i,j} x_j(t) \quad (1.9)$$

$x_i(t)$: Fraction des particules de dimension " i ".

s_i : Fonction de sélection représentant la constante de vitesse de disparition de " i ".

$b_{i,j}$: Fonction de broyage, représentant la fraction des particules " i " produites par le broyage des particules " j ".

La première solution de l'équation (1.9) en utilisant une fonction de transfert matricielle permettant de passer du vecteur de granulométrie de l'entrée au vecteur de granulométrie de la sortie. Dans la solution matricielle le vecteur de distribution granulométrique de la sortie P d'un broyeur continu ou discontinu peut être représenté par une multiplication de la matrice de broyage G avec le vecteur granulométrique de l'alimentation F :

$$P = GF \quad (1.10)$$

La matrice G est diagonalisée :

$$G = ZVZ^{-1} \quad (1.11)$$

$$\text{Avec : } \begin{cases} Z_{i,j} = 0 & , j > i \\ Z_{i,j} = 1 & , j = i \\ Z_{i,j} = \sum_{k=1}^{i-1} \frac{b_{i,j} S_k}{S_i - S_j} Z_{i,j} & , j < i \end{cases} \quad (1.12)$$

La matrice V pour un broyeur continu avec un écoulement piston ou un broyeur discontinu est la suivante:

$$V_{ii} = e^{-\tau S_i} \quad (1.13)$$

Le temps de séjour moyen du broyeur continu ou le temps de broyage en discontinu est représenté par τ . Dans le cas d'un broyeur continu avec un régime de mélangeur parfait, la matrice V est donnée par:

$$V_{ii} = \frac{1}{1 + \tau S_i} \quad (1.14)$$

Les éléments $B_{i,j}$ de la matrice B et les éléments S_i du vecteur S . Une façon de réduire le nombre de paramètres est de considérer la fonction de broyage B comme normalisable. On considère alors que la forme de la courbe de production de fractions fines à partir d'une fraction mère est indépendante de la dimension de la fraction mère. Les équations des fonctions paramétriques pour représenter B (normalisée) et S en fonction de la dimension des particules sont:

$$B_{i,j} = b_1 \left(\frac{x_i}{x_j} \right)^{b_2} + (1 - b_1) \left(\frac{x_i}{x_j} \right)^{b_3} \quad (1.15)$$

$$b_{i,j} = B_{i-1,j} - B_{i,j} \quad (1.16)$$

$$\ln(S_i) = s_1 + s_2 \ln(x_i) + s_3 [\ln(x_i)]^2 + s_4 [\ln(x_i)]^3 \quad (1.17)$$

Où :

x_i : Dimension des particules " i ".

x_j : Dimension des particules d'une fraction mère " j ".

1.5.1 Techniques d'estimation des paramètres

Mesure de la fonction de broyage

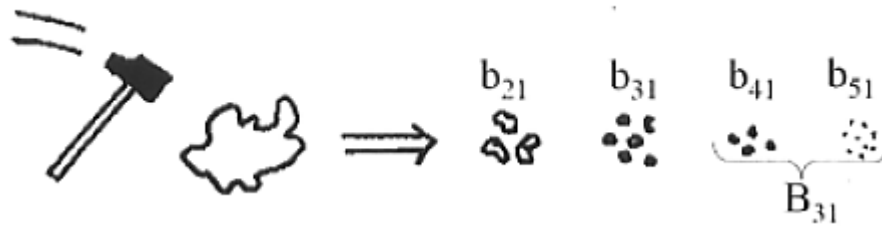


Figure 1.8. Représentation stœchiométrique de la fragmentation.

La fonction de broyage cumulée $B_{i,j}$ représente la fraction de matériel provenant de la classe j qui est plus fine que la dimension i . La fonction de broyage correspond à une matrice $m \times m$, où m est le nombre de classes de dimension considérées. Étant donné que le broyage d'une particule de la classe j ne produit pas de particules égales ou plus grossières, les éléments de la diagonale et au-dessus d'elle sont nuls, c'est-à-dire que la matrice de B est une matrice diagonale inférieure. Si $b_{i,j} = b_{i+1,j+1}$, alors on dit que la fonction B est normalisable.

Hypothèse de la "normalité" de la fonction de broyage

On admet qu'une distribution $b_{i,j}$ est connue à partir de la seule distribution b_{i1} correspondant aux produits issus du broyage de la fraction la plus grossière grâce à la relation:

$$b_{i,j} = b_{i-1} - b_{i,j}$$

La signification physique de cette hypothèse est que la distribution granulométrique après fragmentation d'une particule est indépendante de sa taille initiale. Cette hypothèse restreint donc le nombre d'inconnues de la distribution b_{ij} : chaque colonne de la matrice B se déduisant de la précédente par décalage d'une ligne, il suffit de connaître la première colonne. Il faut noter qu'alors, si pour la première colonne ($j = 1$), on a bien $\sum_{i=1}^n b_{i1} = 1$, pour les autres colonnes ($j \neq 1$), cette relation n'est plus respectée. On les normalise alors, de façon à ce que $\sum_{j \neq 1} b_{i,j} = 1$.

Forme analytique de la fonction de broyage

Il est intéressant, surtout dans une optique de programmation de modèles, de caractériser les fonctions cinétiques par un nombre limité de paramètres. Pour cela, plusieurs relations ont été proposées, pour représenter une colonne de la matrice de broyage.

BROADBENT et CALLCOTT (1956) utilisent :

$$B(x, y) = \frac{1 - e^{-\frac{x}{y}}}{1 - e^{-1}} \quad (1.18)$$

AUSTIN (1984) a constaté que les valeurs de B_{ij} peuvent être régressées par une fonction constituée de la somme de deux droites sur un diagramme bi logarithmique :

$$B_{ij} = \varphi_j = \left(\frac{x_i - 1}{x_j} \right)^\gamma + (1 - \varphi_j) \left(\frac{x_i - 1}{x_j} \right) \quad (1.19)$$

Avec : $0 \leq \varphi_j \leq 1$

Les paramètres φ_j , γ et β sont définis à partir des propriétés de la matière et des conditions de broyage.

La forme matricielle de la fonction de broyage est :

$$B_{i,j} = \begin{bmatrix} b_{1,1} & 0 & 0 & 0 & .. & 0 \\ b_{2,1} & b_{2,2} & 0 & 0 & .. & 0 \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} & 0 & .. & 0 \\ . & . & . & . & ... & 0 \\ . & . & . & . & ... & 0 \\ b_{n,1} & b_{n,2} & b_{n,3} & .. & .. & b_{n,n} \end{bmatrix}$$

Remarque

L'équation générale du broyage présentée dans la littérature ne tient pas compte des matériaux composites contenant deux ou plusieurs types de minéraux en proportion non négligeable.

Mesure de la fonction de sélection

La fonction de sélection S dépend du minerai et de l'équipement et décrit la cinétique (vitesse) du processus de broyage (également la probabilité de broyage). Elle correspond à la fraction de particules d'une classe donnée i broyée par unité de temps. Pour estimer la fonction de sélection dans le cas du broyage en discontinu, il est nécessaire d'échantillonner l'alimentation et le produit de décharge du broyeur considéré après différents temps de broyage. Ensuite, les échantillons sont analysés pour obtenir la distribution granulométrique des produits d'alimentation et de broyage. Les granulométries sont ensuite utilisées pour calibrer les modèles paramétrés des fonctions de broyage et de sélection. Pour un broyeur à opération continue il est également nécessaire de déterminer la distribution du temps de séjour de la matière par des tests de traçage.

La détermination expérimentale de la fonction de sélection nécessite des procédures complexes. En effet, il faut dans ce cas discrétiser doublement une fonction continue, dans le temps et la dimension des particules. Les principales méthodes utilisées pour déterminer expérimentalement les fonctions de sélection sont de trois types:

- la méthode par marquage.
- la méthode par substitution,
- la méthode par différence.

Forme analytique de la fonction de sélection

La forme la plus couramment adoptée pour la fonction de sélection est celle d'une fonction monotone de la forme :

$$S(x) = ax^\alpha \quad (1.20)$$

Où

a : Une constante dépendante des caractéristiques du broyeur et du matériel.

α : Le coefficient de la fraction de la taille produite.

Cette formulation présente l'avantage de la simplicité mais il est logique d'admettre que si les gros grains sont difficiles à casser, les particules très fines ne sont que très rarement fragmentées dans un broyeur, c'est-à-dire qu'une fonction de sélection n'est pas réellement monotone.

La forme matricielle de la fonction de sélection est :

$$S_i = \begin{bmatrix} S_1 & 0 & 0 & 0 & .. & 0 \\ 0 & S_2 & 0 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 0 & S_3 & 0 & .. & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & .. & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & .. & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .. & S_n \end{bmatrix}$$

Utilisation pratique des matrices S et B

- Les fonctions S_i et $b_{i,j}$ peuvent permettre un diagnostic du mécanisme de réduction de taille.
- Il est possible de relier notamment la fonction $b_{i,j}$ au mécanisme de broyage.

1.5.2 Calcul des paramètres cinétique à partir de données discontinues ou industrielles

Les travaux sur la détermination des matrices de broyage et de sélection font apparaître deux types de difficultés (AUSTIN, 1984). Les modes opératoires sont souvent complexes, surtout dans le cas de la fonction de sélection. Les valeurs de B et S , déterminées par des procédés discontinus, sont-elles encore valables dans le cas des systèmes continus ? C'est pourquoi des techniques de détermination indirecte par procédure d'optimisation informatique ont été élaborées.

Ces techniques sont basées sur le principe suivant : On dispose, pour des conditions données (distributions granulométriques d'entrée et caractéristiques techniques du broyeur à modéliser), d'une distribution granulométrique de sortie. On recherche les valeurs de S et/ou B qui permettront à un modèle choisi de prédire au mieux cette distribution.

Ces méthodes, outre l'économie de manipulations expérimentales, présentent l'avantage d'être applicables aux processus continus à l'échelle industrielle. Le principal inconvénient de celles-ci est qu'elles "obligent" les données à correspondre aux concepts du modèle proposé, et il n'est pas toujours possible de détecter si les hypothèses émises sont valides ou non.

Remarque

- Au sujet de la détermination des fonctions cinétiques B et S , la complexité des modes opératoires et leur difficulté d'application à des processus continus ont conduit à envisager des techniques de recherches mathématiques de ces paramètres.
- Un autre point important à souligner est que l'équation générale du broyage présentée dans la littérature ne tient pas compte des matériaux composites contenant deux ou plusieurs types de minéraux en proportion non négligeable.

1.5.3 Exigences de l'identification paramétriques

Tout modèle, pour être applicable, doit impliquer des paramètres mesurables, directement ou par des manipulations de laboratoire, ou calculable par une méthode aussi la plus précise possible. En effet, on rencontre très souvent dans la littérature des paramètres dont la méthode d'estimation est irréaliste. L'ensemble de méthodes pour déterminer les paramètres afin d'appliquer le modèle à un cas spécifique est appelé méthodologie de calibrage. Les installations en régime permanent sont des installations pilotes ou des unités industrielles.

La méthodologie n'est pas nécessairement la même pour les deux types d'installations. Si pour une unité de production, la collecte de données abondantes est possible, le principe même des essais pilotes exclut une méthodologie nécessitant de longues mesures sur le broyeur fonctionnant avec le minerai à traiter afin de calibrer le modèle. En effet, la simulation en usine pilote doit générer une économie de temps dans la recherche d'une configuration optimale, évitant le pilotage de configurations défavorables, rejetées par le calcul informatique. Dans ce cas, le modèle doit pouvoir être calibré à partir d'un seul ensemble de données, dérivé d'un échantillonnage minutieux d'une heure de fonctionnement en régime permanent.

Le modèle doit pouvoir rendre compte de la sélectivité du broyage, ce qui est généralement très important pour les procédés minéralurgiques. La principale raison à cela est que le but de la combinaison est de préparer les minéraux pour les opérations de séparation de la gangue et du concentré; par conséquent, un modèle de broyage doit prédire, en plus de la distribution granulométrique globale à la sortie du broyeur, la distribution des phases minérales. L'hypothèse générale de simplification est que chaque minéral est considéré indépendamment des autres (une distribution granulométrique par minéral).

Enfin, pour que le modèle soit ajusté à partir de données délibérément restreintes pour être non-artificiel, le nombre de paramètres « non déterminables expérimentalement » était limité à deux (par minéral dans le cas d'un broyage sélectif).

Cette restriction implique à nouveau des hypothèses simplificatrices dans la formulation du modèle. L'exactitude de ceux-ci dépend de la pertinence des hypothèses.

1.6 Conclusion

Parmi toutes les opérations unitaires d'obtention de poudres, le broyage est sans doute celui qui est le plus utilisé. Quoi de plus naturel quand on cherche à réduire la taille d'un produit que de le broyer ? Sa simplicité de mise en œuvre l'a rendu universel au point que ce n'est probablement pas un secteur où il y a à un moment ou à un autre une étape de broyage.

Les spécificités requises pour les applications industrielles dans l'industrie agroalimentaire comme dans d'autres industries (chimie, pharmacie, ...) sont de plus en plus draconiennes: diamètre moyen connu avec précision, gamme de tailles de particules étroite, diamètres extrêmes bien définis, exigences de morphologie et des propriétés surface du produit.

Au cours des deux dernières décennies, les enjeux industriels ont conduit à l'émergence de nouvelles techniques d'analyse et de broyage mieux adaptées à ces contraintes. Il convient toutefois de noter dans le cas du broyage, que ces développements étaient basés sur des preuves empiriques. Il est maintenant nécessaire de développer les connaissances dans ce domaine pour mieux maîtriser les processus dans un contexte où les contraintes d'ordre technique mais aussi économique deviennent de plus en plus exigeantes.

CHAPITRE 2 : BROYAGE-CLASSIFICATION

2.1 Introduction.....	33
2.2 Les Classificateurs.....	34
2.3 Contrôle et régulation du broyage.....	40
2.4 Modélisation du système	42
2.5 Conclusion	46

CHAPITRE 2 : BROYAGE-CLASSIFICATION

2.1 Introduction

Dans le traitement minéralurgique il y'a une étape importante c'est le broyage, car il est la première étape de la chaîne de procédé de séparation. Le broyage intervient à deux niveaux :

- Niveau physique de fragmentation du minerai.
- Niveau physico-chimie de conditionnement des surfaces minérales.

Le broyage généralement est réalisé en deux étapes :

- Une étape de fragmentation.
- Une étape de classification (avec un hydrocyclone ou un tamis vibrant).

Voici un schéma qui montre les étapes de broyage :

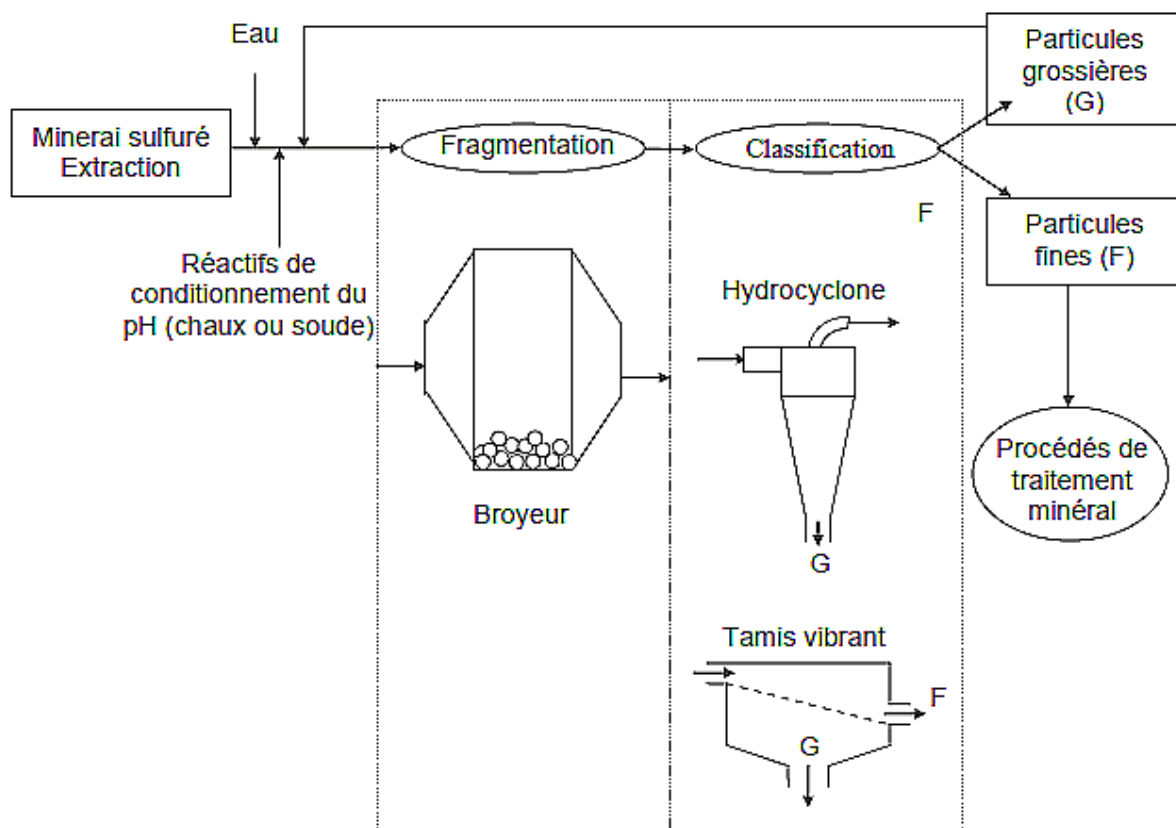


Figure 2.1 Schéma simplifié de l'étape de broyage.

2.2 Les Classificateurs

Dans le traitement des minéraux, les composants de classification séparent les particules grossières des particules plus fines et sont également utilisés pour construire des circuits en boucle fermée. Le classificateur est une nouvelle machine conçue et fabriquée afin de s'adapter à tout type d'environnements et produits. De par sa conception robuste, la durée de vie de la machine est allongée. Le nettoyage est facilité grâce à la présence de trappe d'accès permettant d'atteindre tous les endroits de la machine.

Les classificateurs sont traditionnellement regroupés en classificateurs humides et secs. La différence entre les méthodes sèches et humides est le milieu de suspension utilisé. Les classificateurs humides utilisent des liquides comme milieu de suspension tandis que les classificateurs à sec utilisent des gaz. Cependant, plusieurs technologies peuvent être utilisées dans des conditions sèches ou humides. Les exemples comprennent le tamisage et la classification des cyclones.

Les techniques de classification peuvent également être classées dans des classificateurs mécaniques et non mécaniques quel que soit le milieu de travail. Les classificateurs mécaniques incorporent des pièces mobiles qui influencent le mouvement des particules. Les classificateurs non mécaniques utilisent la traînée fluide uniquement pour séparer les particules.

Les classificateurs peuvent être classés en termes de forces exercées sur les particules en deux types principaux: les classificateurs gravitationnels et les classificateurs centrifuges. Les classificateurs gravitationnels sont généralement utilisés pour séparer les particules très grosses et sont principalement considérés comme une étape de prétraitement. En effet, la gravité ne fournit pas suffisamment de puissance de partition pour classer les petites particules. L'avantage des classificateurs centrifuges est la possibilité d'obtenir des tailles de coupe fines grâce à une puissance de partition élevée

Voici une photo d'une machine broyage-classification dans l'industrie :

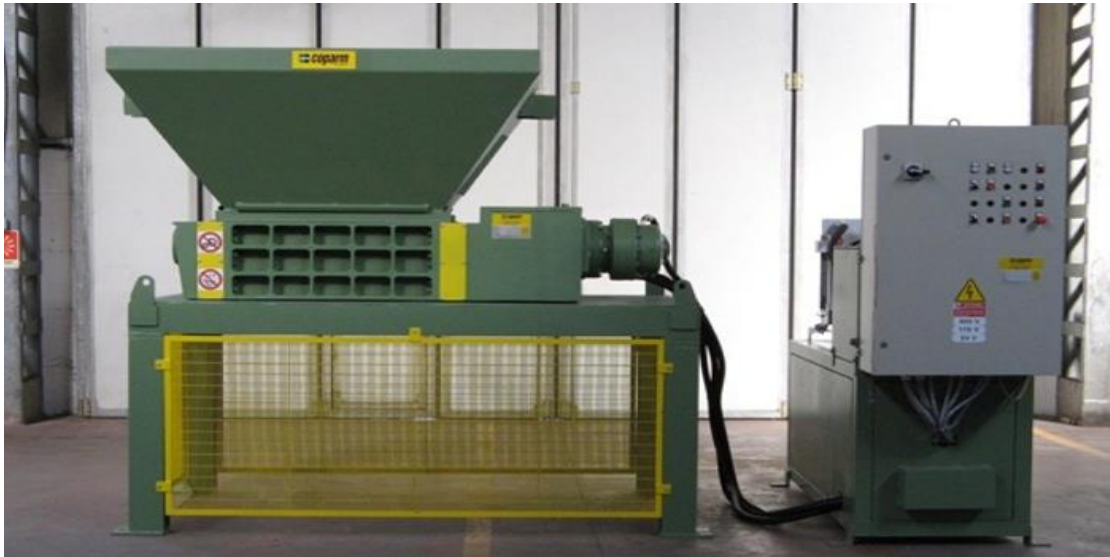


Figure 2.2 Broyage et classification dans l'industrie.

2.2.1 Caractéristiques de la machine

- La nouveauté de ce broyeur est de combiner broyeur et classificateur permettant ainsi la conception d'un ensemble compacte.
- La machine peut être ouverte facilement pour le contrôle, le nettoyage et l'entretien grâce à son système de séparation entre la chambre de broyage et de sélection.
- La granulométrie du produit en entrée doit être inférieure à 15 mm. La granulométrie en sortie est comprise entre 8 et 150 μm .
- Ce système peut être utilisé sur la majorité des produits ayant une dureté d'environ 3.5 Mohs. Il peut être utilisé pour des produits ayant une dureté jusqu'à 7 Mohs à condition que les matériaux utilisés pour la construction de la machine résistent à l'abrasion.

De plus, il existe plusieurs types des classificateurs dans l'industrie, comme nous le rappellerons dans le tableau suivant :

Tableau 2.1 Les types des classificateurs et ses tailles de coupure et ses conditions de fonctionnement.

GRANULOMERTIE			
Type	Taille de coupure	Condition	
		Humide	Sèche
Tamis planaire	Divers	✓	
Tamis vibrant	1 mm to 100 mm	✓	✓
Crible	250 µm, 500 µm and 1 mm		✓
Tamis circulaire	50 µm to 5 mm	✓	✓
Tambour de lavage	40, 30, 20 and 10 mm	✓	
Classificateur d'air dynamique	4 µm to 100 µm	✓	
Cyclone	40 µm to 100 µm	✓	
Hydrocyclone	15 µm	✓	
Classificateur à vis	63 µm		✓

Notre choix de classificateur porte sur les classificateurs hydrocyclones.

2.2.2 Les classificateurs Hydrocyclones

L'hydrocyclone est un dispositif sans partie mobile utilisé dans les processus de classification des particules, il utilise la force centrifuge pour séparer les particules plus lourdes que l'eau. Ce n'est pas un filtre au sens strict du terme car il n'y a pas de barrière physique pour trier les particules, mais ce type de dispositif est souvent utilisé en amont d'un filtre pour éliminer les

gros débris afin de réduire la maintenance et le nettoyage du filtre. L'hydrocyclone est classé comme classificateurs stables. Les grosses particules sont séparées des plus fines par l'effet cyclonique.

Composition d'un hydrocyclone

L'hydrocyclone est composé d'une section cylindrique supérieure et d'une section conique inférieure. Il y a un orifice d'alimentation, une buse de surverse (vortex) sur la section cylindrique et une buse de souverse (apex) à l'extrémité du cône.

La surface interne de l'hydrocyclone est protégée par un revêtement de caoutchouc pour empêcher l'usure due à l'abrasion par les particules de minerai. Des gammes interchangeables d'apex et de vortex peuvent être installées sur l'hydrocyclone pour ajuster le fonctionnement au matériel en cours de traitement et l'objectif de la classification.

Pour caractériser un point de fonctionnement d'un système en boucle fermée, les concepts de charge recyclée et de charge en circulation doivent être pris en compte. Considérons la figure 2.3 montrant les trois débits massiques aux extrémités du classificateur à hydro-cyclone.

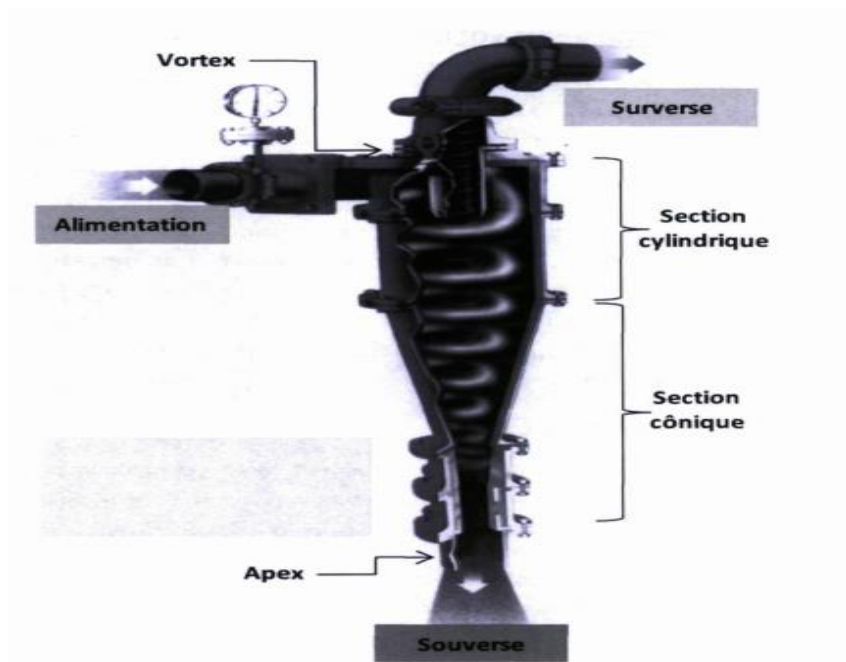


Figure 2.3 Conception d'un hydro-cyclone.

Remarque

La granulométrie de séparation et le débit dépendent du diamètre de l'hydrocyclone. Pour des débits plus importants, les hydrocyclones sont utilisés en parallèle.

2.2.3 Couplage Broyage-classification

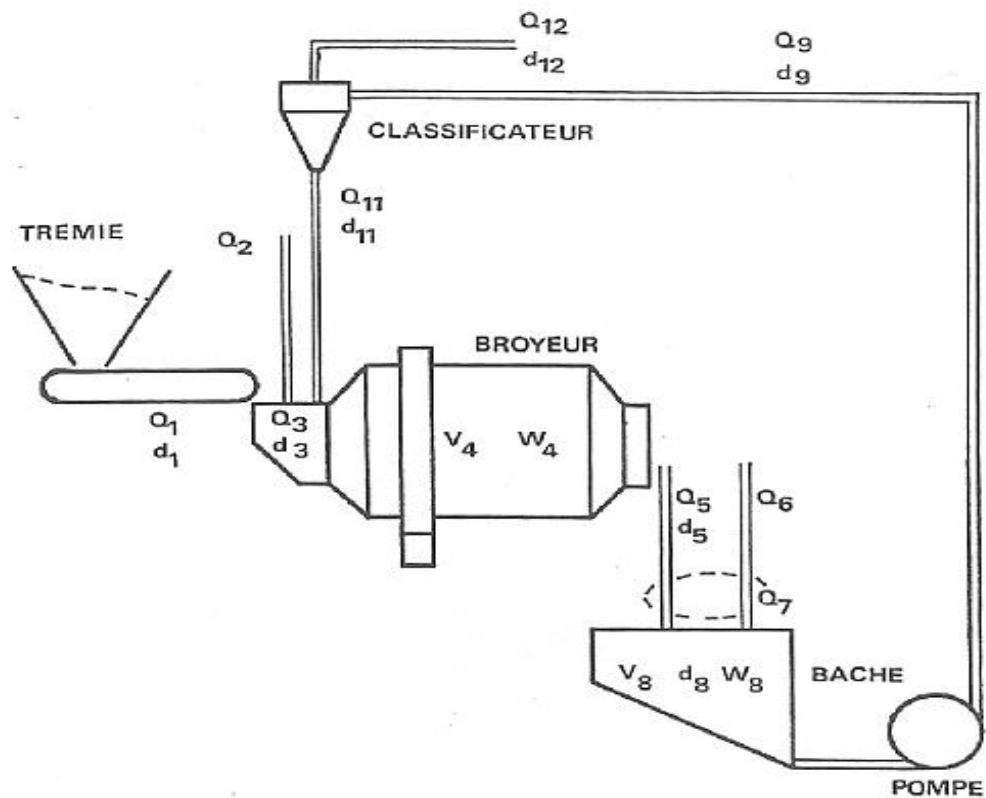


Figure 2.4 Couplage Broyeur – Classificateur.

La figure 2.4 montre un circuit du broyage – classification. D’abord on ajoute le minerai dans la trémie et puis subit un broyage, avant d’être pompée vers des hydrocyclones qui séparent, les particules assez fines pour avancer vers une prochaine étape de traitement, des particules encore trop grossières pour être évacuées du circuit. Chaque élément a des entrées et des sorties (Paramètres). Voici le tableau suivant qui illustre tous les paramètres d’un circuit broyage-classification :

Tableau 2.2 L'ensemble des paramètres d'un circuit broyage-classification.

Grandeurs	Nom1
Granulo. Surverse Hydro.	m12i
Granulo. Sortie Broyeur	m5i
Débit Massique Sortie Hydro.	Q12
Débit Massique Sortie Broyeur	Q5
Débit Alim. Minerais	Q1
Vitesse Rotation Broyeur	Rot
Densité Alim. Hydro.	d9 d8
Diamètre Souverse Hydro.	Apex
Débit Alim. Hydro.	Q9
Densité Souverse Hydro.	d11
Débit Souverse Hydro.	Q11
Densité Alim. Broyeur	d3
Débit Eau Alim Broyeur	Q2
Débit Eau Alim Bâche	Q6
Volume Bâche	V8
Hauteur Bâche	H8

2.3 Contrôle et régulation du broyage

2.3.1 Alimentation de la trémie tampon

Cette trémie est alimentée par un ensemble de 2 distributeurs vibratoires AEG. Les 2 distributeurs sont fixés sur 2 bouches, constituées de trémies qui vibrent lorsque les distributeurs ne débitent plus. Le manque de minerai, résultant d'un colmatage ou d'une formation d'arche, est détecté par une sonde déclenchant les vibrations. Ceux-ci ont une durée réglable et sont par intermittence pour une période réglable également. Si trop longtemps, les distributeurs ne débitent toujours pas, une alarme d'horloge se déclenche dans la laverie.

En fonctionnement normal, les distributeurs sont allumés ou éteints lorsque le poids de la trémie tampon attachée à des bascules connectées à une bascule Elliot atteint une valeur correspondant à un niveau haut choisi. De même, ils fonctionnent au-dessous d'un poids de niveau bas. En cas de mauvais fonctionnement de la bascule, une sonde capacitive installée en haut de la trémie déclenche l'alarme lorsque le minerai l'atteint.

L'alarme est également déclenchée lorsque la trémie se vide en dessous d'un poids minimum. Il est enfin prévu sur la bascule entre le poids de bas niveau et le poids de minimum niveau d'alerte un système de contrôle de débit du doseur.

2.3.2 Régulation du débit du broyage

Le débit régulier du minerai alimentant le broyeur est réalisé par un distributeur doseur à poids constant. Cet ensemble est formé d'un distributeur vibrant et d'un transporteur à bande monté en bascule sur une jauge de contrainte. L'intensité variable des vibrations est commandée à partir d'une armoire de commande en fonction du débit désiré et de l'indication délivrée par la jauge de contrainte. La vitesse du transporteur est constante. On peut éventuellement modifier l'amplitude des vibrations suivant la nature du minerai. On peut également faire fonctionner le distributeur en manuel avec une intensité de vibrations donnée.

L'armoire de commande comporte un indicateur du débit instantané en T/h et 2 compteurs intégrateurs du tonnage passé, elle délivre parallèlement un signal proportionnel au débit de minerai qui permet d'actionner une vanne électropneumatique Fisher par l'intermédiaire d'un régulateur indicateur Elliot. Cette vanne est montée sur la conduite d'eau alimentant le broyeur et l'appareillage permet de garder constant le rapport eau-minerai dans le broyeur, quel que soit le débit de minerai à l'entrée. Néanmoins, au-dessous d'un certain débit de minerai, le débit d'eau reste constant.

Enfin, l'alarme broyage est encore déclenchée quand le distributeur ne débite plus par suite d'un colmatage dans la trémie. Deux coussins d'air installés sur les parois de cette trémie permettent éventuellement de détruire une cheminée qui se serait formée.

2.3.3 Régulation de la classification

Le classificateur hydrocyclone est alimenté par la pulpe sortant du broyeur. Cette pulpe est réceptionnée dans une bêche équipée d'électrodes immergées en partie et commandant la vitesse du moteur de la pompe du cyclone. Il s'agit d'un moteur à bagues dont la vitesse varie en fonction de la résistance des électrodes plongeantes. Le niveau dans la bêche reste donc constant.

2.3.4 Enregistrement des paramètres du broyeur

Les indications délivrées par les appareils précédents sont enregistrées graphiquement sur un enregistreur NECI Speedomax. On peut ainsi suivre les éventuelles variations du débit de minerai, du débit d'eau au broyeur et la densité de la pulpe alimentant le broyeur et l'hydrocyclone.

2.4 Modélisation du système

2.4.1 Equations entrée-sorties:

D'après la figure 2.4 ont conclu que chaque élément du circuit de broyage contient deux paramètres d'entrés et deux de sorties.

Au niveau du Broyeur

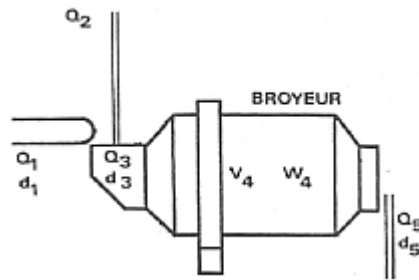


Figure 2.5 Les paramètres du broyeur (entrées/sorties).

- Paramètres du minerai :

Q1 : Débit Alim. Minerai.

d1 : Densité alimentation minerai.

- Paramètres du broyeur :

d2 : Débit Eau Alim Broyeur.

Q2 : Débit massique d'entré du broyeur.

d5 : Granulométrie Sortie Broyeur.

Q5 : Débit massique de sortie du broyeur.

✚ La masse et le volume au niveau du broyeur est :

$$\overset{0}{V}_4 = \frac{Q_1}{d_1} + Q_2 - Q_5 \quad (2.1)$$

$$\overset{0}{W}_4 = Q_1 + Q_2 d_2 - Q_3 d_3 \quad (2.2)$$

Au niveau de la Bâche

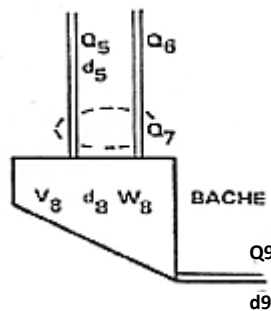


Figure 2.6 Les paramètres du bêche (entrées/sorties).

- Paramètres de la sortie du broyeur :

d5 : Granulométrie Sortie Broyeur.

Q5 : Débit massique de sortie du broyeur.

- Paramètres d'entrées de la bêche :

d6 : Densité Alimentation Bêche.

Q6 : Débit Eau Alimentation Bêche.

Paramètres de sortie de la bêche et de l'entrée de l'hydrocyclone :

d9 : Densité Alimentation Hydro.

Q9 : Débit Alimentation Hydro.

✚ La masse et le volume au niveau de la bêche est :

$$\overset{0}{V}_8 = Q_5 + Q_6 - Q_9 \quad (2.3)$$

$$\overset{0}{W}_8 = Q_5 d_5 + Q_6 d_6 - Q_9 d_9 \quad (2.4)$$

Voici un schéma qui montre la relation entre les paramètres au niveau de la bêche :

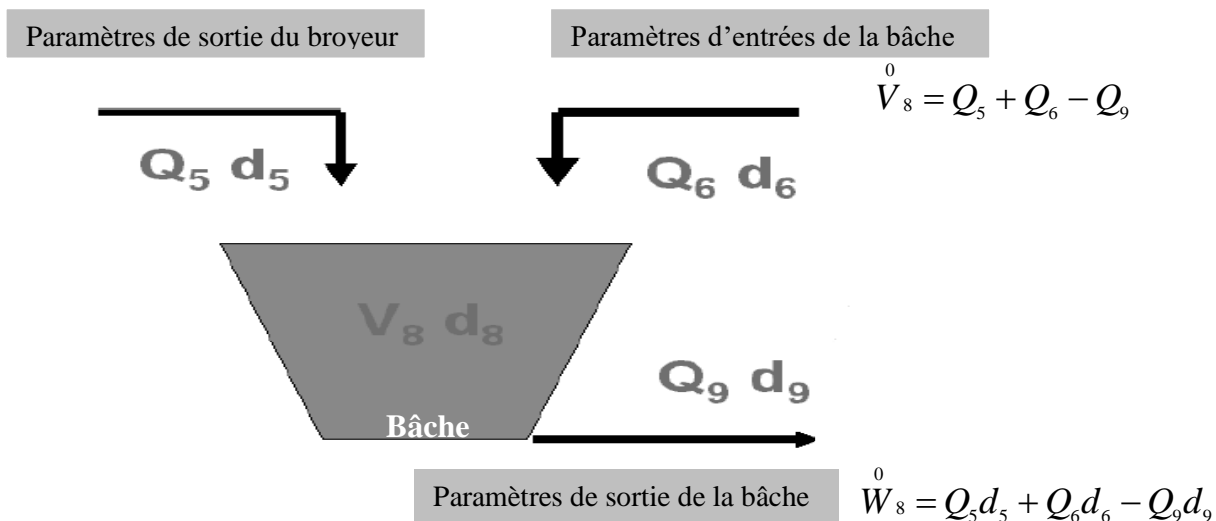


Figure 2.7 Schéma représentant les paramètres au niveau de la bêche.

2.4.2 Représentation d'état

Le modèle complet d'un broyeur est un ensemble d'équations différentielles partielles non linéaires tandis qu'un ensemble de modèles en régime permanent est suffisant pour décrire le classificateur hydro-cyclone.

Le broyeur-bêche, en tant que système, est caractérisé par un ensemble de variables d'entrée, de variables d'état, de variables de sortie et de commande. Sa forme est de :

$$Y = AX + BU \quad (2.5)$$

Les variables d'entrées U_k , les variables de sortie Y_j , les perturbations α_{pi} et les variables d'état X_i . A c'est la matrice du broyage et B la matrice de sélection. Elles s'associent pour décrire le système sous forme d'une fonction générale:

$$\begin{bmatrix} Q_5 \\ d_5 \\ H_8 \\ d_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -g & 0 & 0 \\ K & 0 & 0 & 0 \\ K \times a & K \times c & 0 & K \times d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} Q_5 \\ d_5 \\ H_8 \\ d_8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{T_4 d_1} & 0 & 0 & 0 \\ e & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K & -K \\ 0 & 0 & -K \times b & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} Q_1 \\ d_2 \\ H_6 \\ d_9 \end{bmatrix}$$

Voici ci-dessous un tableau qui définit toutes les paramètres dans l'équation d'état du système Broyeur-Bâche :

Tableau 2.3 Les paramètres d'équation d'état broyeur-bâche.

Sortie (y)	Commande (u)	Etat (x)	Perturbation
Granulométrie Surverse Hydrocyclone	Débit Alimentation Minerai	Débit Alimentation Hydrocyclone	Dureté Minerai
Granulométrie Sortie Broyeur	Vitesse Rotation Broyeur	Débit Souverse Hydrocyclone	Usure Corps Broyants
Débit Massique Surverse Hydrocyclone	Densité Alimentation Hydrocyclone	Densité Souverse Hydrocyclone	
Débit Massique Sortie Broyeur	Diamètre souverse Hydrocyclone	Densité Alimentation Broyeur	

Exemple

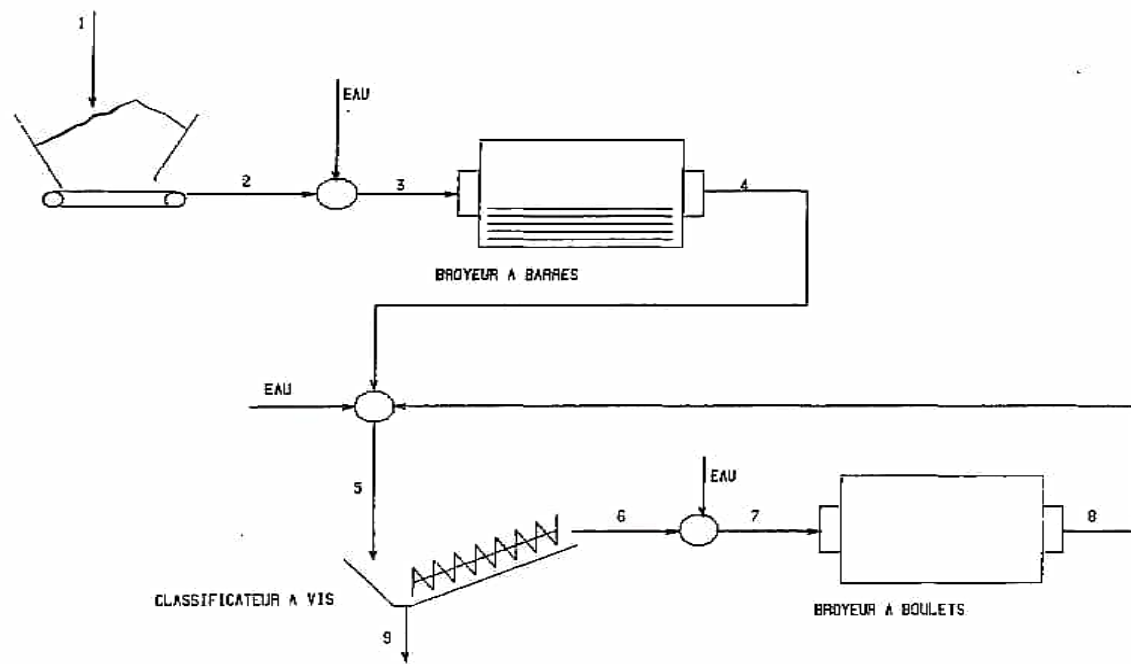


Figure 2.8 Un circuit du broyage-classification.

La figure 2.8 illustre un exemple de circuit du broyage et classification, la première étape consiste à placer les minerais à broyer dans la trémie et ceux-ci seront lavés avec l'eau pour éliminer les impuretés, puis le passer à le broyeur a barre, et dans ce dernier la matière de broyage touche le minerai en forme linéaire, donc il peut réaliser le broyage sélectif. La sortie traverse l'eau pour éliminer les impuretés à nouveau ensuite le passage au classificateur à vis conçu pour classifier les particules, selon la taille, au cours de la transformation des minéraux. Le minerai est distribué dans des circuits fermés par le broyeur à boulets. Ce dernier est destiné à moudre des solides en poudres très fines.

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un aperçu sur un circuit broyage-classification et ses paramètres. Tout d'abord, nous avons commencé de définir le processus de broyage-classification. Ensuite, nous avons expliqué l'étape de broyage et les classificateurs et ses types, après nous avons défini toutes les paramètres de ce circuit.

CHAPITRE 3 : IDENTIFICATION LINEAIRE DES SYSTEMES MONOVARIABLE INVARIANT

3.1 Introduction.....	48
3.2 Méthodologies d'identification de modèles à temps continu.....	48
3.3 Forme générale des modèles invariants stochastiques	55
3.4 Identification basé sur l'erreur de sortie (output error : OE)	61
3.5 Identification basé sur l'erreur d'équation.....	62
3.6 La prédiction	63
3.7 Estimation des paramètres.....	67
3.8 Exemple d'un circuit RC	76
3.9 Conclusion	97

CHAPITRE 3 : IDENTIFICATION LINEAIRE DES SYSTEMES

MONOVARIABLE INVARIANT

3.1 Introduction

L'identification du système est la spécialité de la modélisation de systèmes dynamiques à partir de données expérimentales, où le modèle basé sur la connaissance est optimisé à partir des données mesurées afin de se rapprocher le plus possible du comportement du système. Le processus d'identification comprend trois étapes principales:

- L'acquisition de données échantillonnées à partir du système en temps réel.
- Le choix d'une structure de modèle qui permet d'approximer le modèle dynamique du système.
- La définition d'un critère de sélection pour choisir le meilleur modèle au sein de la structure définie ainsi qu'une méthode d'optimisation permettant la minimisation de ce critère.

3.2 Méthodologies d'identification de modèles à temps continu

Une représentation schématique de la méthodologie d'identification du modèle à temps continu dans la figure suivante:

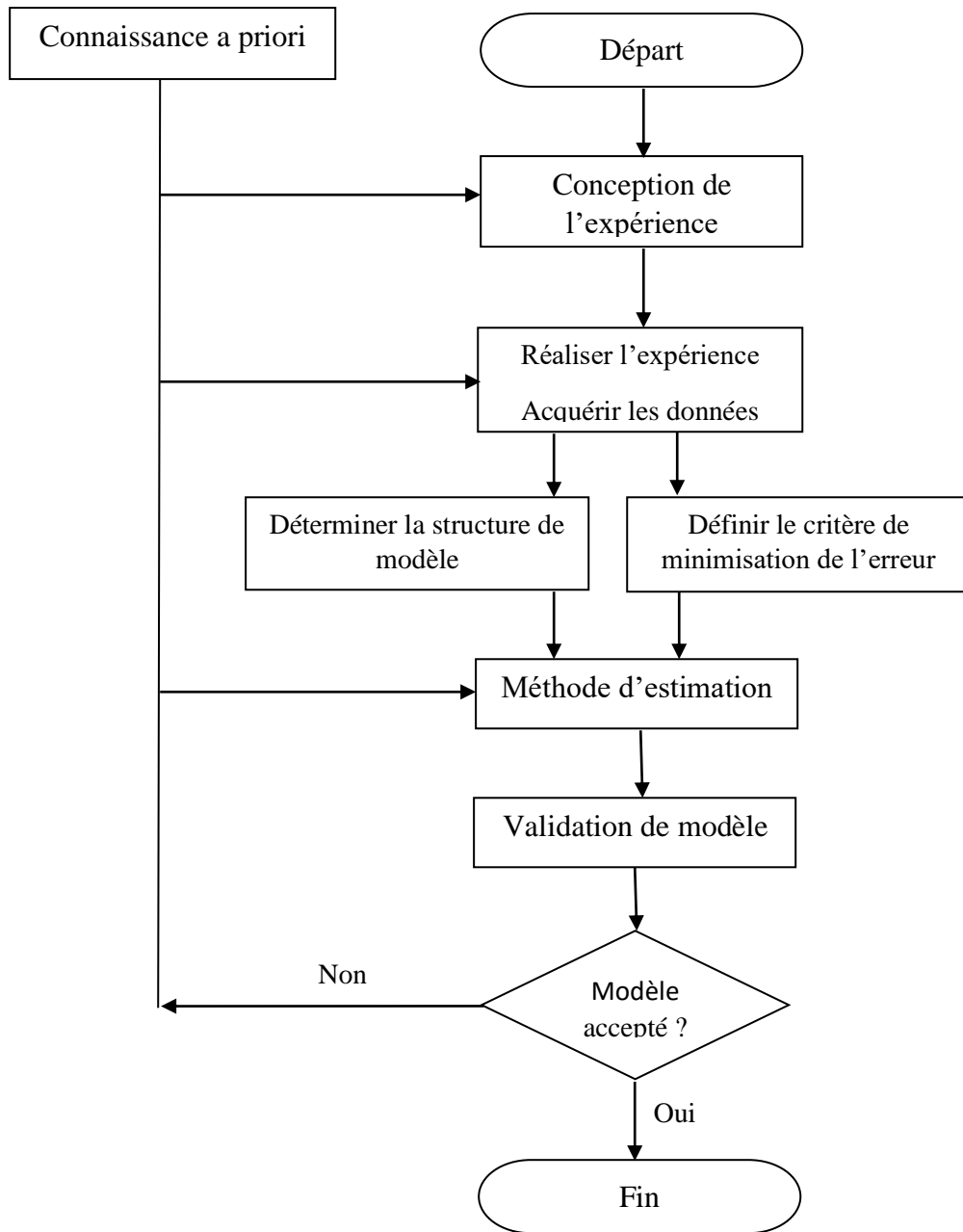


Figure 3.1 Procédure d'identification.

La figure 3.1 montre que la conception d'une méthode d'estimation s'inscrit dans un processus expérimental plus général. En conséquence, la structure de modèle, le critère à minimiser ainsi que la méthode d'estimation associée doivent être choisis en fonction de l'application visée et des connaissances a priori disponibles. La plupart des méthodes d'estimation développées lors des dernières décennies sont principalement destinées à des applications industrielles pour la commande.

Néanmoins, les systèmes dynamiques ne sont pas limités aux systèmes automatisés et sont souvent des systèmes naturels, qu'ils soient chimiques, biologiques ou environnementaux, par exemple. Ces systèmes naturels ont intrinsèquement beaucoup de difficultés:

- Comportements non-linéaires.
- Les modèles conceptuels sont souvent trop complexes pour être identifiables.
- Ces systèmes ne peuvent pas être contrôlés.
- L'acquisition de certaines variables est parfois impossible.

Voici les étapes d'identification plus détaillées :

a) **Connaissance a priori, utilisation envisagée**

- La connaissance a priori nous permet de déterminer les contraintes dont il faudra tenir compte dans la conception des expériences, comme dans la détermination de la structure du modèle.
- L'usage envisagé permet de déterminer le domaine de fréquence dans lequel le modèle doit être valide et impose donc le choix de la fréquence d'échantillonnage des données, de la longueur de l'expérience et du spectre du signal d'entrée. La fréquence d'échantillonnage sera choisie la plus élevée possible.

Dans la pratique, on choisit souvent $T_e = \tau_{\min}$ ou $T_e = \frac{\tau_{\max}}{10}$ (τ_{\min} est la plus petite constante de temps du système et τ_{\max} est la plus grande). La longueur de l'expérience sera choisie la plus longue possible. En pratique, on prendra $T_e = 10 \cdot \tau_{\max}$.

b) **Détermination de la structure du modèle**

On choisit la structure (et la complexité) du modèle parmi un ensemble de modèles candidats (dépendant du type de modèle recherché).

Cet ensemble de modèles est généralement obtenu après une modélisation soignée (en utilisant les lois physiques, chimiques, électroniques,...). Le choix se fait alors sur les différents niveaux de simplification possibles. On peut aussi utiliser des modèles linéaires standard (type second ordre, par exemple); dans ce cas, on parle de modèles "boîte noire".

c) **Calcul du modèle**

On réalise l'estimation des paramètres du modèle, par différentes techniques.

d) **Vérification du modèle**

La vérification, effectuée avec d'autres mesures, permet la validation du modèle identifié. Si le résultat n'est pas satisfaisant, on cherchera les causes des problèmes. Souvent, il s'agit :

- d'amplitudes d'entrées trop faibles,
- d'entrées trop pauvres du point de vue du contenu fréquentiel,
- d'une structure de modèle inadaptée,
- d'une longueur d'expérience trop courte.

e) **Conception des expériences**

- Les expériences préliminaires consistent souvent à simplement observer le système ou à lui injecter des entrées-types. On détermine ainsi généralement :
- Les plus grandes constantes de temps.
- Les amplitudes d'entrée autorisées.
- Les niveaux de bruit.

- Les retards.
- Le degré de linéarité du système.
- Les expériences suivantes consistent en l'acquisition des données. On prépare les expériences dans le but de mesurer le maximum de variables.

f) Acquisition des données

L'acquisition des données peut se faire par enregistrements :

- Lors d'expérimentations spécialement conçues pour l'identification. Dans ce cas, les informations récupérées sont parfaitement ciblées.
- En fonctionnement normal (si l'expérimentation spécifique n'est pas possible).

3.2.1 Formulation du problème d'identification

Soit un système mono-entrée, mono-sortie, linéaire, à temps continu, causal et invariant dans le temps soumis à un ensemble de conditions initiales quelconques. Ce système est décrit par l'équation différentielle à coefficients constants :

$$\overset{o}{a}_0 \overset{o}{y}(t) + \overset{o}{a}_1 \overset{o}{y}^{(1)}(t) + \dots + \overset{o}{y}^{(n_a)}(t) = \overset{o}{b}_0 u(t) + \overset{o}{b}_1 u^{(1)}(t) + \dots + \overset{o}{b}_{n_b} u^{(n_b)}(t) \quad (3.1)$$

Où $u(t)$ représente le signal d'entrée, $\overset{o}{y}(t)$ la réponse non bruitée du système à $u(t)$, $x^{(i)}(t)$ représente la i^{e} dérivée par rapport au temps du signal à temps continu $x(t)$.

L'équation (3.1) permet de représenter la sortie du système pour toutes les valeurs de la variable continue t et peut également s'écrire sous la forme compacte suivante :

$$y(t) = G_o(p)u(t) = \frac{B_o(p)}{A_o(p)}u(t) \quad (3.2)$$

Avec :

$$B_o(p) = b_0^o + b_1^o p + \dots + b_{n_b}^o p^{n_b}, \quad (3.3)$$

$$A_o(p) = a_0^o + a_1^o p + \dots + p^{n_a}, \quad n_a \geq n_b \quad (3.4)$$

Où p représente l'opérateur différentiel $px(t) = \frac{dx(t)}{dt}$.

$G_o(p)$ est la fonction de transfert du système, les polynômes $A_o(p)$ et $B_o(p)$ sont supposés être premiers entre eux et le système est supposé être asymptotiquement stable. On suppose de plus que les perturbations agissent sur la sortie non bruitée sous la forme d'un terme additif tel que :

$$S : y(t) = G_o(p)u(t) + H_o(p)e_o(t) \quad (3.5)$$

Où $y(t)$ représente la sortie bruitée, $H_o(p)$ est une fraction rationnelle propre et inversement propre qui décrit le bruit additif sur la sortie et $e_o(t)$ est un bruit blanc à temps continu à moyenne nulle et de variance $\lambda_o \delta(t)$ avec $\delta(t)$ l'impulsion de Dirac.

Le terme de perturbation $e_o(t)$ est supposé être non corrélé avec le signal d'entrée $u(t)$; le cas d'un système évoluant en boucle ouverte est considéré. Les signaux à temps continu $u(t)$ et $y(t)$ sont également supposés être échantillonnés à pas T_e non nécessairement constant.

Les modèles que l'on recherche ont la forme suivante :

$$M : \begin{cases} y(t_k) = G(p, \theta)u(t_k) \\ y(t_k) = y(t_k) + v(t_k) \end{cases} \quad (3.6)$$

Avec :

$$\theta = [a_{n_a-1}, \dots, a_0, b_{n_b}, \dots, b_0]^T \quad (3.7)$$

$x(t_k)$ représente l'amplitude du signal à temps continu $x(t)$ à l'instant $t_k = kT_e$ et $G(p, \theta)$ est l'opérateur de transfert défini par :

$$\mathcal{G} : G(p, \theta) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{b_0 + b_1 p + \dots + b_{n_b} p^{n_b}}{a_0 + a_1 p + \dots + p^{n_a}} \quad (3.8)$$

Le terme de perturbation est modélisé ici comme un bruit à temps discret à moyenne nulle noté $v(t_k)$.

Le problème d'identification peut être formulé ainsi: en supposant les ordres n_a and n_b connus ($G_o \in \mathcal{G}$), l'objectif consiste à estimer le vecteur des paramètres du modèle à temps continu à partir de N échantillons des signaux d'entrée/sortie $Z_N = \{u(t_k); y(t_k)\}_{k=1}^N$.

3.2.2 Choix du modèle d'identification

Le choix de tout modèle dépend largement de sa finalité. On peut distinguer principalement deux types de modèles :

- Les modèles pour la commande qui ont une structure simple et n'ont besoin de représenter fidèlement le système que dans une bande de fréquence assez étroite. La structure peut être imposée par la méthodologie de commande choisie, par exemple linéaire.
- Les modèles de simulation et d'analyse pourront prendre en compte des phénomènes négligés dans le modèle de synthèse, aboutissant à une structure plus complexe. Dans le cas des modèles d'analyse, la structure peut aussi être imposée (représentation linéaire fractionnaire pour la microanalyse par exemple).

Lorsque l'estimation des paramètres se fait à partir des données expérimentales, on doit se poser la question de l'identifiabilité du modèle. On dit qu'un modèle est identifiable si on peut distinguer deux modèles avec des valeurs différentes du vecteur des paramètres.

3.2.3 Notion du modèle

Un modèle est une structure mathématique pouvant représenter le système étudié. Cette structure doit comporter des éléments d'ajustement. La structure du modèle représente la connaissance à priori que l'utilisateur souhaite placer dans le modèle.

Exemple

Les fonctions de transfert du type

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)} \quad (3.9)$$

Avec : $N(p)$ et $D(p)$ polynôme en p .

Peuvent représenter une partie des systèmes linéaires différentiels à coefficients constants.

Modèles d'état

Les équations d'état dans le cas linéaire et invariant prennent la forme particulière suivante:

$$\begin{array}{ll} x(t) = Ax(t) + Bu(t) & x(n+1) = Ax(n) + Bu(n) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) & y(n) = Cx(n) + Du(n) \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(Cas continu)} \\ \text{(Cas discret)} \end{array} \quad (3.10)$$

3.3 Forme générale des modèles invariants stochastiques

Un processus stochastique ou processus aléatoire représente une évolution discrète ou à temps continu, d'une variable aléatoire.

Voici la figure (3.2) représentant un schéma blocs des modèles invariants stochastique :

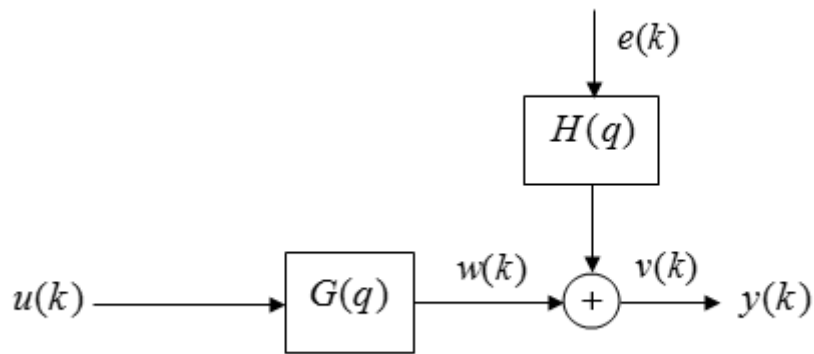


Figure 3.2 Schéma bloc des modèles invariants stochastiques.

Avec:

$u(k)$: Signal d'entrée mesuré.

$y(k)$: Signal de sortie mesuré.

Notation: on utilisera indifféremment t ou k .

Et :

$v(k)$: Bruit coloré non mesurable.

$e(k)$: Bruit blanc non mesurable de densité de probabilité f_e .

q^{-1} : Opérateur retard tel que :

$$y(k).q^{-1} = y(k-1) \quad (3.11)$$

$G(q)$: caractérise le lien entre $y(k)$ et $u(k)$.

$H(q)$: caractérise le lien entre $v(k)$ et $e(k)$.

La sortie de modèles de système est structuré sous forme de fonction de transfert s'écrit à la forme suivante :

$$y(k) = G(q)u(k) + H(q) e(k) \quad (3.12)$$

On pose que:

$$G(q) = \frac{B(q)}{A(q)F(q)} \quad H(q) = \frac{C(q)}{A(q)D(q)}$$

Et donc la structure générale de modèle sous la forme de fonction de transfert devient :

$$A(q).y(k) = \frac{B(q)}{F(q)}u(k) + \frac{C(q)}{D(q)}e(k) \quad (3.13)$$

Et sa représentation graphique:

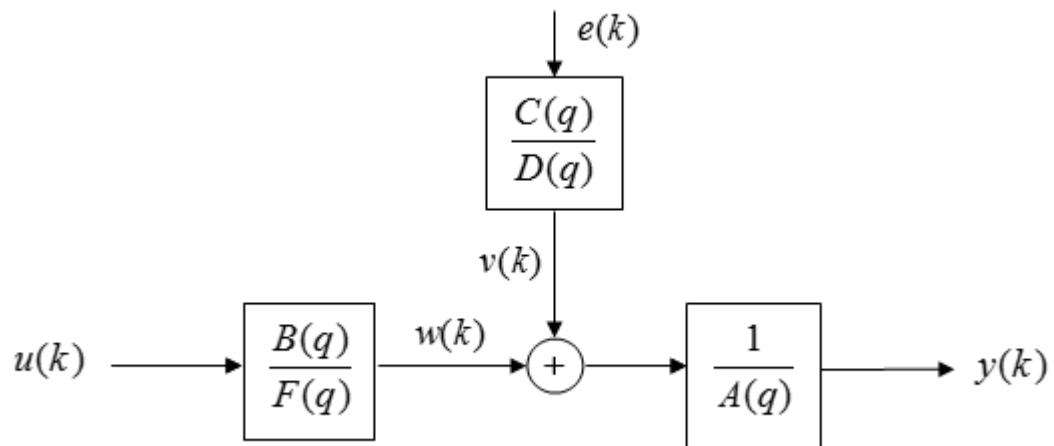


Figure 3.3 Représentation graphique générale des modèles stochastiques invariants.

On distingue classiquement deux grands de type « boîte noire »:

- **Les structures de modèles à erreur d'équation:** On utilise les mesures passées de la sortie pour réaliser l'estimation des paramètres du modèle (RIF, ARX, ARMAX, ...).
- **Les structures de modèles à erreur de sortie:** On utilise les estimations passées de la sortie pour réaliser l'estimation des paramètres du modèle (OE).

3.3.1 Modèle à erreur d'équation (Auto Régressif éXogène 'ARX')

Les modèles paramétriques ARX sont des modèles autorégressifs à variable exogène illustrés dans la figure 3.4. Ils permettent de décrire le comportement d'un système en reliant ses sorties y à un instant k notées $y(k)$ aux valeurs des sorties aux instants précédents $k-1, k-2, k-3, \dots$ notées $y(k-1), y(k-2), y(k-3), \dots$ et des entrées u au même instant $u(k)$ et aux instants précédents $k-1, k-2, k-3, \dots$ notées $u(k-1), u(k-2), u(k-3), \dots$. On note n_a et n_b le nombre de sortie et d'entrée discrètes utilisées pour décrire la sortie à l'instant k . $e(k)$ représente un bruit de modèle supposé blanc.

Un processus autorégressif (AR) correspond au passage d'un bruit blanc à travers un filtre stable.

Pour modéliser un système comportant une entrée et soumis à une perturbation, on peut donc utiliser un modèle ARX (X pour entrée externe).

C'est un modèle dit "erreur d'équation" ($A(q)$ est facteur commun).

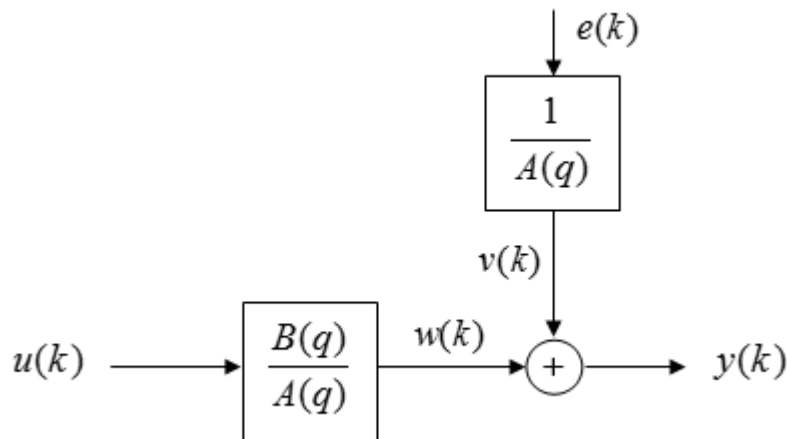


Figure 3.4 Représentation graphique du modèle ARX.

Avantages : faible nombre de paramètres à identifier.

Inconvénients : manque de liberté pour décrire les propriétés du terme de perturbation.

- L'équation aux différences s'écrit :

$$y(k) = -a_1 y(k-1) - \dots - a_{na} y(k-na) + b_1 u(k-1) + \dots + b_{nb} u(k-nb) + e(k) \quad (3.14)$$

- Le vecteur des paramètres associé à cette équation est :

$$\theta = [a_1 \dots a_{na} \ b_1 \dots b_{nb}]^T \quad (3.15)$$

- Sous forme polynomiale:

$$A(q)y(k) = B(q)u(k) + e(k) \quad (3.16)$$

Avec :

$$A(q) = 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_{na} q^{-na} \quad (3.17)$$

$$B(q) = b_1 q^{-1} + \dots + b_{nb} q^{-nb} \quad (3.18)$$

- La sortie du modèle s'écrit également :

$$y(k) = G(q)u(k) + H(q) e(k) \quad (3.19)$$

Avec: $G(q) = \frac{B(q)}{A(q)}$ et $H(q) = \frac{1}{A(q)}$.

Bruit blanc: un bruit blanc est un signal aléatoire dont la densité spectrale de puissance est constante sur tout l'axe des fréquences.

Remarque

Dynamique signal déterministe identique à celle du bruit.

3.3.2 Modèle à erreur de sortie (OE : Output Error)

La figure (3.5) présente la représentation graphique d'un modèle d'erreur de sortie.

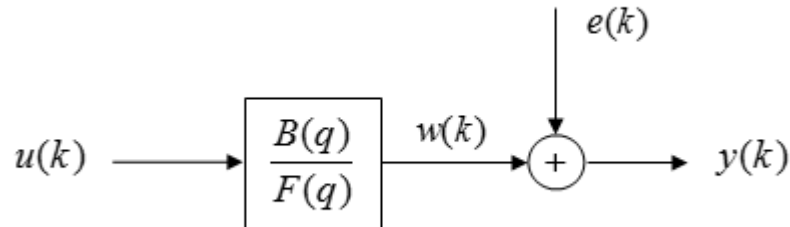


Figure 3.5 Représentation graphique du modèle OE.

- L'équation aux différences s'écrit par rapport à la variable non bruitée :

$$w(k) = -f_1 w(k-1) - \dots - f_{nf} w(k-nf) + b_1 u(k-1) + \dots + b_{nb} u(k-nb) \quad (3.20)$$

- Le vecteur des paramètres associé à cette équation est :

$$\theta = [f_1 \dots f_{nf} \ b_1 \dots b_{nb}]^T \quad (3.21)$$

- La sortie mesurée est corrompue par un bruit :

$$y(k) = w(k) + e(k) \quad (3.22)$$

- Sous forme polynomiale :

$$\begin{aligned} F(q)[y(k) - e(k)] &= B(q)u(k) \\ \Rightarrow F(q)y(k) &= B(q)u(k) + F(q)e(k) \end{aligned} \quad (3.23)$$

Avec : $F(q) = 1 + f_1 q^{-1} + \dots + f_{nf} q^{-nf}$

$$B(q) = b_1 q^{-1} + \dots + b_{nb} q^{-nb}$$

- La sortie du modèle s'écrit également :

$$y(k) = G(q)u(k) + H(q) e(k) \quad (3.24)$$

Avec: $G(q) = \frac{B(q)}{F(q)}$ et $H(q) = 1$

Remarque: la perturbation est supposée contenir toutes les fréquences.

3.4 Identification basé sur l'erreur de sortie (output error : OE)

Le principe de cette méthode d'identification est illustré en figure 3.6. Le modèle est une fonction de n paramètres θ_i , i variant de 1 à n . Il s'agit alors de déterminer les paramètres θ_i tels que le critère soit minimum. Le critère est en général choisi de la forme $J = \sum \varepsilon^2$.

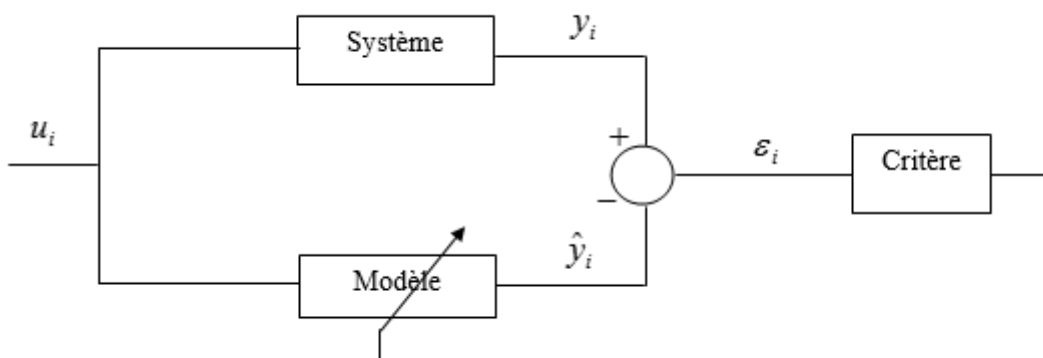


Figure 3.6 Principe d'identification fondée sur l'erreur de sortie.

La recherche des paramètres optimaux $\hat{\theta}_i$ se fait par programmation non linéaire. IL s'agit d'utiliser un algorithme qui à partir de paramètres non optimaux θ_i et un critère J donne les paramètres $\hat{\theta}_i$. Les paramètres de ce modèle doivent être estimés par un algorithme

d'optimisation (méthodes itératives). Ces algorithmes sont nombreux, à titre de d'exemple voici les plus utilisés : gradient, quasi Newton, Nelder et Mead, algorithmes génétiques, recuit simulé.

3.5 Identification basé sur l'erreur d'équation

Dans cette partie, nous supposons que le modèle obtenu est un prédicteur, c'est à dire qu'il permet de calculer la sortie à l'instant i en fonction des entrées et des sorties réelles aux instants précédents u_{i-k} et y_{i-k} .

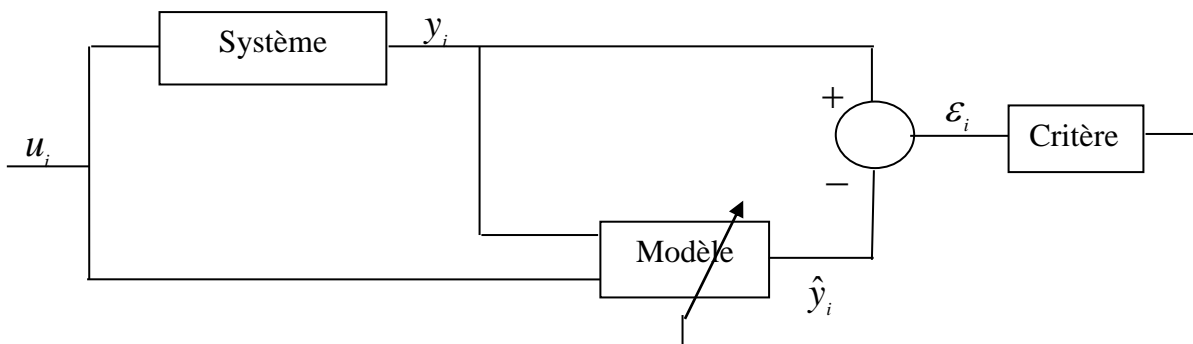


Figure 3.7 Principe d'identification forcée sur l'erreur de prédiction.

La recherche des paramètres optimaux $\hat{\theta}_i$ se fait par la méthode des moindres carrés. On utilise les mesures passées de la sortie pour réaliser l'estimation des paramètres du modèle.

3.6 La prédiction

L'une des principales utilisations d'un modèle est la prédiction. Nous apprenons d'abord comment construire un prédicteur donné un modèle, en particulier la description LTI (Linear Time Invariant).

$$\begin{aligned}y(k) &= G(q)u(k) + v(k) \\ \Rightarrow y(k) &= G(q)u(k) + H(q)e(k)\end{aligned}\tag{3.25}$$

- La prédiction exige la connaissance du passé / présent en plus du modèle.
- La précision de la prédiction dépend clairement de : La précision du modèle, l'horizon de prédiction (jusqu'où nous voulons anticiper) et le niveau d'incertitude (variance de $v[k]$).
- L'une des principales utilisations d'une expression de prédiction est la construction d'une erreur de prédiction, qui peut être ensuite utilisée pour estimer le modèle.

La prédiction linéaire

La prédiction linéaire est un outil très puissant utilisé pour l'analyse de séries temporelles, par exemple de signaux de parole, de consommation électrique, d'indices boursiers. On peut aussi utiliser la prédiction linéaire pour modéliser des signaux, par exemple des signaux de parole, en vue de compresser le signal. L'idée est alors de remplacer la transmission ou le stockage des échantillons par :

- La transmission des paramètres de prédiction (une fois pour toutes).
- La transmission (ou le stockage) à chaque instant n , de l'erreur de prédiction seulement, ce qui peut être codé par un nombre restreint de bits.

Le modèle générale de la prédiction écrit sous forme suivante :

$$y(k) = G(q)u(k) + H(q)e(k)\tag{3.26}$$

On suppose $H(q)$ et $H(q)^{-1}$ sont stable, le modèle générale devient sous forme suivante :

$$H^{-1}(q)y(k) = H^{-1}(q)G(q)u(k) + e(k) \quad (3.27)$$

On peut écrire le modèle générale de la prédiction de cette façon :

$$\begin{aligned} [1 - H^{-1}(q)]y(k) &= H^{-1}(q)G(q)u(k) + e(k) \\ \Rightarrow y(k) &= [1 - H^{-1}(q)]y(k) + H^{-1}(q)G(q)u(k) + e(k) \end{aligned} \quad (3.28)$$

Alors La prédiction de la mesure $y(k)$ s'écrit :

$$\hat{y}(k/k-1, \theta) = [1 - H^{-1}(q, \theta)]y(k) + H^{-1}(q, \theta)G(q, \theta)u(k) \quad (3.29)$$

On peut ainsi définir l'erreur de prédiction :

$$\varepsilon(k, \theta) = y(k) - \hat{y}(k/k-1, \theta) \quad (3.30)$$

Cette erreur correspond à la partie non prédictible de la sortie (c.-à-d. à la partie aléatoire) à partir des mesures précédentes, on remplace (3.29) dans la formule (3.30) on obtient :

$$\begin{aligned} \varepsilon(k, \theta) &= y(k) - [1 - H^{-1}(q, \theta)]y(k) - H^{-1}(q, \theta)G(q, \theta)u(k) \\ \Rightarrow \varepsilon(k, \theta) &= H^{-1}(q, \theta)y(k) - H^{-1}(q, \theta)G(q, \theta)u(k) \end{aligned} \quad (3.31)$$

Or, le modèle général a la forme :

$$\begin{aligned} y(k) &= G(q)u(k) + H(q)e(k) \\ \Rightarrow e(k) &= H^{-1}(q)y(k) - H^{-1}(q)G(q)u(k) \end{aligned} \quad (3.32)$$

L'erreur de prédiction $\varepsilon(k, \theta)$ est donc une estimation de la perturbation $e(k)$. Si $H(q)$ et $G(q)$ sont décrits par θ_0 et si $\theta = \theta_0$ alors :

$$\varepsilon(k, \theta) = e(k) \quad (3.33)$$

3.6.1 Les modèles de prédiction

Cas d'un modèle ARX

La forme générale de la prédiction comme nous l'avons déjà écrit dans (3.29) :

$$\hat{y}(k/k-1, \theta) = [1 - H^{-1}(q, \theta)] y(k) + H^{-1}(q, \theta) G(q, \theta) u(k)$$

On a : $G(q) = \frac{B(q)}{A(q)}$ et $H(q) = \frac{1}{A(q)}$.

Alors la prédiction pour un modèle « ARX » devient comme suit:

$$\hat{y}(k/k-1, \theta) = [1 - A(q, \theta)] y(k) + B(q, \theta) u(k) \quad (3.34)$$

Application à un premier ordre :

$$y(k) = -a_1 y(k-1) + b_1 u(k-1) + e(k) \quad (3.35)$$

Donc le vecteur θ est comme suit :

$$\theta = [a_1 \quad b_1]^T \quad (3.36)$$

Nous remplaçons l'équation (3.35) dans (3.34), la prédiction devient à la forme suivante:

$$\hat{y}(k/k-1, \theta) = -a_1(\theta) \hat{y}(k-1/k-2, \theta) + b_1(\theta) u(k-1) \quad (3.37)$$

Cas d'un modèle OE

La forme générale de la prédiction Comme nous l'avons déjà écrit (3.29) :

$$\hat{y}(k/k-1, \theta) = [1 - H^{-1}(q, \theta)] y(k) + H^{-1}(q, \theta) G(q, \theta) u(k)$$

On a: $G(q) = \frac{B(q)}{F(q)}$ et $H(q) = 1$

Alors la prédiction pour un modèle OE est un modèle de simulation, comme suit:

$$\hat{y}(k/k-1, \theta) = \frac{B(q, \theta)}{F(q, \theta)} u(k) \quad (3.38)$$

Application à un premier ordre :

$$y(k) = -f_1 y(k-1) + b_1 u(k-1) + e(k) + f_1 e(k-1) \quad (3.39)$$

Donc le vecteur θ est comme suit :

$$\theta = [f_1 \quad b_1]^T \quad (3.40)$$

La prédiction à la forme :

$$\hat{y}(k/k-1, \theta) = -f_1(\theta) \hat{y}(k-1/k-2, \theta) + b_1(\theta) u(k-1) \quad (3.41)$$

Comparaison entre ARX et OE

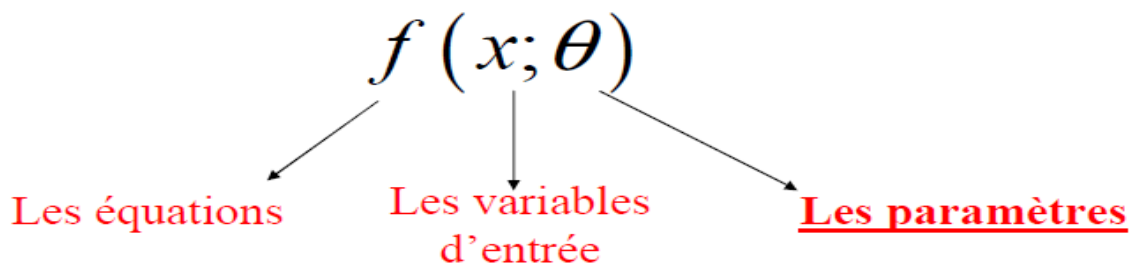
Le tableau ci-dessous présente une comparaison entre les deux modèles « ARX » et « OE » :

Tableau 3.1 La différence entre modèle ‘‘ARX’’ et modèle ‘‘OE’’.

ARX	OE
Prédicteur linéaire / à θ	Prédicteur non linéaire / à θ
Minimisation d'une erreur d'équation	Minimisation d'une erreur de sortie
Solution analytique (explicite). ➤ MC applicable.	Pas de solution analytique. ➤ Optimisation (Méthode itérative)
La prédiction de la sortie, à l'instant k , ne dépend que des mesures passées de y et $u(k-1, k-2, \dots)$	La sortie simulée, à l'instant k , ne dépend que des sorties simulées passées de y et $u(k-1, k-2, \dots)$
	Le modèle de prédiction est un modèle de simulation

3.7 Estimation des paramètres

Consiste à approcher les valeurs des paramètres à partir de données expérimentales et/ou d'informations issues de l'expertise, c'est important car les performances d'un modèle vont dépendre de la méthode utilisée pour estimer les paramètres.



« Un paramètre est une valeur numérique qui n'est pas calculé par le modèle et qui n'est pas une variable d'entrée mesurée ou observée ».

Sur la figure 3.8 suivante se trouve le schéma reprenant la méthodologie d'identification et d'estimation utilisée habituellement.

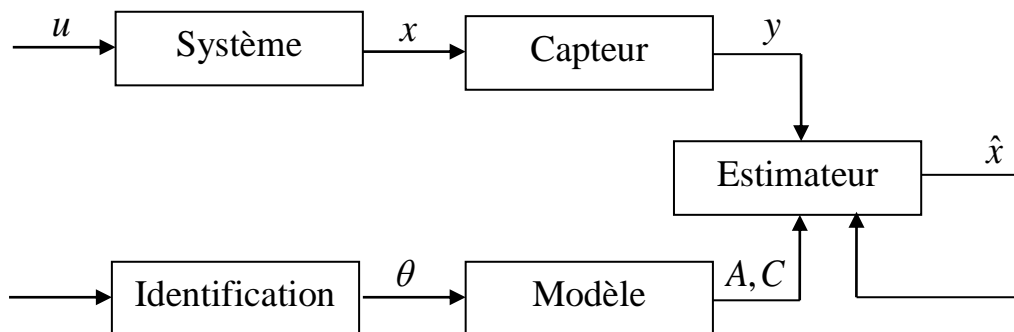


Figure 3.8 Schéma d'identification et d'estimation.

3.7.1 Méthodes d'estimation paramétrique de modèles à temps continu

Les techniques d'identification de modèles paramétriques linéaires à temps continu reposent principalement sur la minimisation d'un critère fondé soit sur une erreur de sortie, soit sur une erreur d'équation nécessitant l'utilisation d'une transformation linéaire couplée à une méthode issue des moindres carrés. De nombreuses méthodes de type erreur d'équation ont été proposées au cours des trente dernières années. L'intérêt essentiel de ces méthodes fondées sur l'erreur d'équation est la simplicité de la solution analytique qui conduit à un optimum unique. Cependant le problème de base de ces techniques est l'estimation de certaines

variables indispensables, mais indisponibles, que sont les dérivées successives des signaux d'entrée/sortie.

3.7.2 Méthode des moindres carrés

Le principe général de cette méthode est de choisir le jeu de paramètres d'un modèle que l'on définira, de telle sorte qu'il minimise la somme des carrés de la différence entre les valeurs prédites par le modèle et les valeurs observées, donc la méthode des moindres carrés consiste à estimer θ en minimisant la somme des carrés des résidus, telle que :

$$\varphi(\hat{\theta}(y)) = \min \sum_{i=1}^n (\hat{e}_i)^2 = \min \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 \quad (3.42)$$

La méthode des moindres carrés permet de résoudre les problèmes d'optimisation :

- Pour lesquels le nombre d'observations plus grand au nombre d'inconnues.
- Lorsque les paramètres (inconnues) interviennent de manière linéaire.

La méthode des moindres carrés donne une solution explicite :

Seul le bruit sur la grandeur à expliquer est pris en compte.

- Les bruits sur les variables explicatives ne sont pas considérés.

Les problèmes que résout la méthode des moindres carrés peuvent se mettre sous la forme générale suivante:

$$Y = \Phi \theta + E \quad (3.43)$$

$$y_k = \varphi_k^T \theta + e_k$$

Avec :

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_N \end{bmatrix} \quad \Phi = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \varphi_N \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \theta_n \end{bmatrix}$$

Ou :

Y : Vecteur des valeurs prises par la variable à expliquer de dimension $Y = N \times 1$.

Φ : Matrice des valeurs prises par les variables explicatives de dimension $\Phi = N \times n$.

θ : Vecteur des paramètres de dimension $\theta = n \times 1$.

N : est le nombre d'observations.

n : est le nombre de paramètres.

- Pour estimer θ , il faut minimiser le critère quadratique J qui peut alors écrire sous forme matricielle comme suit :

$$\begin{aligned} J(\theta) &= \sum_{k=1}^N e_k^2 = E^T E \\ &= \sum_{k=1}^N (y_k - \phi_k^T \theta)^2 = (Y - \Phi \theta)^T (Y - \Phi \theta) \\ &= Y^T Y - Y^T \Phi^T \theta - \theta^T \Phi^T Y + \theta^T \Phi^T \Phi \theta \end{aligned} \quad (3.44)$$

On cherche la valeur de θ qui minimise ce critère:

$$\frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta} = 0 \quad (3.45)$$

Finalement, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta} &= -2\Phi^T Y + 2\Phi^T \Phi \theta = 0 \\ \Rightarrow \Phi^T \Phi &= \Phi^T Y \end{aligned} \quad (3.46)$$

Si $\Phi^T \Phi$ est inversible (non singulière) la solution est unique et a pour expression :

$$\hat{\theta} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y \quad (3.47)$$

L'estimateur écrit ci-dessus présente l'avantage d'être simple et rapide. Malheureusement il s'avère biaisé dans le cas général.

- Les valeurs prédites du vecteur Y sont données par :

$$\hat{Y} = \Phi \hat{\theta} \quad (3.48)$$

Pour une observation: $\hat{y}_k = \varphi_k^T \hat{\theta}$.

Ou encore :

$$\hat{Y} = \Phi(\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y \quad (3.49)$$

Avec : $\hat{\theta} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y$

- Le vecteur d'erreur s'écrit :

$$\hat{E} = Y - \hat{Y} \quad (3.50)$$

Pour une observation: $\hat{e}_k = y_k - \hat{y}_k$.

Remarque

On appelle pseudo-inverse de Φ la matrice, notée : $\Phi^\dagger = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T$.

Notation sur Matlab : $pinv(\Phi)$.

Biais : lorsque les signaux sont bruités, on ne peut obtenir les valeurs exactes des paramètres, mais on peut s'en approcher. L'estimation $\hat{\theta}$ de θ , vecteur des paramètres à identifier, est non biaisée si $E(\hat{\theta}) = \theta$.

Calcul du biais de l'estimateur

$$\begin{aligned} E[\hat{\theta}] &= E\left[(\varphi^T \varphi)^{-1} \varphi^T y\right] \quad \text{Et } y = \varphi \theta + e \\ &= E\left[\theta + (\varphi^T \varphi)^{-1} \varphi^T e\right] \\ &= \theta + E\left[(\varphi^T \varphi)^{-1} \varphi^T e\right] \end{aligned} \quad (3.51)$$

L'estimateur est non biaisé si :

$$E[\hat{\theta}] = \theta \quad (3.52)$$

Donc si :

$$E\left[\left(\varphi^T \varphi\right)^{-1} \varphi^T e\right] = 0 \quad (3.53)$$

- L'estimateur des moindres carrés est non biaisé si :

- $e(k)$ est une perturbation à moyenne nulle.
- $e(k)$ n'est pas corrélé avec $e(j)$, $\forall k \neq j$.
- $e(k)$ est non corrélé avec les variables explicatives (φ_k).

$$E(\hat{\theta}) = \theta_0 \Rightarrow \begin{cases} E(e_k) = 0 \\ E(e_k e_j) = 0 \quad \forall k \neq j \\ E(\varphi_k e_k) = 0 \end{cases} \quad (3.54)$$

Et lorsque les conditions précédentes sont vraies, e est un bruit blanc.

-Si l'estimateur est biaisé, la variance des paramètres estimés est donnée par :

$$Cov(\hat{\theta}) = E\left[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^T\right] = \hat{\sigma}_e^2 (\Phi^T \Phi)^{-1} \quad (3.55)$$

Où σ représente l'écart type de bruit $e(k)$.

$$\text{Avec : } \hat{\sigma}_e^2 = \frac{J(\hat{\theta})}{N-n} = \frac{\sum_{k=1}^N (y_k - \hat{y}_k)^2}{N-n}$$

Cette matrice s'écrit sous la forme suivante:

$$Cov(\hat{\theta}) = \begin{bmatrix} Cov(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_1) & Cov(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) & \dots & Cov(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_n) \\ Cov(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_1) & Cov(\hat{\theta}_2, \hat{\theta}_2) & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & Cov(\hat{\theta}_{n-1}, \hat{\theta}_n) \\ Cov(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_n) & Cov(\hat{\theta}_2, \hat{\theta}_n) & \dots & Cov(\hat{\theta}_n, \hat{\theta}_n) \end{bmatrix} = \hat{\sigma}_e^2 (\Phi^T \Phi)^{-1} \quad (3.57)$$

- Le $i^{\text{ème}}$ élément de la diagonale donne la variance de la $i^{\text{ème}}$ composante du vecteur θ .
- Les éléments en dehors de la diagonale reflètent les dépendances entre les composantes du vecteur θ .
- Si cette matrice est quasi-diagonale donc les paramètres sont estimés indépendamment les uns des autres.

Propriété des moindres carrés

Comme on pouvait l'imaginer, la variance des paramètres dépend proportionnellement à la variance du bruit. Pour avoir une meilleure estimation des paramètres, un signal d'excitation plus riche doit être choisi afin que la matrice d'information devienne plus importante. On peut toujours augmenter le nombre de données N pour réduire la variance des paramètres. De façon générale, la méthode des moindres carrés basée sur l'erreur d'équation est simple à mettre en œuvre (régression linéaire) mais donne souvent des estimations biaisées car l'erreur d'équation est corrélée avec le régresseur. C'est l'élimination du biais en présence d'erreurs (perturbations, bruit de mesure, erreurs de modèle) qui est à l'origine du développement de la plupart des méthodes d'identification.

3.7.3 Moindre carrée réursive

Parfois, l'évaluation doit être faite chaque fois que l'information est provenir d'échantillons d'entrée / sortie, c'est-à-dire dans chaque période d'échantillonnage. La technique qui convient à cet effet est la méthode des moindres carrés récursifs. Avec cette méthode, un modèle supposé de la période d'échantillonnage précédente $\hat{\theta}(t-1)$ est utilisé pour l'évaluation de la sortie du système $y(t)$ estimé dans la période d'échantillonnage donnée. La sortie estimée du système est comparée à la sortie réelle du système $\hat{y}(t)$ et sur la base de la différence obtenue, un signal d'erreur $\varepsilon(t)$ est généré. Maintenant, ce qu'on appelle le mécanisme de mise à jour, sur la base du signal d'erreur, corrige les valeurs des paramètres supposés du système $\hat{\theta}(t)$ sur $\hat{\theta}(t-1)$.

Considérons un lot de mesures supplémentaires :

$$y_k = \phi_k \theta + e \quad (3.57)$$

Et les nouveaux vecteurs et matrices globaux :

$$Y_k = \begin{pmatrix} y(1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y(k) \end{pmatrix} \quad \Phi_k = \begin{pmatrix} \Phi^T(1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Phi^T(k) \end{pmatrix} \quad E_k = \begin{pmatrix} E(1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ E(k) \end{pmatrix}$$

On a :

$$\hat{\theta}_k = \left[\sum_{i=1}^k \phi_k^T(i) \phi^T(i) \right]^{-1} \sum_{i=1}^k \phi(i) y(i) \quad (3.58)$$

En posant :

$$P_k = \left[\sum_{i=1}^k \phi_k^T(i) \phi^T(i) \right]^{-1} \quad (3.59)$$

La formule (3.59) devient comme suit :

$$\hat{\theta}_k = P_k \sum_{i=1}^k \phi(i) y(i) \quad (3.60)$$

Le vecteur de paramètre à l'instant $k+1$ peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{k+1} &= P_{k+1} \sum_{i=1}^{k+1} \phi(i) y(i) = P_{k+1} \left[\sum_{i=1}^k \phi(i) y(i) + \phi(k+1) y(k+1) \right] \\ &= P_{k+1} \left[P_k^{-1} \hat{\theta}_k + \phi(k+1) y(k+1) \right] \\ &= P_{k+1} \left[P_{k+1}^{-1} - \phi(k+1) \phi^T(k+1) \right] \hat{\theta}_k + P_{k+1} \phi(k+1) y(k+1) \\ &= \hat{\theta}_k + P_{k+1} \phi(k+1) \left[y(k+1) - \phi^T(k+1) \hat{\theta}_k \right] \end{aligned}$$

L'algorithme des moindres carrés peut être présenté par les deux équations récurrentes suivantes:

$$\hat{\theta}_{k+1} = \hat{\theta}_k + P_{k+1} \varphi(k+1) \left[y(k+1) - \varphi^T(k+1) \hat{\theta}_k \right] \quad (3.61)$$

$$P_{k+1}^{-1} = P_k^{-1} + \varphi(k+1) \varphi^T(k+1) \quad (3.62)$$

Pour éviter l'inversion de la matrice P_{k+1} à chaque itération, on peut utiliser la lemme d'inversion matricielle. Selon cette lemme soient A , C et $C^{-1} + DA^{-1}B$ des matrices inversibles, alors :

$$(A + BCD)^{-1} = (A^{-1} - A^{-1}B) \left[C^{-1} + DA^{-1}B \right]^{-1} DA^{-1} \quad (3.63)$$

Il est facile de démontrer que $(A + BCD)(A^{-1} - A^{-1}B) \left[C^{-1} + DA^{-1}B \right]^{-1} DA^{-1} = I$.

Prenons $A = P_k^{-1}$, $B = \varphi(k+1)$, $C = 1$, $D = \varphi^T(k+1)$ dans l'équation (3.62) on obtient :

$$P_{k+1} = P_k - \frac{P_k \varphi(k+1) \varphi^T(k+1) P_k}{1 + P_k \varphi(k+1) \varphi^T(k+1)} \quad (3.64)$$

Il existe deux façons d'initialiser la récurrence:

- Des valeurs initiales sont fixées, généralement $\hat{\theta}_0 = 0$ et $P_0 = \alpha I$ où α représente un très grand scalaire (par exemple $\alpha = 100$) et I la matrice unité.
- La récurrence commence à l'itération $p+1$ (si l'on estime p paramètres) avec:

$$\hat{\theta}_p = \Phi_p^{-1} y_p \text{ et } P_p = \left[\Phi_p^T \Phi_p \right]^{-1} \quad (3.65)$$

3.8 Exemple d'un circuit RC

Voici un exemple d'un circuit RC composé d'une résistance et d'un condensateur associés en série, alimenté par une source de tension.

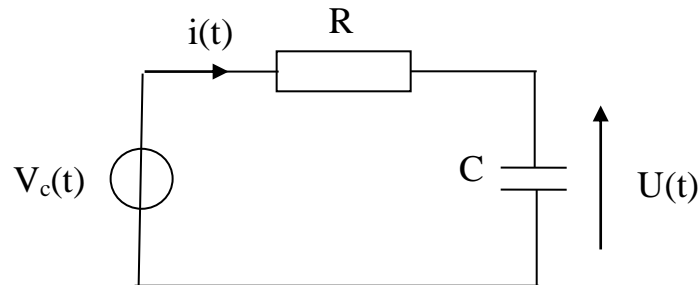


Figure 3.9 Schéma représentant un circuit RC.

La première étape lors d'une modélisation du système est sa mise en équation, en utilisant si nécessaire les lois de la physique.

3.8.1 Equations dynamiques

D'après la figure (3.9) nous obtenons les équations physiques du circuit.

L'équation de la tension:

$$U(t) = Ri(t) + V_c \quad (3.66)$$

Où : R est la résistance, et V_c est la tension aux bornes du condensateur.

L'équation de courant :

$$i(t) = c \frac{dV_c}{dt}$$
$$\Rightarrow V_c = \frac{1}{c} \int i \cdot dt \quad (3.67)$$

On remplace l'équation (3.67) dans (3.66), nous obtenons l'équation suivante :

$$U(t) = Ri(t) + \frac{1}{c} \int i \cdot dt \quad (3.68)$$

$$\Rightarrow \frac{dU}{dt} = R \frac{di}{dt} + \frac{1}{c} i(t) \quad (3.69)$$

Ou $u(t)$ est considéré comme entrée du système et le courant $i(t)$ est la sortie.

3.8.2 La fonction de transfert

L'étape suivante de la modélisation est la définition de la fonction de transfert, pour ce faire ; nous appliquons la transformation de Laplace sur l'équation (3.69) alors :

$$p.U(p) = p.R.I(p)$$

$$\Rightarrow I(p) \cdot (R \cdot p + \frac{1}{c}) = p.U(p)$$

$$\Rightarrow G(p) = \frac{I(p)}{U(p)} = \frac{p}{R \cdot p + \frac{1}{c}} \quad (3.70)$$

Le passage du contenu au discret nécessite l'utilisation de la transformée en z, alors nous introduisons un bloqueurs d'ordre zéro de la manière suivante :

$$G(z) = TZ \left[Bo(p) \frac{I(p)}{U(p)} \right]$$

$$\Rightarrow G(z) = (1 - z^{-1}) TZ \left[\frac{G(p)}{p} \right]$$

$$\Rightarrow G(z) = \frac{(1 - z^{-1}) \frac{1}{R}}{1 - e^{-\frac{1}{RCT_e}} \cdot z^{-1}}$$

$$\Rightarrow G(z) = \frac{I(z)}{U(z)} = \frac{b(1 - z^{-1})}{1 - a \cdot z^{-1}} \quad (3.71)$$

Avec : $b = \frac{1}{R}$, et $a = e^{-\frac{1}{RCT_e}}$.

Finalement, la transformation en discret donne :

$$G(k) = \frac{I(k)}{U(k)} = \frac{b(1-k^{-1})}{1-ak^{-1}} \quad (3.72)$$

3.8.3 Analysé les données

Nous disposons des mesures obtenues en temps réels qui représentent l'entrée et la sortie de notre circuit. Dans la figure ci-dessous, nous présentons l'évolution de l'entrée (la tension) et la sortie (le courant) en fonction du temps.

Signal d'entrée

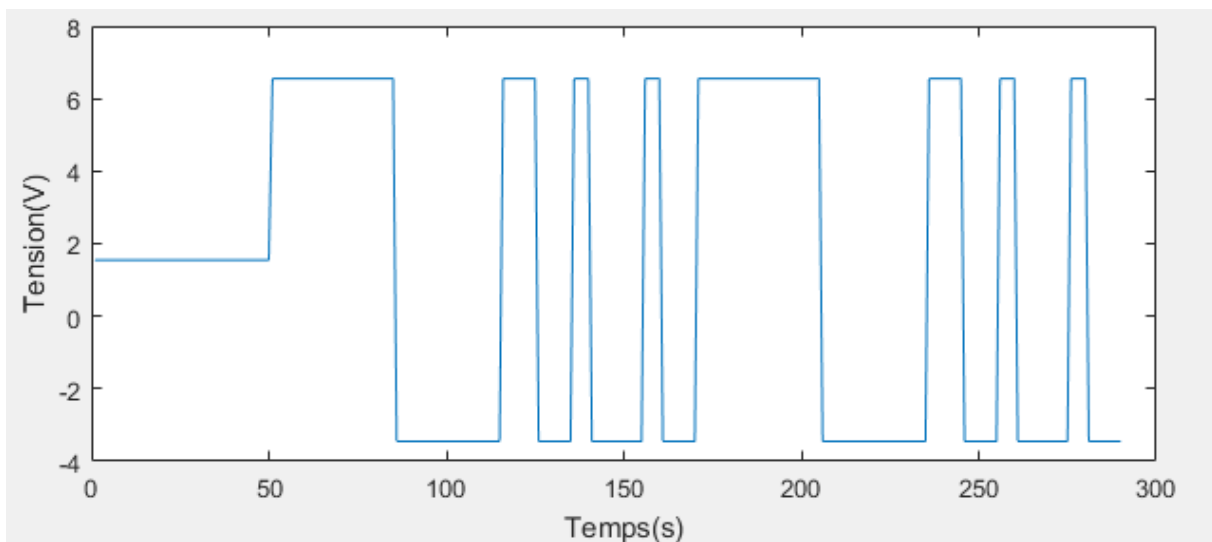


Figure 3.10 Evolution de la commande U (tension) en fonction du temps.

Signal de sortie

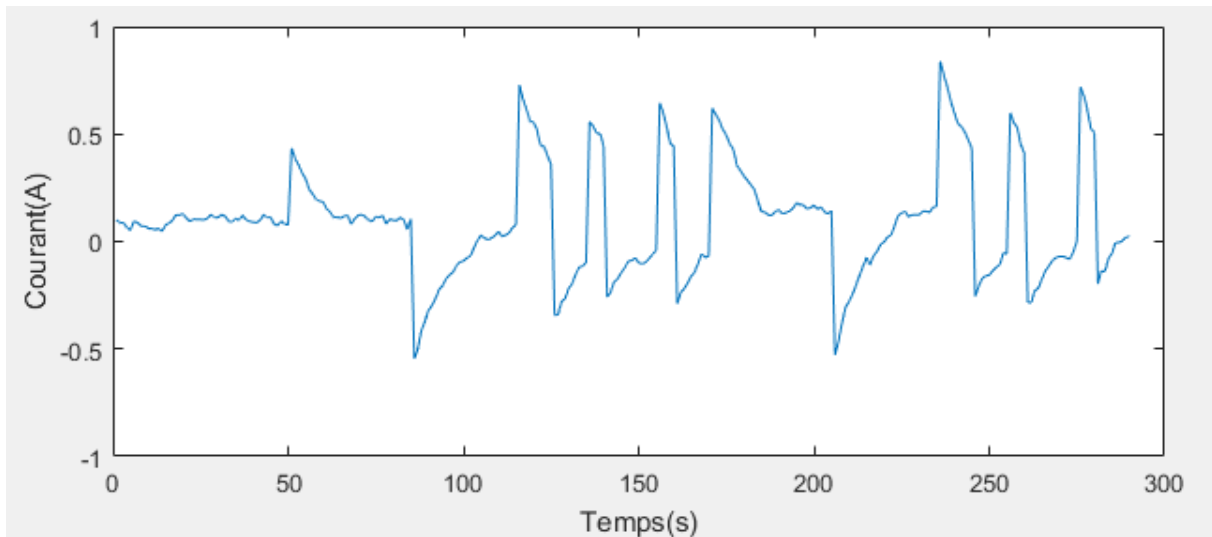


Figure 3.11 Evolution de la sortie Y (courant) en fonction du temps.

Nous remarquons qu'il y a un offset dans l'intervalle $[0, 50]$ au niveau du signal d'entrée et de sortie, il faut alors l'éliminer.

Elimination de l'offset (Centré les données)

Pour commencer à utiliser la méthode de moindres carrés, il faut d'abord centrer les valeurs des vecteurs d'entrée et de sortie. Nous posons $Y = I$.

$$\begin{aligned} I_{moy} &= \text{mean}(I(1:50)) \\ U_{moy} &= \text{mean}(U(1:50)) \end{aligned} \tag{3.73}$$

Nous avons pris les valeurs de 1 à 50 car il existe un offset dans cet intervalle.

$$\begin{aligned} y &= Y - I_{moy} \\ u &= U - U_{moy} \end{aligned} \tag{3.74}$$

Les figures ci-dessous présentent les résultats obtenus après l'élimination de l'offset.

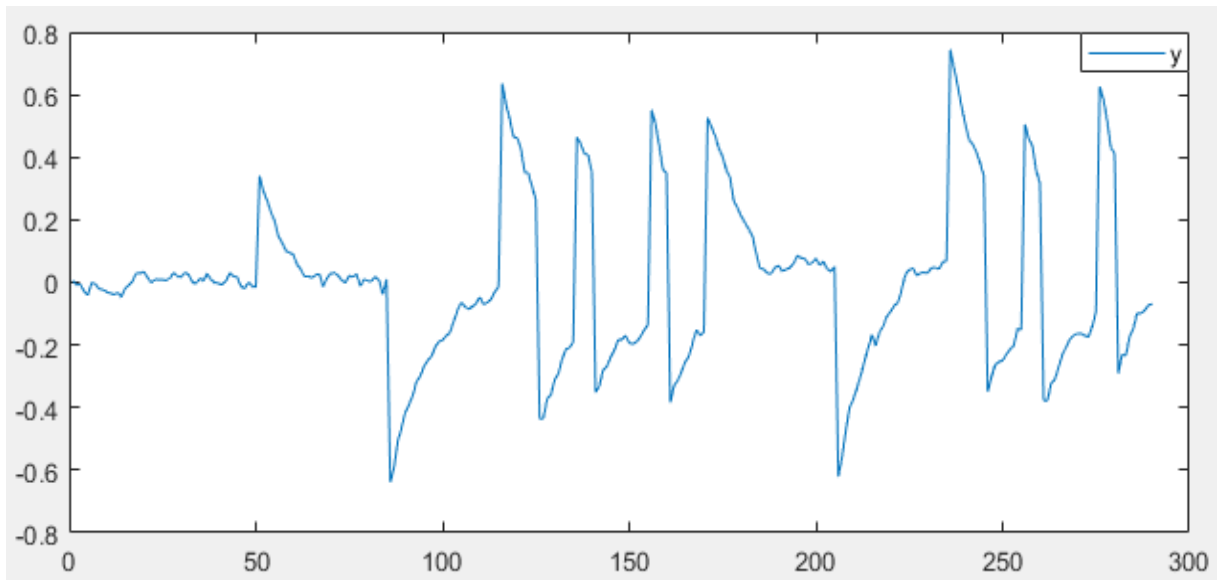


Figure 3.12 Les valeurs de la sortie « y » après l'élimination de l'offset.

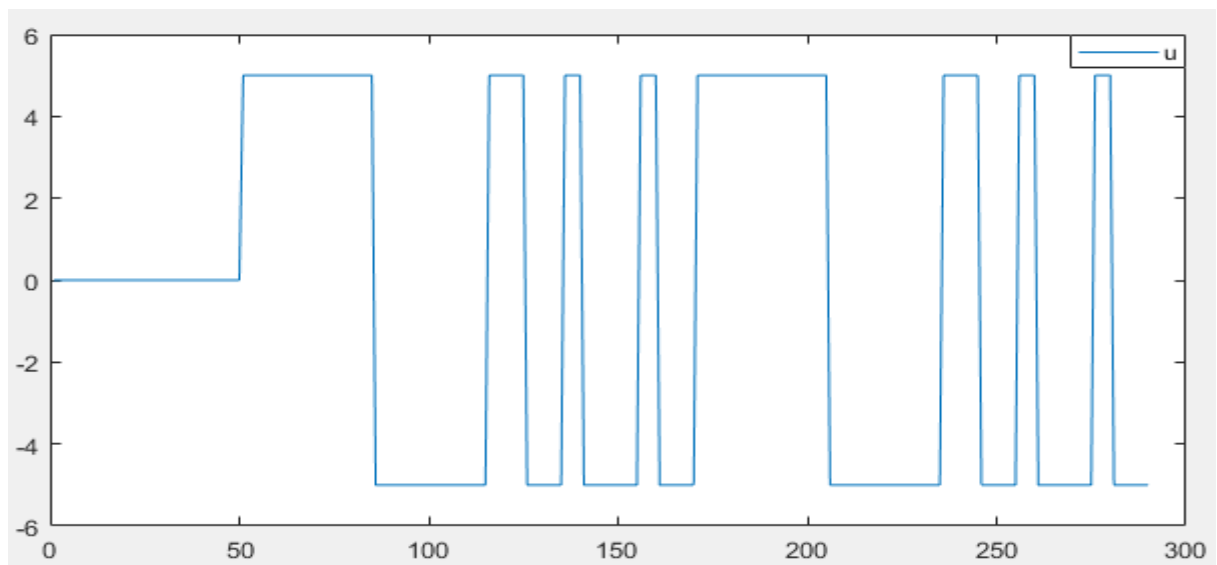


Figure 3.13 Les valeurs de la commande « u » après l'élimination de l'offset.

3.8.4 Estimation des paramètres du modèle par la méthode des moindres carrés

a) Méthode des moindres carrés normale

D'après l'équation (3.72), nous obtenons:

$$\frac{I(k)}{U(k)} = \frac{b_0 - b_1.k^{-1}}{1 - a.k^{-1}}$$

$$\Rightarrow I(k) = -a.I(k-1) + b_0.U(k) - b_1.U(k-1)$$

Nous posons $Y = I$ donc la formule devient comme suit :

$$\Rightarrow y(k) = -a.y(k-1) + b_0.u(k) - b_1.u(k-1) \quad (3.75)$$

De l'équation (3.71) nous obtenons le vecteur θ et le vecteur Φ :

$$\theta = [a \quad b_0 \quad -b_1]^T \quad (3.76)$$

$$\Phi = [-y(k-1) \quad u(k) \quad u(k-1)] \quad (3.77)$$

Estimation des paramètres θ

Pour calculer les valeurs $\hat{\theta}$, nous appliquons:

$$\hat{\theta} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T y(k) \quad (3.78)$$

Et après l'application de la formule (3.78) sous Matlab, La simulation donne les résultats suivants :

$$\hat{\theta} = \begin{bmatrix} -0.9093 \\ 0.0667 \\ -0.0671 \end{bmatrix}$$

Le vecteur paramètre ainsi obtenu permet de définir les coefficients du modèle du processus qui minimise l'erreur entre les sorties réelles et celle du modèle au sens des moindres carrés.

Et après avoir comparé entre les résultats de $\hat{\theta}$ et la formule (3.76), on conclut les coefficients suivante :

$$\begin{aligned} a &= -0.9093 \\ b_0 &= 0.0667 \\ b_1 &= -0.671 \end{aligned}$$

Les valeurs prédites du vecteur Y sont données par :

$$\hat{Y} = \Phi \hat{\theta} \quad (3.79)$$

La figure ci-dessous illustre les deux courbes $y(k)$ et $\hat{y}(k)$.

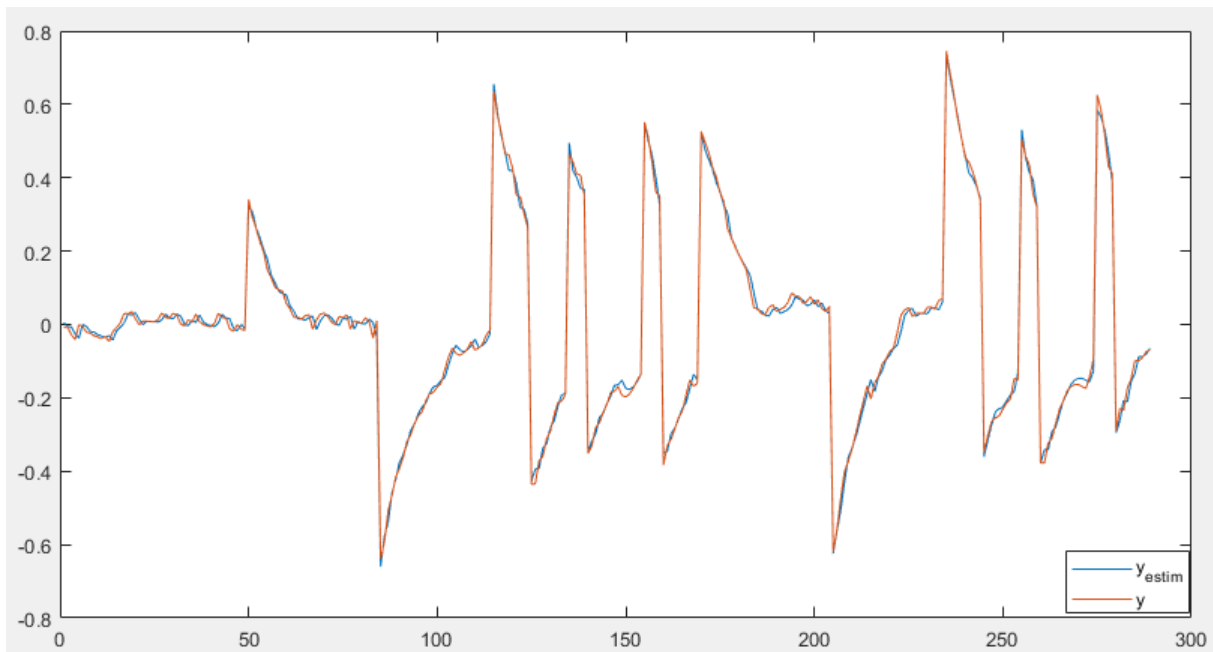


Figure 3.14 Les valeurs des $y(k)$ et $\hat{y}(k)$.

D'après la figure 3.14, nous constatons que les deux courbes $y(k)$ mesuré et $\hat{y}(k)$ sont quasiment identiques mais avec une présence d'un petit déphasage entre eux et donc l'estimation du paramètre du modèle est presque proche de les vrais valeurs du système,

Lorsque l'amplitude de la sortie augmente plus tard, on remarque que l'erreur entre la sortie mesurée et estimée diminue, cela signifie que notre estimateur est précis.

Calcul de l'erreur de prédiction

L'erreur estimée est appelée « résidu » ou « erreur de prédiction ». C'est l'écart entre la sortie réelle et la sortie prédite à l'instant k .

$$e_estim = y(k) - \hat{y}(k) \quad (3.80)$$

$$erreur1 = \text{sum}(e_estim * e_estim) = 0.0927$$

L'erreur estimée n'est pas nul, donc l'estimateur est biaisé, l'estimateur non biaisé est souhaitable, mais pas indispensable, la variance des paramètres estimés est donnée par:

$$Cov(\hat{\theta}) = \text{sum} \left[\frac{(y(k) - \hat{y}(k))^2}{((N-1) - n)(\Phi^T \Phi)^{-1}} \right] \quad (3.81)$$

Y : Vecteur des valeurs prises par la variable à expliquer de dimension $Y = N \times 1$.

θ : Vecteur des paramètres de dimension $\theta = n \times 1$.

N : est le nombre d'observations.

n : est le nombre de paramètres.

Les résultats de la simulation donnent :

$$Cov(\hat{\theta}) = \begin{bmatrix} 0.4249 & 0.0016 & -0.0174 \\ 0.0016 & 0.0023 & 0.0019 \\ -0.0174 & 0.0019 & 0.0030 \end{bmatrix}$$

Modèle ARX obtenu par Matlab

Nous posons la notation suivante : $nn = [na \ nb \ nk]$; où na et nb correspondent respectivement au nombre de paramètres à estimer dans les polynômes A et B (ordre des polynômes à estimer) et nk représente le retard.

$$nn = [1 \ 2 \ 0]$$

La fonction $[tharx] = arx(z, nn)$; Estime des paramètres par moindres carrés.

✚ Les paramètres estimés ainsi que leur écart-type sont:

$$A(z)y(t) = B(z)u(t) + e(t) \quad (3.82)$$

$$A(z) = 1 - 0.9093.z^{-1}$$

$$B(z) = 0.06671 - 0.06712.z^{-1}$$

Coefficients de $A(z)$ suivant les puissances décroissantes :

$$A = [1 \ -0.9093]$$

Coefficients de $B(z)$ suivant les puissances décroissantes :

$$B = [0.06671 \ -0.06712]$$

Les coefficients A et B sont donnés avec une petite variation dans les paramètres θ , et l'ajustement se fait comme suit:

$$A(z) = 1 - 0.9093(+/-0.006507)z^{-1}$$

$$B(z) = 0.06671(+/-0.0004765) - 0.06712(+/-0.0005462)z^{-1}$$

Fonction de transfert

✚ La fonction de transfert en temps discret

La fonction de transfert en temps discret avec les nouveaux paramètres A et B est :

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{0.06671 - 0.06712 \cdot z^{-1}}{1 - 0.9093 \cdot z^{-1}} \quad (3.83)$$

La fonction de transfert en temps continu

On applique la fonction « d2c » pour obtenir la fonction de transfert en temps continu :

$$H(s) = \frac{0.06671s - 28.38}{s + 6339} \quad (3.84)$$

b) Estimation des paramètres a et b (méthodes de dérivation)

Nous appliquons la méthode de dérivation de la manière suivante :

D'après l'équation (3.72) on a :

$$\begin{aligned} y(k) &= -a \cdot y(k-1) + b \cdot (u(k) - u(k-1)) \\ \Rightarrow y(k) &= -a \cdot y(k-1) + b \cdot \Delta u(k) \end{aligned} \quad (3.85)$$

Tel que : $\Delta u(k) = u(k) - u(k-1)$

D'après la formule (3.82) on obtient le vecteur Φ_2 :

$$\theta_2 = [a \quad b]^T \quad (3.86)$$

$$\Phi_2 = [-y(k-1) \quad \Delta u(k)] \quad (3.87)$$

Estimation des paramètres θ

Pour estimer les valeurs estimées de θ_2 , il faut s'appliquer cette formule suivante :

$$\hat{\theta}_2 = (\Phi_2^T \Phi_2)^{-1} \Phi_2^T y(k) \quad (3.88)$$

Et après l'utilisation de la formule (3.88), la simulation donne:

$$\hat{\theta}_2 = \begin{bmatrix} -0.9039 \\ 0.0668 \end{bmatrix}$$

Et par comparaison entre les résultats obtenus et la formule générale (3.86), on conclut que les coefficients a et b sont :

$$a = -0.9039$$

$$b = 0.0668$$

Calcul de l'erreur de prédiction

Calcul du $\hat{y}_2(k)$:

$$\hat{y}_2(k) = \Phi_2 \theta_2 \quad (3.89)$$

Après le calcul des valeurs de $\hat{y}_2(k)$, La simulation donne :

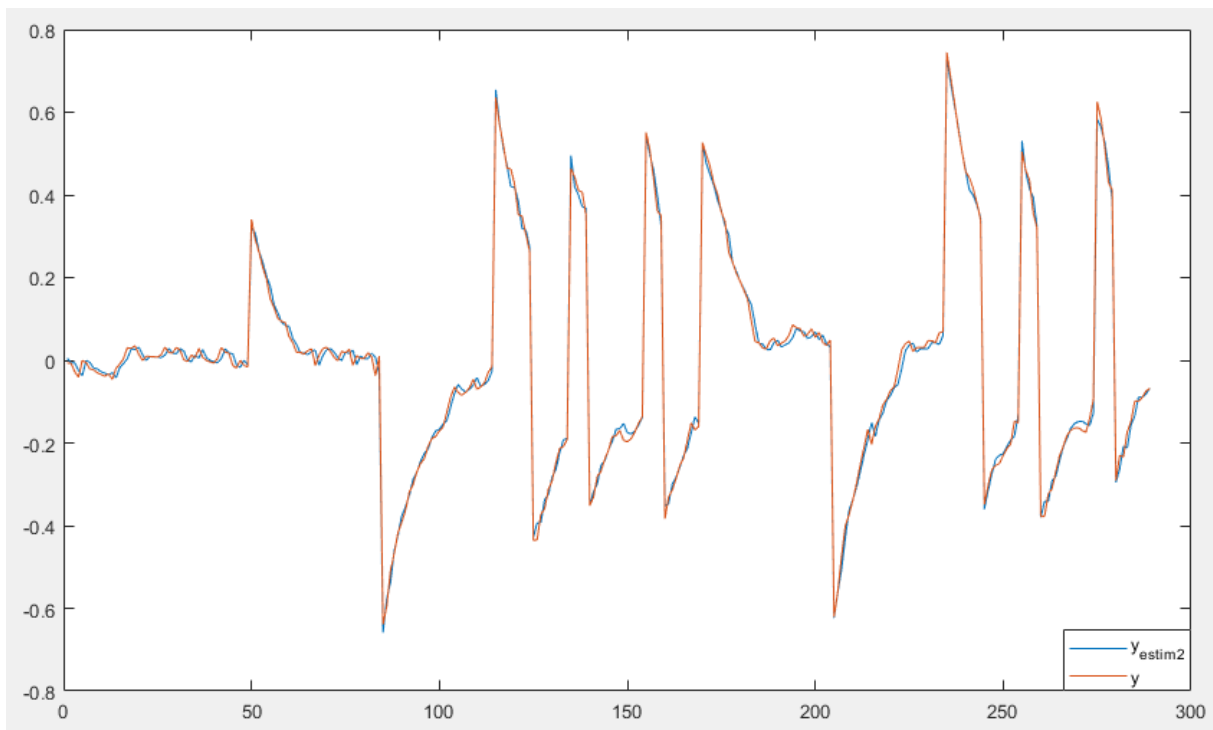


Figure 3.15 Les valeurs des $y(k)$ et $\hat{y}_2(k)$ estimés.

D'après la figure 3.15, nous constatons que les deux courbes $y(k)$ mesuré et $\hat{y}_2(k)$ sont quasiment identiques mais avec une présence d'un petit déphasage entre les deux courbes, et donc l'estimation du paramètre du modèle est presque proche des vraies valeurs du système, on remarque dans l'intervalle $[0, 50]$ l'erreur ou l'écart entre la sortie mesurée et estimée est

important et lorsque l'amplitude augmente on observe que cet erreur diminué. On peut dire que notre estimateur est précis.

Afin d'analyser les figures, nous calculons l'erreur de prédiction :

$$e_estim2 = y(k) - \hat{y}_2(k) \quad (3.90)$$

$$erreur2 = \text{sum}(e_estim2 * e_estim2) = 0.0931$$

L'erreur estimé n'est pas nul, donc l'estimateur est biaisé, la variance des paramètres estimés est donné par:

$$\text{Cov}(\hat{\theta}_2) = \frac{(y(k) - \hat{y}_2(k))^2}{((N-1) - n_2)(\Phi_2^T \Phi_2)^{-1}} \quad (3.91)$$

y : Vecteur des valeurs prises par la variable à expliquer de dimension $Y = N \times 1$.

\hat{y} : Vecteur des valeurs estimés de y .

θ_2 : Vecteur des paramètres de dimension $\theta_2 = n_2 \times 1$.

N : est le nombre d'observations.

n_2 : est le nombre de paramètres.

Et après l'utilisation de la formule (3.91) sous Matlab, la simulation donne ce résultat:

$$\text{Cov}(\hat{\theta}_2) = \begin{bmatrix} 0.1732 & -0.0032 \\ -0.0032 & 0.0022 \end{bmatrix}$$

Modèle « ARX » obtenu par Matlab

Nous posons la notation suivante : $nn = [na \quad nb \quad nk]$; Tel que na et nb correspondent respectivement au nombre de paramètres à estimer dans les polynômes A et B (ordre des polynômes à estimer) et nk représente le retard.

$$nn = [1 \quad 1 \quad 0]$$

La fonction $[tharx] = \text{arx}(z, nn)$; Estime des paramètres par moindres carrés.

✚ Les paramètres estimés ainsi que leur écart-type sont:

$$A_d(z)y(t) = B_d(z)u(t) + e(t) \quad (3.92)$$

$$A_d(z) = 1 - 0.9039.z^{-1}$$

$$B_d(z) = 0.06681$$

Coefficients de A(z) suivant les puissances décroissantes :

$$A_d = [1 \quad -0.9039]$$

Coefficients de B(z) suivant les puissances décroissantes :

$$B_d = [0.06681]$$

Fonction de transfert

✚ La fonction de transfert en temps discret

La fonction de transfert en temps discret avec les nouveaux paramètres A et B est :

$$H_2(z) = \frac{B_d(z)}{A_d(z)} = \frac{0.06681}{1 - 0.9039.z^{-1}} \quad (3.93)$$

✚ La fonction de transfert en temps continu

On applique la fonction « d2c » pour obtenir la fonction de transfert en temps continu :

$$H_2(s) = \frac{0.06681s + 4683}{s + 6735} \quad (3.94)$$

c) Estimation de deux paramètres a et b (méthodes d'intégration)

D'après l'équation (3.72) on a :

$$y(k) = -a.y(k-1) + b(u(k) - u(k-1)) \quad (3.95)$$

Nous savons que:

$$\begin{aligned} u(k-1) &= u(k).k^{-1} \\ \text{et} \\ y(k-1) &= y(k).k^{-1} \end{aligned} \tag{3.96}$$

Donc l'équation devient de forme suivante :

$$\begin{aligned} y(k) &= -a.y(k).k^{-1} + b.(u(k) - u(k).k^{-1}) \\ \Rightarrow y(k)[1 + ak^{-1}] &= b.u(k)[1 - k^{-1}] \end{aligned}$$

Ensuite :

$$\frac{y(k)}{1 - k^{-1}} = \frac{b.u(k)}{1 + a.k^{-1}}$$

Posons: $y_i = \frac{y(k)}{(1 - k^{-1})} \Rightarrow y_i = \frac{b.u(k)}{1 + a.k^{-1}}$

Ensuite, nous obtenons :

$$\begin{aligned} y_i(k) + a.y_i(k-1) &= b.u(k) \\ \Rightarrow y_i(k) &= -a.y_i(k-1) + b.u(k) \end{aligned} \tag{3.97}$$

Et

$$\begin{aligned} y_i(k) &= y_i(k-1) + y(k) \\ y(k) &= y_i(k) - y_i(k-1) \end{aligned} \tag{3.98}$$

D'après la formule (3.97) on obtient le vecteur θ_3 et Φ_3 :

$$\theta_3 = [a \quad b]^T \tag{3.99}$$

$$\Phi_3 = [-y_i(k-1) \quad u(k)] \tag{3.100}$$

Estimation des paramètres θ

Les valeurs de $\hat{\theta}_3$ sont de la forme suivante:

$$\hat{\theta}_3 = (\Phi_3^T \Phi_3)^{-1} \Phi_3^T y(k) \quad (3.101)$$

Et après l'utilisation de la formule (3.101) sous Matlab, la simulation donne ce résultat :

$$\hat{\theta}_3 = \begin{bmatrix} -0.9404 \\ 0.0551 \end{bmatrix}$$

Donc les coefficients a et b sont :

$$a = -0.9404$$

$$b = 0.0551$$

Calcul de l'erreur de prédiction

Calcul du $y_i(k)$ estimé

$$\hat{y}_i(k) = \Phi_3 \theta_3 \quad (3.102)$$

Calcul de $y_{int}(k)$

D'après la formule (3.98) on calcule y_{int}

$$y_{int}(k) = \hat{y}_i(k) - \hat{y}_i(k-1) \quad (3.103)$$

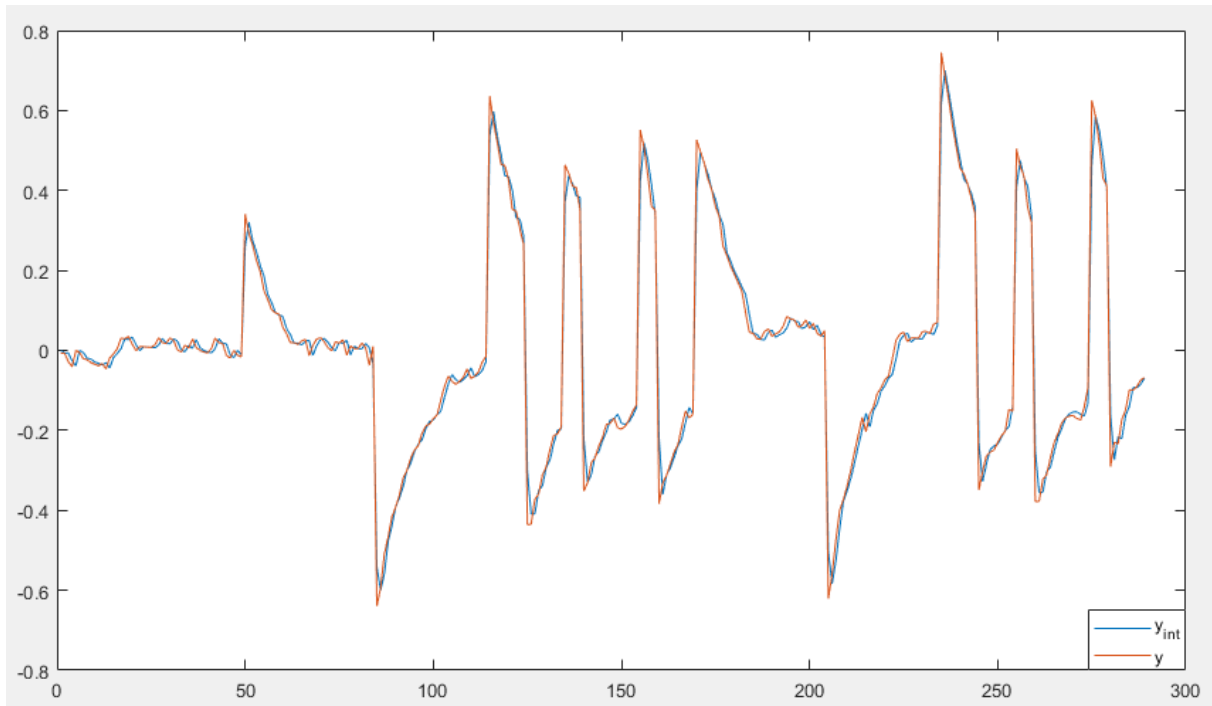


Figure 3.16 Les valeurs de $y(k)$ et de $y_{\text{int}}(k)$.

D'après la figure 3.16, nous constatons que les deux courbes $y(k)$ mesuré et $y_{\text{int}}(k)$ sont presque identiques mais avec un déphasage important entre la sortie mesuré et la sortie estimé, et, l'erreur ou l'écart entre la sortie mesuré et estimé est important. On peut dire que l'estimateur est biaisé qui signifie que notre estimateur n'est pas précis.

Afin d'analyser la figure, maintenant il faut calculer l'erreur de prédiction:

$$e_{\text{estim3}} = y(k) - y_{\text{int}}(k) \quad (3.104)$$

$$\text{erreur3} = \text{sum}(e_{\text{estim3}} * e_{\text{estim3}}) = 0.3527$$

L'erreur estimé n'est pas nul donc l'estimateur est biaisé, la variance des paramètres estimés est donné par:

$$\text{Cov}(\hat{\theta}_3) = \frac{(y_i(k) - \hat{y}_i(k))^2}{((N-1) - n_3)(\Phi_3^T \Phi_3)^{-1}} \quad (3.105)$$

Y : Vecteur des valeurs prises par la variable à expliquer de dimension $Y = N \times 1$.

θ_3 : Vecteur des paramètres de dimension $\theta_3 = n_3 \times 1$.

N : est le nombre d'observations.

n_3 : est le nombre de paramètres.

Après la simulation sous Matlab on obtient ce résultat :

$$\text{Cov}(\hat{\theta}_3) = \begin{bmatrix} 0.1491 & 0.0278 \\ 0.0278 & 0.0297 \end{bmatrix}$$

Modèle « ARX » obtenu par Matlab

Nous posons la notation suivante :

$nn = [na \quad nb \quad nk]$; Tel que na et nb correspondent respectivement au nombre de paramètres à estimer dans les polynômes A et B (ordre des polynômes à estimer) et nk représente le retard.

$$nn = [1 \quad 1 \quad 0]$$

La fonction $[tharx] = arx(z, nn)$; Estime des paramètres par moindres carrés.

✚ Les paramètres estimés ainsi que leur écart-type sont:

$$A_i(z)y(t) = B_i(z)u(t) + e(t) \tag{3.106}$$

$$A_i(z) = 1 - 0.9404z^{-1}$$

$$B_i(z) = 0.0551$$

Coefficients de $A(z)$ suivant les puissances décroissantes :

$$A_i = [1 \quad -0.9404]$$

Coefficients de $B(z)$ suivant les puissances décroissantes :

$$B_i = [0.0551]$$

Fonction de transfert

La fonction de transfert en temps discret

La fonction de transfert en temps discret avec les nouveaux paramètres A et B est :

$$H_3(z) = \frac{B_i(z)}{A_i(z)} = \frac{0.0551}{1 - 0.9404z^{-1}} \quad (3.107)$$

La fonction de transfert en temps continu

On applique la fonction « d2c » pour obtenir la fonction de transfert en temps continu :

$$H_3(s) = \frac{0.0551s + 3786}{s + 4093} \quad (3.108)$$

3.8.5 Etude comparative

Comparaison entre la méthode normale et la méthode de dérivation

La figure ci-dessous représente les résultats du deux méthodes:

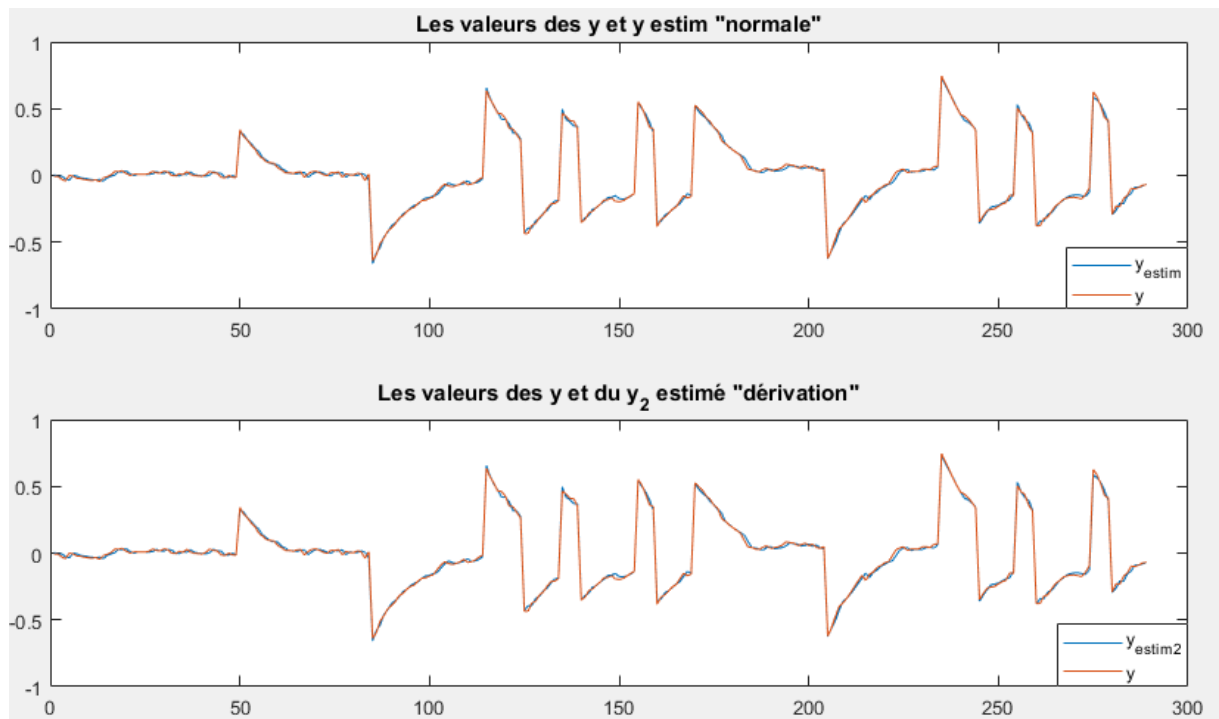


Figure 3.17 Les valeurs de sortie de la méthode normale et la méthode de dérivation.

D'après la figure 3.17 et les résultats obtenus précédemment on conclut que dans les deux méthodes il y a un déphasage entre les deux courbes, lorsque l'amplitude de la sortie des deux systèmes augmente on observe que l'erreur entre la sortie mesurée et la sortie estimée diminue, cela montre qu'il y a une précision, dans la méthode normale est $e=0.0927$ et dans la méthode de dérivation est $e=0.0931$, qui montre que la méthode normale donne une bonne estimation et plus de précision.

Comparaison entre la méthode normale et la méthode d'intégration

La figure ci-dessous présente les résultats des deux méthodes :

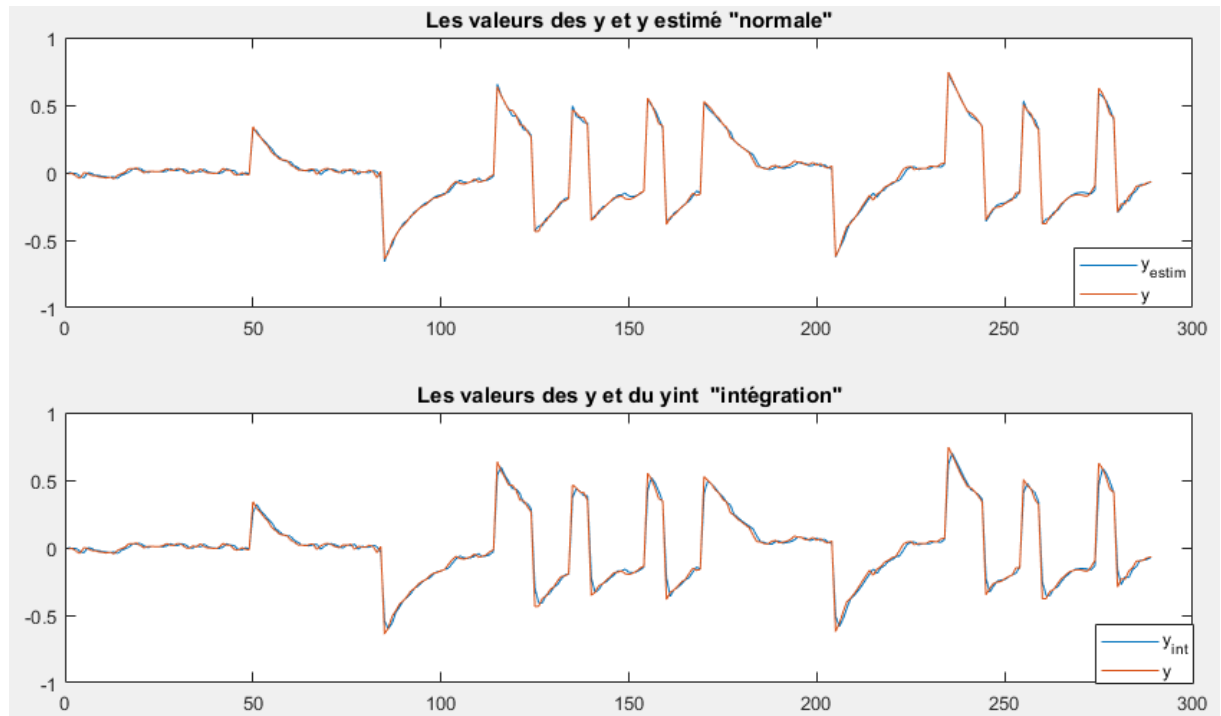


Figure 3.18 Les valeurs de sortie de la méthode normale et la méthode d'intégration.

Nous remarquons d'après le résultat de la simulation que la méthode normale est mieux que la méthode d'intégration en terme de précision parce que l'erreur estimée dans la première méthode est $e=0.0927$ et $e=0.3521$ dans la deuxième méthode, donc l'estimateur dans la méthode normale est plus précis que la méthode d'intégration.

Comparaison entre la méthode d'intégration et la méthode de dérivation:

La figure ci-dessous présente les résultats des deux méthodes :

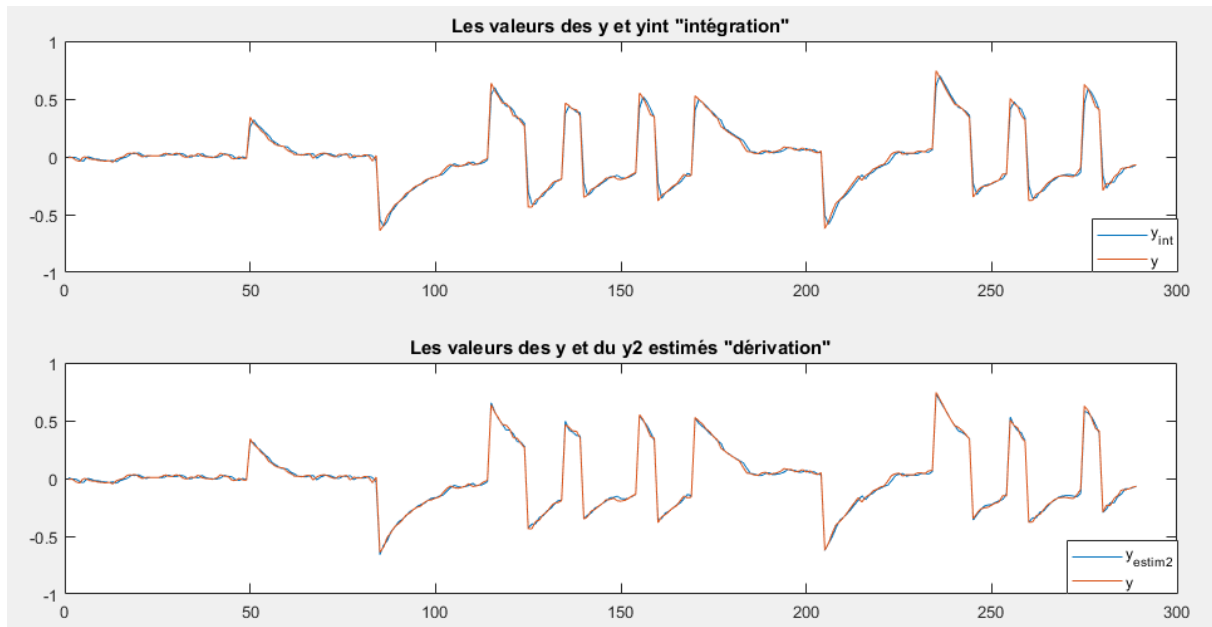


Figure 3.19 Les valeurs de sortie de la méthode dérivation et la méthode d'intégration.

Nous remarquons d'après le résultat de la simulation que la méthode de dérivation est mieux que la méthode d'intégration en terme de précision car l'erreur estimée dans la première méthode est $e=0.0931$ et $e=0.3527$ dans la deuxième méthode, donc l'estimateur dans la méthode dérivation est plus précis que la méthode d'intégration.

- ✚ Et à partir des résultats obtenus précédemment on conclut que la méthode des moindres carrés normale donne une bonne estimation, qui signifie que l'estimateur est plus précis que les méthodes de dérivation et d'intégration.

3.9 Conclusion

L'identification du système, qui est le terme général utilisé pour décrire les processus de modélisation expérimentale, est généralement considérée comme un domaine mature et les méthodes classiques d'identification impliquent des modèles linéaires à temps discret dans un cadre stochastique. L'estimation de la complexité pour un type de modèle permet de déterminer quels sont les paramètres à estimer et quel est leur nombre. L'estimation paramétrique utilise des algorithmes qui à partir des mesures entrées/sorties disponibles, fournissent les paramètres du modèle. Enfin, la dernière étape doit permettre de mettre en évidence si le modèle identifié est représentatif des comportements entrées/sorties du procédé.

CHAPITRE 4 : APPLICATION

4.1 Introduction.....	99
4.2 Représentation sous forme des blocs.....	99
4.3 Analyse des données.....	100
4.4 Le protocole expérimental.....	101
4.5 Centrer les données.....	102
4.6 Le choix de la fonction de transfert.....	103
4.7 Estimation des paramètres du modèle par la méthode des moindres carrés.....	104
4.8 Commande prédictive.....	123
4.9 Conclusion.....	127

CHAPITRE 4 : APPLICATION

4.1 Introduction

Dans ce chapitre nous présentons un processus de broyeur et classificateur. Le processus considéré est une unité de broyage – classification, il est constitué d’un broyeur et d’un séparateur. Le broyeur, à cylindre, est alimenté en matière brute par un débit Q_{ab} . Les particules broyées sont envoyées dans un séparateur qui les divise en 2 classes. Les particules les plus fines forment le produit fini et son débit est noté Q_{pf} ; les plus grosses, d’un débit Q_{cr} , sont recyclées vers le broyeur. Dans la suite, ce débit Q_{pf} représentera la seule grandeur de sortie de notre modèle. La vitesse du séparateur V_s permet d’agir sur la répartition des particules en grosses et fines (classification de la matière).

4.2 Représentation sous forme des blocs

Voici ci-dessous une représentation sous forme des blocs de notre circuit broyeur-séparateur.

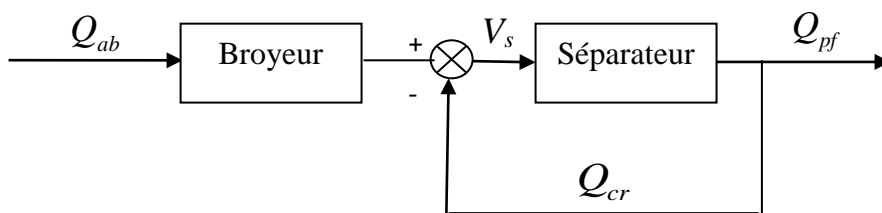


Figure 4.1 Schéma bloc d’un circuit broyage-classification.

Dans la suite du problème, le modèle considéré ne comportera qu’une seule entrée : la vitesse du séparateur V_s et une seule sortie : le débit de produit fini Q_{pf} .

✚ Les autres grandeurs étant constantes durant les campagnes de mesures.

4.3 Analyse des données

Période d'échantillonnage: $T_e = 5mn$.

Signal d'entrée : $U(t) = V_s : tr / mn$.

Signal de sortie: $Y(t) = Q_{pf} : t / h$.

Q_{pf} : Le débit de produit fini.

V_s : La vitesse de séparateur.

Signal d'entrée

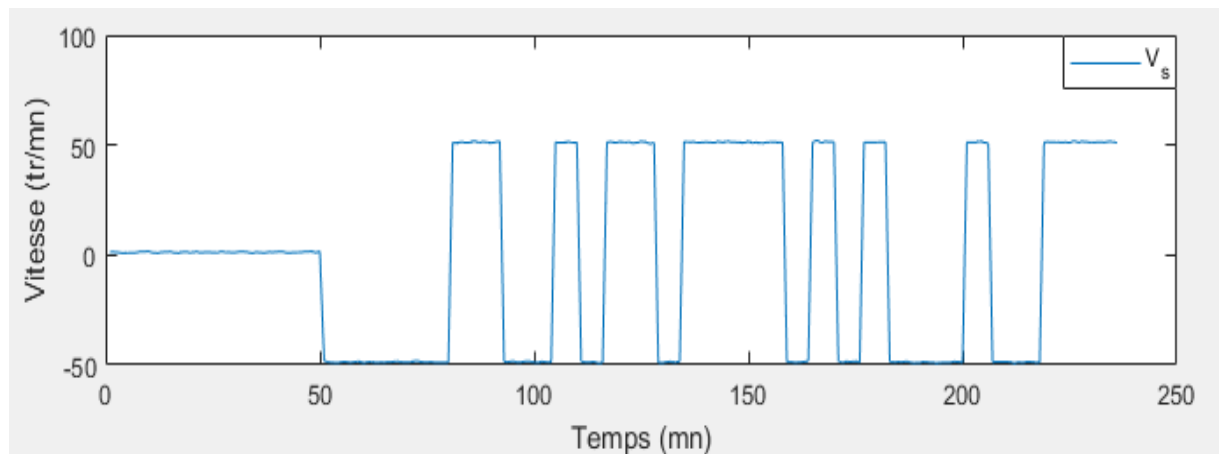


Figure 4.2 Evolution de l'entrée V_s (vitesse) en fonction du temps.

D'après la figure 4.2 on remarque que le signal d'entrée du système a une amplitude varié entre 50 et -50. Le signal d'entrée est de type signal carré à fréquence variable, sous forme $U(t) = u_0 + u(t)$, ou u_0 est le point de fonctionnement, ce signal est en effet un signal conçu grâce à des multitudes des signaux sinusoïdaux avec différentes fréquences. On remarque qu'il y a un offset dans l'intervalle $[0, 50]$. Ce signal est causal et on remarque bien qu'il est riche en harmonique et il couvre une grande bande passante du système.

Signal de sortie

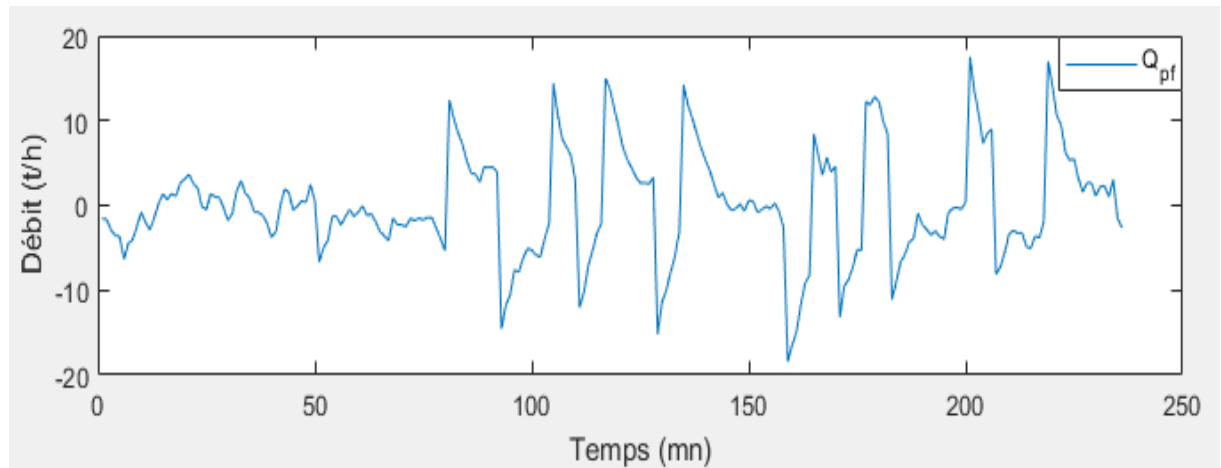


Figure 4.3 Evolution de la sortie Q_{pf} (débit) en fonction du temps.

On remarque que le signal de sortie riche en harmonique et il suit bien la consigne (pas de retard entre l'entrée et la sortie). Ce signal est composé d'un signal déterministe plus un signal bruit aléatoire est connu que par ses propriétés statistiques. Ce signal est de la forme $Y(t) = y(t) + y_0$, ou y_0 est le point de fonctionnement.

- Le signal est de moyenne non nul.
- Le signal est causal car pour $t < 0$, $y(t) = 0$.
- Le signal de sortie suit la consigne donc il y'a pas de retard entre les deux signaux.

4.4 Le protocole expérimental

On doit linéariser le modèle autour d'un point de fonctionnement et lorsque le modèle atteint son point de stabilité, on prend pour chaque période d'échantillonnage une mesure d'entrée et une mesure de sortie. On remarque que le signal de sortie est sous la forme $y(t) = y(t) + y_0$. Ou y_0 : est le point de fonctionnement.

La sortie est composée d'un signal déterministe plus un bruit. Ce bruit est connu que pas ses valeurs statistique car il est de type aléatoire donc la sortie est une réponse d'un système de premier ordre excité par un signal de type échelon.

Ce signal n'est pas riche en harmonique et il couvre une grande partie de la bande passante du système, ainsi que la sortie.

4.5 Centrer les données

Avant d'utiliser la méthode de moindres carrés, il faut d'abord commencer à centrer les valeurs des vecteurs d'entrée et de sortie, parce qu'il existe un offset.

$$\begin{aligned} Q_{pf\ moy} &= \text{mean}(I(1:50)) \\ V_{smoy} &= \text{mean}(U(1:50)) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Nous avons pris les valeurs de 1 à 50 car il existe un offset dans cet intervalle.

$$\begin{aligned} Q &= Q_{pf} - Q_{pf\ moy} \\ V &= V_s - V_{smoy} \end{aligned} \quad (4.2)$$

La figure ci-dessous présente les résultats obtenus après l'élimination de l'offset.

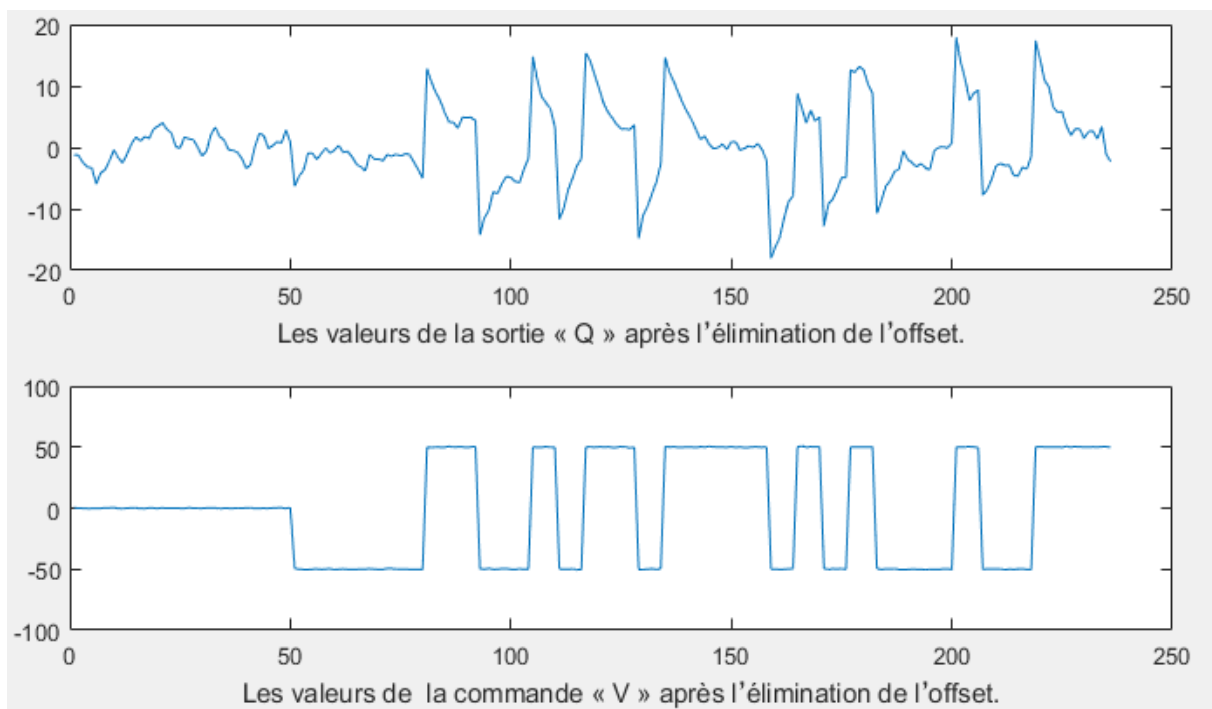


Figure 4.4 Les valeurs de la sortie « Q » et de la commande « V » après l'élimination de l'offset.

4.6 Le choix de la fonction de transfert

D'après le graphe de la sortie, on remarque que ce signal est une réponse temporelle d'un système de premier ordre de forme:

$$G(s) = \frac{s}{s+a}$$
$$\Rightarrow G(s) = \frac{k.s}{1+\tau.s} \quad (4.3)$$

Et $u(s)$ une réponse d'échelon:

$$u(s) = \frac{A}{s} . e^{-\tau s} \quad (4.4)$$

Ou $e^{-\tau s}$ représente le retard.

Donc la réponse est :

$$y(s) = G(s).u(s) \quad (4.5)$$

Ensuite on remplace l'équation (4.3) et (4.4) dans (4.5) nous obtenons :

$$y(s) = G(s).u(s) = \frac{k.s}{1+\tau.s} . \frac{A}{s} . e^{-\tau s} = \frac{k.A}{1+\tau.s} . e^{-\tau s} \quad (4.6)$$

On faire une division par τ , on obtient :

$$\Rightarrow y(s) = \frac{\frac{k}{\tau}.A}{s + \frac{1}{\tau}} . e^{-\tau s} \quad (4.7)$$

Sous l'hypothèse d'un bloqueur d'ordre zéro

$$G(z) = (1 - z^{-1})Z \left[\begin{array}{c} \frac{k}{\tau} \\ s + \frac{1}{\tau} \end{array} \right]$$

$$G(z) = \frac{\frac{k}{\tau}(1-z^{-1})}{1-e^{-\frac{1}{\tau}T_e} \cdot z^{-1}}$$

$$\Rightarrow \frac{y(k)}{u(k)} = \frac{\frac{k}{\tau}(1-q^{-1})}{1-e^{-\frac{1}{\tau}T_e} \cdot q^{-1}} \quad (4.8)$$

Finalement on obtient l'équation suivante:

$$y(k) = ay(k-1) + b_0u(k) - b_1u(k-1) \quad (4.9)$$

Avec : $a = e^{-\frac{1}{\tau}T_e}$, $b_0 = \frac{k_0}{\tau}$, $b_1 = \frac{k_1}{\tau}$.

L'identification des paramètres de ce modèle est limitée à la détermination de k gain statique du système, de τ constante de temps et T_e retard.

4.7 Estimation des paramètres du modèle par la méthode des moindres carrés

La méthode la plus utilisée pour déterminer les paramètres a_i et b_i du modèle consiste à évaluer l'écart quadratique moyen entre la sortie réelle du processus $y(k)$ et celle du modèle $y(k)_m$ et à ajuster les paramètres du modèle pour minimiser cet écart quadratique.

La sortie y_m du modèle à l'instant k connaissant la suite des entrées peut s'écrire (en supposant que $a_0 = 1$):

$$y_m(k) = -a_1y_m(k-1) - a_2y_m(k-2) - \dots - b_1u(k-1) - b_2u(k-2) + \dots + b_n u(k-n) \quad (4.10)$$

Pour une meilleur estimation des valeurs des paramètres, nous optons sur la méthode des moindres-carrés dont les étapes principales sont rappelées ici:

Pour estimer θ mise un critère quadratique J somme des carrés des erreurs de prédiction:

$$J(\theta) = \sum_{k=1}^N e_k^2 = E^T E = (Y - \Phi\theta)^T (Y - \Phi\theta) \quad (4.11)$$

Le minimum de J est obtenu en recherchant la valeur θ qui annule les dérivées partielles par rapport à chacune des composantes de θ soit $\frac{\partial J}{\partial \theta} = 0$ et l'optimum de θ est donné par :

$$\hat{\theta} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Q(k) \quad (4.12)$$

Q : Vecteur des valeurs prises par la variable à expliquer de dimension $Q = N \times 1$.

θ : Vecteur des paramètres de dimension $\theta = n \times 1$.

4.7.1 Méthode des moindres carrés normale

Nous posons $Q = Y$, $V = U$, et on remplace dans l'équation (4.9) on obtient l'équation suivante :

$$Q(k) = aQ(k-1) + b_0V(k) - b_1V(k-1) \quad (4.13)$$

Exprimons le problème sous forme matricielle, soit :

$$Q = \Phi\theta + E \quad (4.14)$$

Ou,

Q : Vecteur des valeurs prises par la variable à expliquer, de dimension $Q = N \times 1$.

Φ : Vecteur construit avec les mesures d'entrée/sortie, de dimension $\Phi = N \times n$.

θ : Vecteur des paramètres de dimension $\theta = n \times 1$.

D'après l'équation (4.13) on obtient les vecteurs θ et Φ :

$$\theta = [a \quad b_0 \quad b_1]^T \quad (4.15)$$

$$\Phi = [Q(k-1) \quad V(k) \quad V(k-1)] \quad (4.16)$$

Estimation des paramètres θ

Et après l'utilisation de la formule (4.12) sous Matlab, la simulation donne :

$$\hat{\theta} = \begin{bmatrix} -0.8172 \\ 0.1680 \\ -0.1659 \end{bmatrix}$$

Et après la comparaison de la formule (4.15) et les résultats obtenus de $\hat{\theta}$, alors les coefficients a , b_0 et b_1 sont :

$$\begin{aligned} a &= -0.8172 \\ b_0 &= 0.1680 \\ b_1 &= -0.1659 \end{aligned}$$

Les valeurs prédites du vecteur Q sont données par:

$$\hat{Q} = \Phi \hat{\theta} \quad (4.17)$$

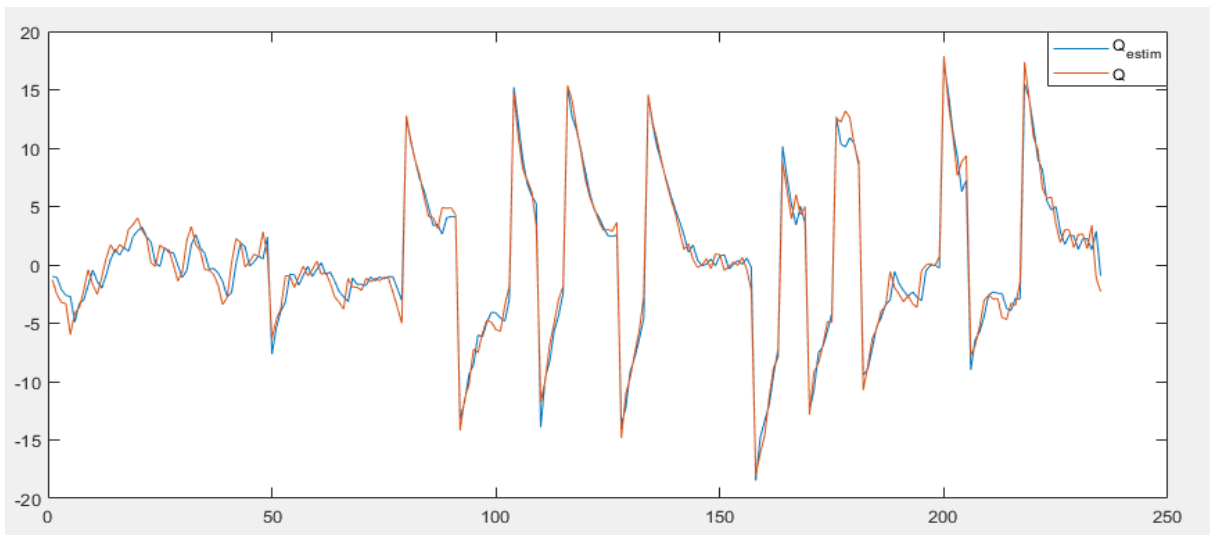


Figure 4.5 Les valeurs des $Q(k)$ et $\hat{Q}(k)$.

D'après la figure 4.5, nous constatons que les deux courbes $Q(k)$ mesuré et $\hat{Q}(k)$ sont quasiment identiques mais avec une présence d'un petit déphasage entre eux et donc l'estimation du paramètre du modèle est presque proche de les vrais valeurs du système,

Lorsque l'amplitude de la sortie augmente plus tard, on remarque que l'erreur entre la sortie mesurée et estimée diminue, cela signifie que notre estimateur est précis.

Calcul de l'erreur de prédiction

Le calcul de l'erreur estimée est appelé résidu ou erreur de prédiction. C'est l'écart entre la sortie réelle et la sortie prédite à l'instant k .

La minimisation du critère de moindre carré permet de régler le problème de l'optimisation.

$$e_estim = Q(k) - \hat{Q}(k) \quad (4.18)$$

$$erreur1 = sum(e_estim * e_estim) = 0.30224$$

D'après l'erreur estimée on peut dire que l'estimateur est biaisé, la variance des paramètres estimés est donné par:

$$Cov(\hat{\theta}) = sum \left[\frac{(Q(k) - \hat{Q}(k))^2}{((N-1) - n)(\Phi^T \Phi)^{-1}} \right] \quad (4.19)$$

Q : Vecteur des valeurs prises par la variable à expliquer de dimension $Q = N \times 1$.

Φ : Vecteur construit avec les mesures d'entrée/sortie, de dimension $\Phi = N \times n$.

θ : Vecteur des paramètres de dimension $\theta = n \times 1$.

N : est le nombre d'observations.

n : est le nombre de paramètres.

Et après la simulation sous Matlab, on obtient ce résultat :

$$\text{Cov}(\hat{\theta}) = \begin{bmatrix} 0.3337 & 0.0057 & 0.0315 \\ 0.0057 & 0.0094 & -0.0073 \\ 0.0315 & -0.0073 & 0.0124 \end{bmatrix}$$

Modèle ARX obtenu par Matlab

Nous posons la notation suivante :

$nn = [na \quad nb \quad nk]$; Tel que na et nb correspondent respectivement au nombre de paramètres à estimer dans les polynômes A et B (ordre des polynômes à estimer) et nk représente le retard.

$$nn = [1 \quad 2 \quad 0]$$

La fonction $[tharx] = arx(z, nn)$; Estime des paramètres par moindres carrés.

✚ Les paramètres estimés ainsi que leur écart-type sont:

$$A(z)y(t) = B(z)u(t) + e(t) \tag{4.20}$$

$$A(z) = 1 - 0.8172.z^{-1}$$

$$B(z) = 0.168 - 0.1659.z^{-1}$$

Coefficients de $A(z)$ suivant les puissances décroissantes :

$$A = [1 \quad -0.8172]$$

Coefficients de $B(z)$ suivant les puissances décroissantes :

$$B = [0.168 \quad -0.1659]$$

Les matrices A et B sont donnés avec une approximation dans les paramètres θ .

$$A(z) = 1 - 0.8172(+/-0.01827)z^{-1}$$

$$B(z) = 0.168(+/-0.00307) - 0.1659(+/-0.003515)z^{-1}$$

Calcul des paramètres

On a:

$$a = e^{-\frac{1}{\tau}T_e} = -0.8449$$

$$\text{Et } b_0 = \frac{k_0}{\tau} = 0.168, \quad b_1 = \frac{k_1}{\tau} = -0.1659.$$

Donc :

$$a = e^{-\frac{1}{\tau}T_e} = -0.8172.$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{\tau}T_e = \ln(0.8172) = -0.1685$$

$$\boxed{\Rightarrow \tau = 24.777s}$$

$$b_0 = \frac{k_0}{\tau} = 0.168.$$

$$\boxed{\Rightarrow k_0 = 4.16}$$

$$b_1 = \frac{k_1}{\tau} = -0.1659$$

$$\boxed{\Rightarrow k_1 = -4.11}$$

Fonction de transfert

La fonction de transfert en temps discret

La fonction de transfert en temps discret avec les nouveaux paramètres A et B est:

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{0.168 - 0.1659.z^{-1}}{1 - 0.8172.z^{-1}} \quad (4.21)$$

La fonction de transfert en temps continu

On applique la fonction « d2c » pour obtenir la fonction de transfert en temps continue :

$$H(s) = \frac{0.168s - 0.0004509}{s + 0.0404} \quad (4.22)$$

4.7.2 Estimation de deux paramètres a et b (méthodes de dérivation)

Nous appliquons la méthode de dérivation de la manière suivante :

$$Q(k) = aQ(k-1) + bV(k) - V(k-1)$$

$$\Rightarrow Q(k) = a.Q(k-1) + b.\Delta V(k) \quad (4.23)$$

Telle que : $\Delta V(k) = V(k) - V(k-1)$

D'après la formule (4.23) on obtient les vecteurs θ_2 et Φ_2 :

$$\theta_2 = [a \quad b]^T \quad (4.24)$$

$$\Phi_2 = [Q(k-1) \quad \Delta V(k)] \quad (4.25)$$

Estimation des paramètres θ

Pour calculer les valeurs de $\hat{\theta}_2$ il faut utiliser la formule suivante :

$$\hat{\theta}_2 = (\Phi_2^T \Phi_2)^{-1} \Phi_2^T Q(k) \quad (4.26)$$

Et après la simulation sous Matlab, on obtient :

$$\hat{\theta}_2 = \begin{bmatrix} -0.8277 \\ 0.1674 \end{bmatrix}$$

Et par comparaison avec le résultat précédente et la formule (4.24), alors les coefficients a , b sont :

$$a = -0.8277$$

$$b = 0.1674$$

Et puis nous calculons les valeurs prédites $\hat{Q}_2(k)$:

$$\hat{Q}_2(k) = \Phi_2 \hat{\theta}_2 \quad (4.27)$$

Après le calcul des valeurs de $\hat{Q}_2(k)$, la simulation donne:

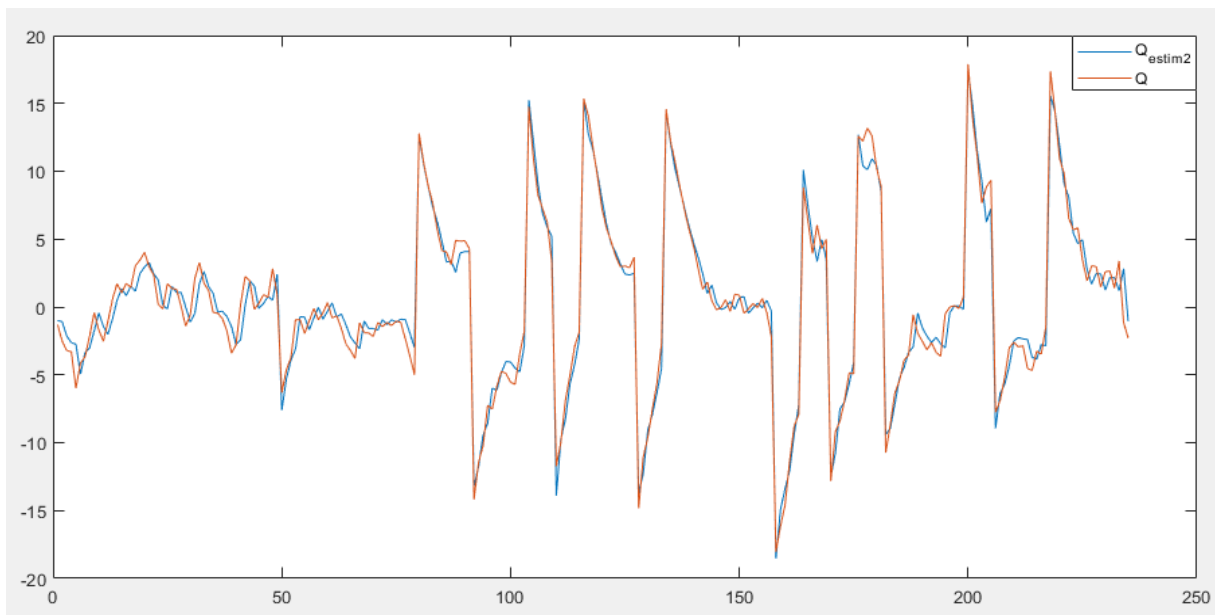


Figure 4.6 Les valeurs de $Q(k)$ et du $\hat{Q}_2(k)$.

D'après la figure 4.6, nous constatons que les deux courbes $Q(k)$ mesuré et $\hat{Q}_2(k)$ sont quasiment identique mais avec une présence de déphasage entre les deux courbe, et donc

l'estimation du paramètre du modèle est presque proche de les vrais valeurs du système, on remarque dans l'intervalle [0, 50] l'erreur ou l'écart entre la sortie mesuré et estimé est important et lorsque l'amplitude augmente on observe que cet erreur diminué qui signifie que notre estimateur est précis.

Afin d'analyser les figures, nous calculons l'erreur de prédiction.

Calcul de l'erreur de prédiction

L'erreur de prédiction est:

$$e_estim2 = Q(k) - \hat{Q}_2(k) \quad (4.28)$$

$$erreur2 = \text{sum}(e_estim2 * e_estim2) = 0.3298$$

L'erreur estimé n'est pas nul, donc l'estimateur est biaisé, la variance des paramètres estimés est donné par:

$$Cov(\hat{\theta}_2) = \frac{(Q(k) - \hat{Q}_2(k))^2}{((N-1) - n_2)(\Phi_2^T \Phi_2)^{-1}} \quad (4.29)$$

Q : Vecteur des valeurs prises par la variable à expliquer de dimension $Q = N \times 1$.

Φ : Vecteur construit avec les mesures d'entrée/sortie, de dimension $\Phi = N \times n$.

θ_2 : Vecteur des paramètres de dimension $\theta_2 = n_2 \times 1$.

N : est le nombre d'observations.

n_2 : est le nombre de paramètres.

Après la simulation sous Matlab on obtient ce résultat:

$$Cov(\hat{\theta}_2) = \begin{bmatrix} 0.1417 & -0.0054 \\ -0.0054 & 0.0088 \end{bmatrix}$$

Modèle « ARX » obtenu par Matlab

Nous posons la notation suivante :

$nn = [na \quad nb \quad nk]$; Tel que na et nb correspondent respectivement au nombre de paramètres à estimer dans les polynômes A et B (ordre des polynômes à estimer) et nk représente le retard.

$$nn = [1 \quad 1 \quad 0]$$

La fonction $[tharx] = arx(z, nn)$; Estime des paramètres par moindres carrés.

✚ Les paramètres estimés ainsi que leur écart-type sont:

$$A_d(z)y(t) = B_d(z) + e(t) \quad (4.30)$$

$$A_d(z) = 1 - 0.8277 \cdot z^{-1}$$

$$B_d(z) = 0.1674$$

Coefficients de $A(z)$ suivant les puissances décroissantes :

$$A_d = [1 \quad -0.8277]$$

Coefficients de $B(z)$ suivant les puissances décroissantes :

$$B_d = [0.1674]$$

Calcul des paramètres

On a:

$$a = e^{-\frac{1}{\tau}T_e} = -0.8277, \quad b = \frac{k}{\tau} = 0.1674.$$

Donc :

$$a = e^{\frac{-1}{\tau} T_e} = -0.8277 .$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{\tau} T_e = \ln(0.8277) = -0.1891$$

$$\boxed{\Rightarrow \tau = 26.441s}$$

$$b = \frac{k}{\tau} = 0.1674 .$$

$$\boxed{\Rightarrow k = 4.42}$$

Fonction de transfert

La fonction de transfert en temps discret

La fonction de transfert en temps discret avec les nouveaux paramètres A et B est :

$$H_2(z) = \frac{B_d(z)}{A_d(z)} = \frac{0.1674}{1 - 0.8277 \cdot z^{-1}} \quad (4.31)$$

La fonction de transfert en temps continu

On applique la fonction « d2c » pour obtenir la fonction de transfert en temps continu :

$$H_2(s) = \frac{0.1674s + 0.03674}{s + 0.03784} \quad (4.32)$$

4.7.3 Estimation de deux paramètres a et b (méthodes d'intégration)

On a l'équation suivante :

$$Q(k) = -a \cdot Q(k-1) + b(V(k) - V(k-1))$$

$$\Rightarrow Q(k) = -a \cdot Q(k-1) + b \cdot \Delta V(k) \quad (4.33)$$

Nous savons que:

$$\begin{aligned} V(k-1) &= V(k).k^{-1} \\ \text{et} \\ Q(k-1) &= Q(k).k^{-1} \end{aligned} \tag{4.34}$$

Donc l'équation devient de forme suivante :

$$\begin{aligned} Q(k) &= -a.Q(k).k^{-1} + b.(V(k) - V(k).k^{-1}) \\ \Rightarrow Q(k)[1 + ak^{-1}] &= b.V(k)[1 - k^{-1}] \end{aligned}$$

Ensuite :

$$\frac{Q(k)}{1 - k^{-1}} = \frac{b.V(k)}{1 + a.k^{-1}}$$

Posons: $Q_i = \frac{Q(k)}{(1 - k^{-1})} \Rightarrow Q_i = \frac{b.V(k)}{1 + a.k^{-1}}$

$$\begin{aligned} Q_i(k) + a.Q_i(k-1) &= b.V(k) \\ \Rightarrow Q_i(k) &= -a.Q_i(k-1) + b.V(k) \end{aligned} \tag{4.35}$$

Et $Q_i(k) = Q_i(k-1) + Q(k)$ (4.36)

D'après la formule (4.35) on obtient les vecteurs θ_3 et Φ_3 :

$$\theta_3 = [a \quad b]^T \tag{4.37}$$

$$\Phi_3 = [-Q(k-1) \quad V(k)] \tag{4.38}$$

Estimation des paramètres θ

Les valeurs estimés de $\hat{\theta}_3$ est de la forme suivante :

$$\hat{\theta}_3 = (\Phi_3^T \Phi_3)^{-1} \Phi_3^T Q_i(k) \quad (4.39)$$

Et après l'utilisation de la formule (4.39) sous Matlab, la simulation donne :

$$\hat{\theta}_3 = \begin{bmatrix} -0.9498 \\ 0.1071 \end{bmatrix}$$

Après la comparaison avec la formule (4.37), alors les coefficients a et b sont :

$$a = -0.9498$$

$$b = 0.1071$$

Calcul de l'erreur de la prédiction

Calcul de $Q_{int}(k)$

$$Q_{int}(k) = \hat{Q}_i(k) - \hat{Q}_i(k-1) \quad (4.40)$$

La figure suivante représente les résultats de $Q(k)$ et $Q_{int}(k)$.

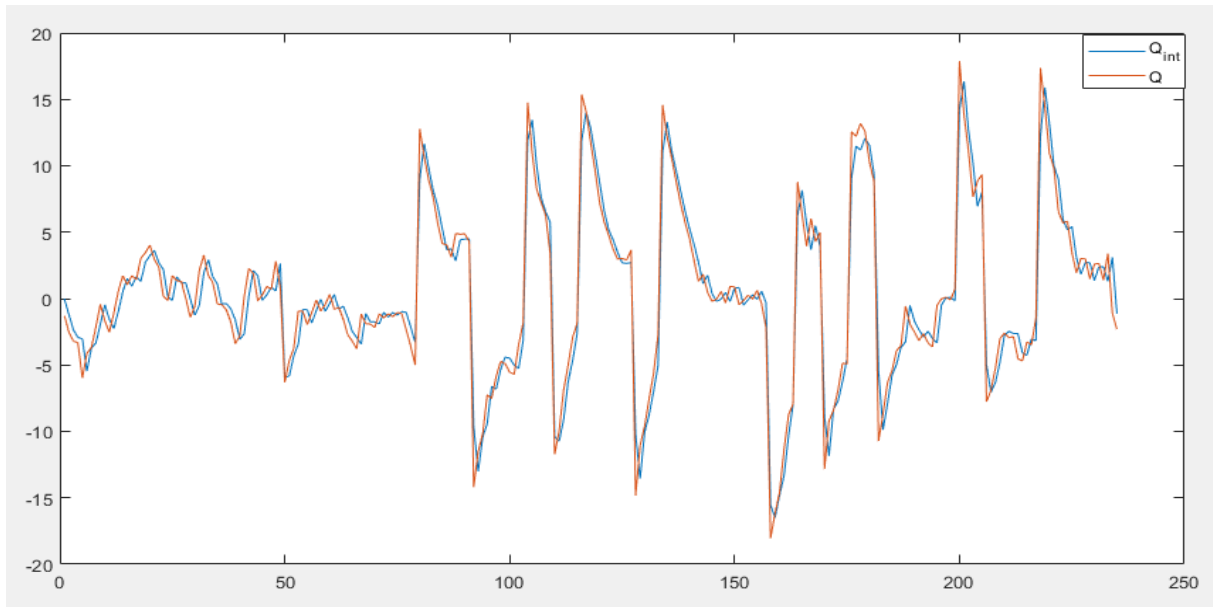


Figure 4.7 Les valeurs des $Q(k)$ et du $Q_{int}(k)$.

D'après la figure 4.7 on observe que les deux courbes sont quasiment identiques, mais avec une présence de déphasage entre eux, ce déphasage est important par rapport à les deux méthodes précédentes. Lorsque l'amplitude augmente on remarque que l'erreur augmente. Cela signifie que notre estimateur n'est pas précis.

Afin d'analyser la figure, nous calculons l'erreur de prédiction.

L'erreur de prédiction est:

$$e_estim3 = Q(k) - Q_{int}(k) \quad (4.41)$$

$$erreur3 = \text{sum}(e_estim3 * e_estim3) = 0.5634$$

L'erreur estimée n'est pas nul donc l'estimateur est biaisé, la variance des paramètres estimés est donné par:

$$\text{Cov}(\hat{\theta}_3) = \frac{(Q_i(k) - \hat{Q}_i(k))^2}{((N-1) - n_3)(\Phi_3^T \Phi_3)^{-1}} \quad (4.42)$$

Q : Vecteur des valeurs prises par la variable à expliquer de dimension $Q = N \times 1$.

θ_3 : Vecteur des paramètres de dimension $\theta_3 = n_3 \times 1$.

N : est le nombre d'observations.

n_3 : est le nombre de paramètres.

Après la simulation sous Matlab on obtient ce résultat :

$$\text{Cov}(\hat{\theta}_3) = \begin{bmatrix} 0.5448 & 0.1749 \\ 0.1749 & 0.2920 \end{bmatrix}$$

Modèle « ARX » obtenu par Matlab

Nous posons la notation suivante :

$nn = [na \quad nb \quad nk]$; Tel que na et nb correspondent respectivement au nombre de paramètres à estimer dans les polynômes A et B (ordre des polynômes à estimer) et nk représente le retard.

$$nn = [1 \quad 1 \quad 0]$$

La fonction $[tharx] = arx(z, nn)$; Estime des paramètres par moindres carrés.

✚ Les paramètres estimés ainsi que leur écart-type sont:

$$A_i(z)y(t) = B_i(z) + e(t) \tag{4.43}$$

$$A_i(z) = 1 - 0.9498.z^{-1}$$

$$B_i(z) = 0.1071$$

Coefficients de $A(z)$ suivant les puissances décroissantes:

$$A_i = [1 \quad -0.9498]$$

Coefficients de $B(z)$ suivant les puissances décroissantes:

$$B_i = [0.1071]$$

Calcul des paramètres

On a:

$$a = e^{-\frac{1}{\tau} T_e} = -0.9498$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{\tau} T_e = \ln(0.9498) = -0.0515$$

$$\boxed{\Rightarrow \tau = 97.08s}$$

$$b = \frac{k}{\tau} = 0.1071.$$

$$\boxed{\Rightarrow k = 10.39}$$

Fonction de transfert

La fonction de transfert en temps discret

La fonction de transfert en temps discret avec les nouveaux paramètres A et B est :

$$H_3(z) = \frac{B_i(z)}{A_i(z)} = \frac{0.1071}{1 - 0.9498z^{-1}} \quad (4.44)$$

La fonction de transfert en temps continu

On applique la fonction « d2c » pour obtenir la fonction de transfert en temps continu :

$$H_3(s) = \frac{0.1071s + 0.02197}{s + 0.0103} \quad (4.45)$$

4.7.4 Etude comparative

Comparaison entre la méthode normale et la méthode de dérivation

La figure ci-dessous représente les résultats du deux méthodes:

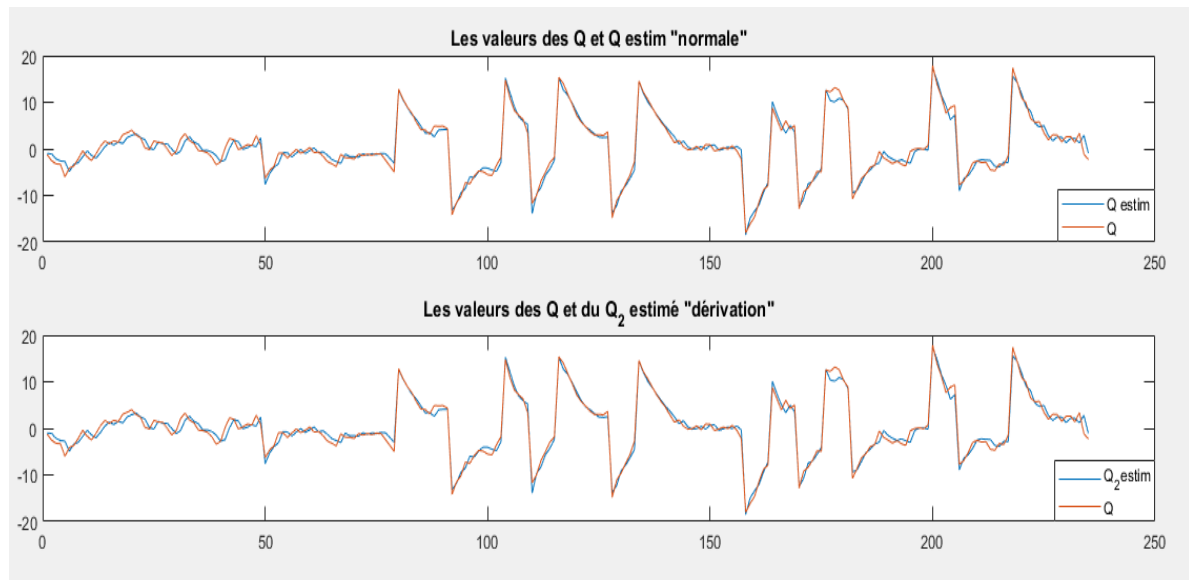


Figure 4.8 Les valeurs de sortie de la méthode normale et la méthode de dérivation.

D'après la figure 4.8 et les résultats obtenus précédemment on conclut que dans les deux méthodes il y a un déphasage entre les deux courbes donc, lorsque l'amplitude de la sortie des deux systèmes augmente on observe une apparence d'erreur au niveau de la courbe estimée, cela montre qu'il y a un manque de précision, quand l'amplitude des deux systèmes diminue on observe que l'erreur est diminuée, mais au côté de l'erreur estimée, dans la méthode normale est $e=0.3022$ et dans la méthode de dérivation est $e=0.3298$, qui montre que la méthode normale est plus précise que la méthode de dérivation.

Comparaison entre la méthode normale et la méthode d'intégration

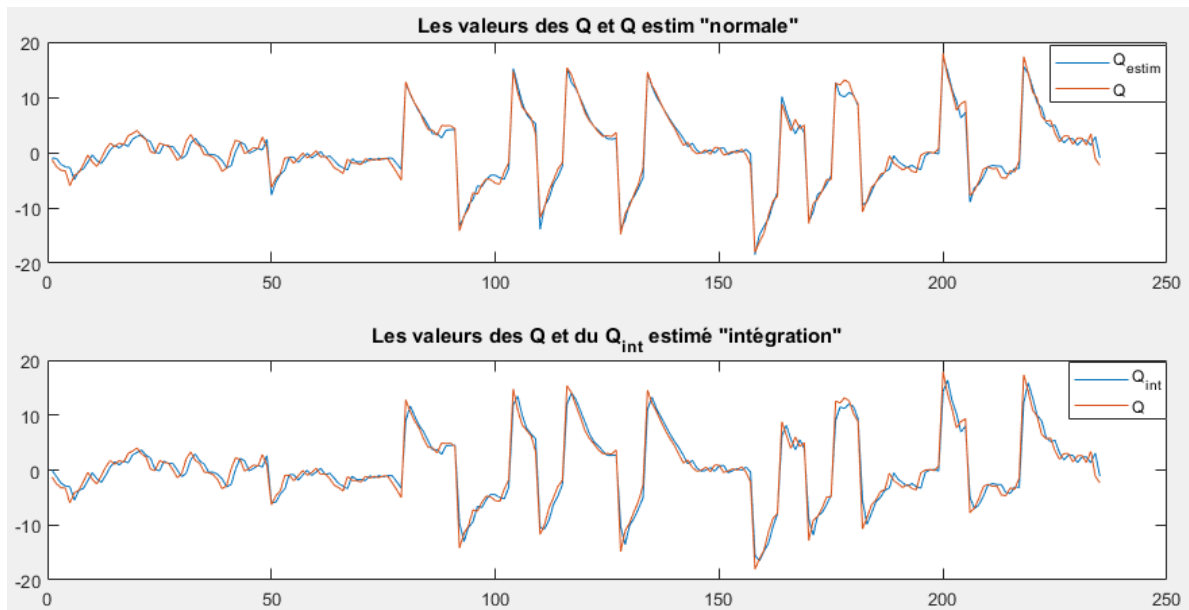


Figure 4.9 Les valeurs de sortie de la méthode normale et la méthode d'intégration.

D'après la figure 4.9 Nous remarquons une présence de dépassement important dans la méthode d'intégration par rapport à la méthode normale. En revanche le système répond plus rapidement dans la méthode d'intégration.

En terme de précision, nous remarquons que la méthode normale est mieux que la méthode d'intégration, car l'erreur estimée dans la première méthode est $e=0.3022$ et $e=0.5634$ dans la deuxième méthode.

Comparaison entre la méthode d'intégration et la méthode de dérivation

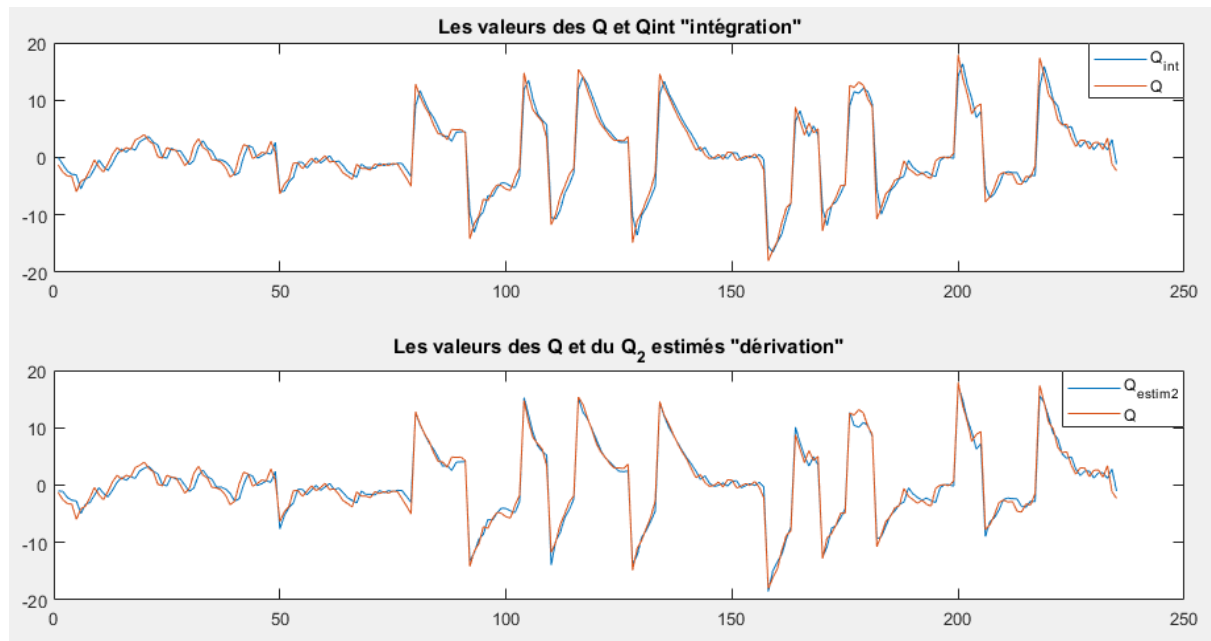


Figure 4.10 Les valeurs de sortie de la méthode de dérivation et la méthode d'intégration.

D'après la figure 4.10 Nous constatons une réponse rapide dans le cas de la méthode de dérivation par rapport à la méthode d'intégration. On conclut à partir des résultats précédant que la méthode de dérivation est mieux que la méthode d'intégration en terme de précision car l'erreur estimée dans la première méthode est $e=0.3298$ et $e=0.56343$ dans la deuxième méthode.

4.8 Commande prédictive

La commande prédictive (ou compensation ou correction anticipatrice) est une technique de commande avancée de l'automatique. Elle a pour objectif de commander des systèmes industriels complexes. Le principe de cette technique est d'utiliser un modèle dynamique du processus à l'intérieur du contrôleur en temps réel afin d'anticiper le futur comportement du procédé. La commande prédictive peut être utilisée pour commander des systèmes complexes comportant plusieurs entrées et sorties où le simple régulateur PID est insuffisant. Cette technique est particulièrement intéressante lorsque les systèmes possèdent des retards importants, des réponses inverses et de nombreuses perturbations.

La principale idée de la commande prédictive se résume à « utiliser un modèle pour prédire le comportement du système et choisir la meilleure décision au sens d'un certain coût tout en respectant les contraintes ».

4.8.1 Fonctionnement

La commande prédictive réalise à chaque période d'échantillonnage du contrôleur les mêmes étapes :

- Calcul des prédictions des variables contrôlées jusqu'à un horizon de temps $t+N_u$ grâce au modèle interne.
- Élaboration d'une trajectoire de référence à suivre.
- Calcul de la future loi de commande à appliquer sur les variables manipulées jusqu'à un horizon temporel $t+N$.
- Seul le premier élément de la loi de commande calculée est appliqué sur le système au coup d'horloge suivant. Toutes ces étapes se répéteront ensuite, c'est le principe de l'horizon fuyant.

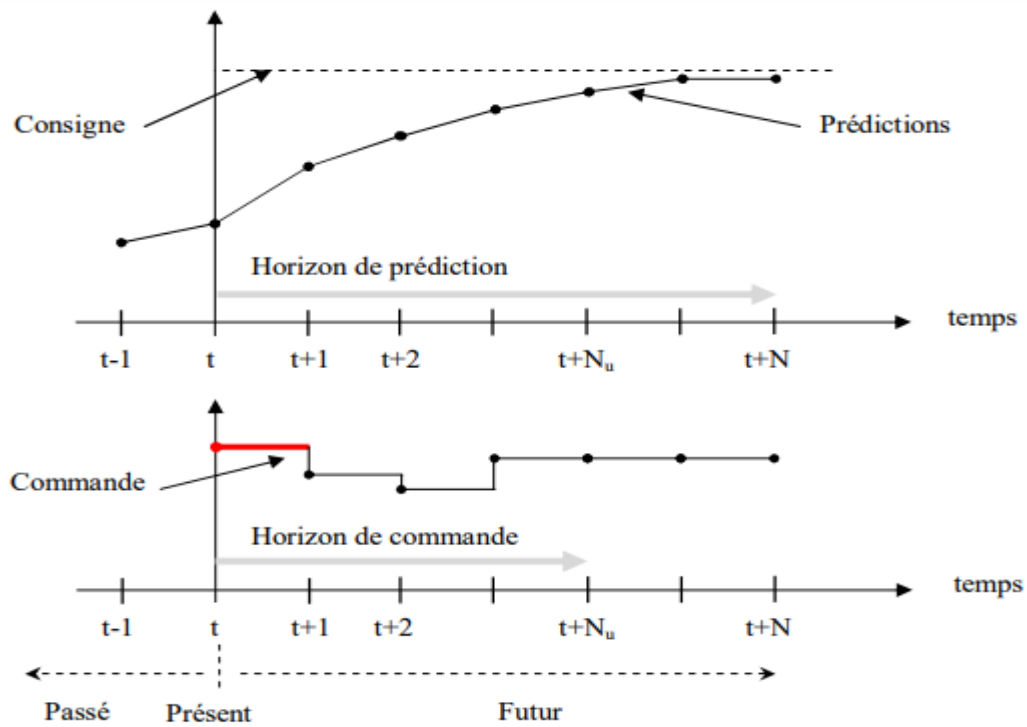


Figure 4.11 Principe de la commande prédictive.

4.8.2 Éléments de la commande prédictive

Les éléments de base de la commande prédictive sont :

a) Modèle de prédiction

Le modèle de prédiction se compose de deux parties, la première décrit la relation entrées sorties et l'autre les perturbations et les erreurs de modélisation. Le modèle doit être discret car la commande prédictive est une commande numérique. Selon le modèle, il existe plusieurs formes de commande prédictive :

- Commande prédictive linéaire à base de modèle d'état, Fonction de transfert ... etc.
- Commande prédictive non linéaire à base de modèle d'état non linéaire ... etc.

b) Fonction coût (critère de performance)

La fonction coût J pénalise les écarts entre les sorties prédites commandées $y(t+k|t)$ et la trajectoire de référence $r(t+k|t)$. La trajectoire de référence peut dépendre de mesures effectuées à l'instant k , en particulier, son point de départ peut être la mesure de la sortie $y(t)$; ainsi elle peut être un ensemble de point fixe ou autre trajectoire prédéterminée. On définit la fonction coût suivante :

$$J = \sum_{k=1}^N \|x_k - r_k\|^2 + \sum_{k=0}^{N_u-1} \|u_k\|^2$$

Où N est l'horizon de prédiction et N_u l'horizon de commande, on assume que $N_u \leq N$, et que $u(t+k|t) = u(t+N_u-1|t)$ pour $k \geq N_u$, donc $u(t+k|t) = u(t+N_u-1|t)$ pour tout $k \geq N_u$. La forme de l'équation (2.4) implique que l'erreur entre la sortie et la référence est pénalisée à chaque instant situé dans l'horizon de prédiction $1 \leq k \leq N$. C'est le cas le plus fréquent dans la commande prédictive. Pour le cas de la régulation à l'origine la référence r est nulle.

4.8.3 Modèle et prédiction

Le concept fondamental de la commande prédictive est qu'elle s'appuie sur un modèle mathématique du processus à contrôler. Ce modèle est le plus souvent représenté sous forme de fonction de transfert discrète utilisant la transformée en Z . On attribue une fonction de transfert $H(z)$ à chaque couple y/u où y représente la variable contrôlée et u la variable manipulée (appelée également commande).

$$H(z) = \frac{y(z)}{u(z)}$$

Grâce à ces fonctions de transfert on peut prédire les valeurs futures des variables contrôlées jusqu'à un certain horizon. Néanmoins, selon les méthodes utilisées, on peut utiliser d'autres modèles (représentation d'état, réponse impulsionnelle...).

4.8.4 Application sur Matlab

Après l'identification de notre système, et l'estimation des paramètres de ce modèle et après l'application de modèle "ARX", nous obtenons la fonction de transfert suivante :

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{0.168 - 0.1659.z^{-1}}{1 - 0.8172.z^{-1}}$$

Dans ce cas le modèle de prédiction, c'est une commande prédictive linéaire à base de fonction de transfert, et après l'utilisation de la fonction de transfert dans le programme Matlab pour prédire le comportement du système et choisir la meilleure décision au sens d'un certain coût tout en respectant les contraintes, nous obtenons les résultats suivants :

Les résultats de simulation pour l'entrée :

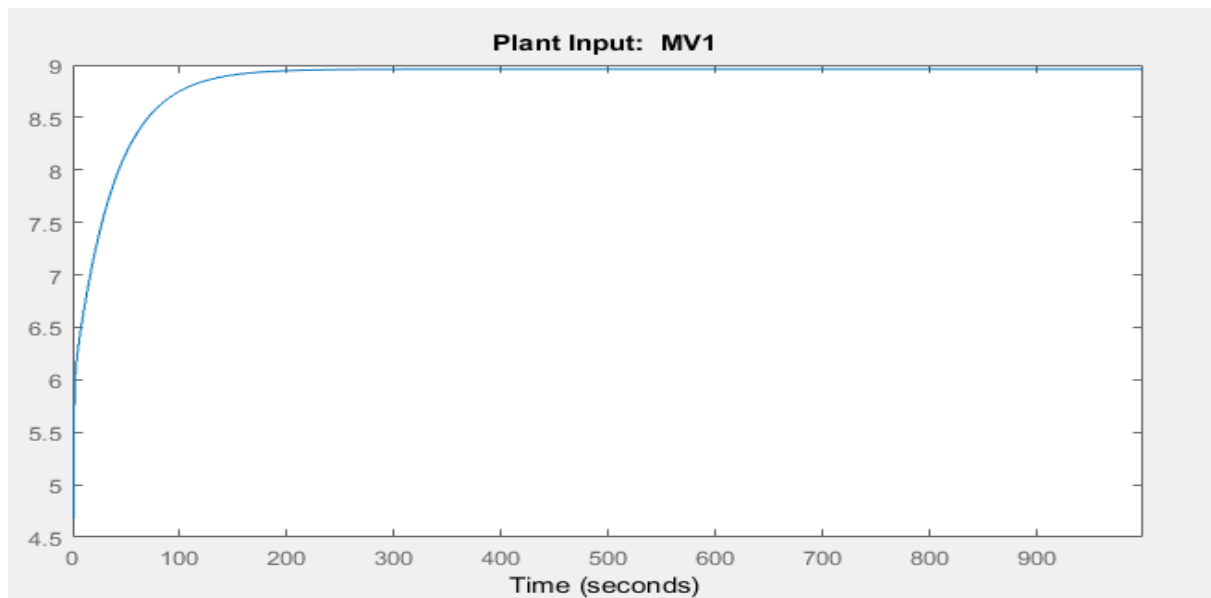


Figure 4.12 La réponse du système partielle-broyage classification avec une commande prédictive.

4.9 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté les résultats de simulations concernant la méthode des moindres carrés normale et récursive, la méthode récursive est composé de deux méthodes sont « la dérivation » et « l'intégration ». Dans cette section, nous avons fait une estimation des paramètres par les trois méthodes avec le modèle auto régressif exogène (ARX), et finalement nous avons exposé une étude comparative entre les trois méthodes. Et après l'analyse des figures et les résultats obtenus précédemment, on conclut que l'estimateur dans la méthode normale est plus précis par rapport à la méthode dérivation et d'intégration. Enfin nous utilisons le modèle obtenus après l'identification pour prédire le comportement du système utilisé.

Conclusion générale

Le travail accompli est conforme aux objectifs fixés, à savoir comme premier objectif une recherche bibliographique dans le domaine de la technique d'identification des systèmes et qui a servi de base théorique à la réalisation de notre deuxième objectif dans l'occurrence, la conception d'un programme d'identification du modèle d'un système dynamique linéaire. Ce programme a été réalisé selon les étapes de la méthodologie d'identification telle qu'elle a été présentée dans le troisième chapitre sans avoir rencontré certains problèmes qu'il a été estimé nécessaire de soulever.

Les résultats de simulation ont montré une priorité en termes de conditions de robustesse. Nous avons démontré qu'en terme de rapidité la méthode moindre carré récursive intégrale semble être la meilleur, tandis qu'en terme de précision celle de la méthode normale est meilleur. Notre estimation par la méthode des moindres carrées normale et récursive, dépend du modèle auto régression exogène (ARX). En termes de perspective, nous pourrions réaliser une synthèse de comparaison avec une technique d'identification « MOESP » sous espaces ; nous pourrions aussi appliquer notre résultat aux systèmes multi variables avec une approche multi modèle.

Notre estimation par la méthode des moindres carrées normale et récursive, dépend du modèle auto régression exogène (ARX). Ensuite, nous calculons la commande prédictive du système utilisé par un programme Matlab à partir de la fonction transfert du système obtenu par la technique d'identification. En termes de perspective, nous pourrions réaliser une synthèse de comparaison entre les techniques d'identification « MOESP » sous espaces ; nous pourrions aussi appliquer notre résultat aux systèmes multi variables.

Bibliographie

- [1] **A BEMPORAD, A OLIVERI, T POGGI, M STORACE.** "Ultra-Fast Stabilizing Model Predictive Control via Canonical Piecewise Affine Approximations", IEEE Trans. Automatic Control, vol. 56, no. 12, pp. 2883, 2011.
- [2] **B MERMILLOD.** 'Influence des propriétés superficielles de la pyrite sur la rétention de molécules organiques soufrées'. Vandœuvre-lès-Nancy : Institut National Polytechnique de Lorraine, 2005.
- [3] **C A. SERAPHIN,** 'Contribution à la modélisation du broyeur à boulets'. Thèse de doctorat : Génie mécanique. Laval : Université Laval Québec: p 265, 1998.
- [4] **C CHOUQUET.** 'Modèles linéaires'. Available : <https://www.math.univ-toulouse.fr/~barthe/M1modlin/poly.pdf>, 2009.
- [5] **C. Xi, F. Hai-tao, W. Xin.** "Subspace Identification for Wiener Systems with General Nonlinearity," System, pp. 1696-1701, 2011.
- [6] **E CAMACHO, C BORDONS.** "Model predictive control", Ed. Springer-Verlag, London, 2004.
- [7] **F ALBERA,** 'La modélisation du broyage en minéralurgie: inventaire des modèles développés, confrontation avec les performances d'installations réelles, critères de sélection'. Orléans cedex : Université d'Orléans cedex, p 79, 1985.
- [8] **F BATEMAN.** "identification". <http://francois.bateman.free.fr/HTML/filtrage-ident/index.htm>
- [9] **F J Carrillo, A Baysse, A Habbadi.** "Output error identification algorithms for continuous-time systems operating in closed-loop". In 15th IFAC Symposium on System Identification, SYSID 2009, volume 15 de System Identification, St Malo, France, jul 6-8 2009.
- [10] **G CABODEVILA** 'Identification des systèmes'. Besançon cedex : École Nationale Supérieure de Mécanique et des Microtechniques : 95p.

[11] **G LEFEBVRE**. *“Modification de surface de particules de talc par de la silice nanométrique hydrophobe (par enrobage à sec) ”*. Thèse de doctorat : Génie des Procédés et de l'Environnement. Toulouse : Université de Toulouse : 208p, 2010.

[12] **J Cullivan, R Williams, T Dyakowski, C Cross**. *“New understanding of a hydrocyclone flow field and separation mechanism from computational fluid dynamics”*. Minerals Engineering, 17, 651–660 (2004).

[13] **J-P Melcion, J-L Ilari**, *“ Technologie des pulvérulents dans les IAA ”*, Lavoisier, pp.375-406, Sciences & Techniques Agroalimentaires, 978-2743006211, 2003.

[14] **J Schoukens, R Pintelon**. *“Identification of linear systems”*. A practical guideline to accurate modeling. Pergamon Press, 1991.

[15] **H Garnier, L Wang**. *“Continuous-time model identification from sampled data”*. Springer Verlag, To be published, 2007.

[16] **H Garnier, M Gilson, T Bastogne**. *“Identification de modèles paramétriques à temps continu. Méthodes, outil logiciel et avantages”*. Journées Identification et Modélisation Expérimentale (JIME'2006), Nov 2006, Poitiers, France. pp.CDRom, 2006.

[17] **I Landau, A Besançon-Voda, G Besançon, C Durieu, A Karimi, M Namar, T Poinot, L Pronzato, H F Raynaud, J Richalet, J C Trigeassou, E Walter, and A Zolghardi**. *“Identification des systèmes, volume Systèmes”* automatisés, Information Commande Communication. Hermès, 2001.

[18] **K MITCHELL** et al. *“Waterway Performance Monitoring via Automatic Identification System (AIS) Data”*. Transportation Research Board (TRB) 93rd Annual Meeting, Chicago, 12-16 janvier 2014.

[19] **K MUKEPE**, *“Identification and control of wet grinding processes”*. Bruxelles: Université Libre de Bruxelles, 2013.

[20] **L LJUNG**. *“System identification”*. Theory for the user. Prentice Hall, 1987.

- [21] **M Boumendil, M Kardi.** « *Eude et implémentation des algorithmes d'identification paramétriques et application au signal de parole* », Blida : Université de Blida, Octobre 2002.
- [22] **M Lovera, T Gustafsson, M Verhaegen.** ‘*Recursive subspace identification of linear and non-linear Wiener state-space models*’. *Automatica*, vol. 36, no. April, pp. 1639-1650, 2000.
- [23] **M Kazemi, M Arefi.** ‘*A fast iterative recursive least squares algorithm for Wiener model identification of highly nonlinear systems*’, *ISA Transactions*, **67**, (382), 2017.
- [24] **N PETIT.** ‘*Commande prédictive*’. Ecole Centrale Paris, France, 2006.
- [25] **P Dos Santos, Azevedo Perdicoulis, T Novara, C Ramos, J D Rivera.** ‘*Linear Parameter-Varying System identification*’. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 2012.
- [26] **R ISEMANN.** ‘*Process fault detection based on modeling and estimation methods*’. a Survey. *Automatica*, 20(4):387-404, 1984.
- [27] **S RACHAD, H FOURAIJI, B BENSASSI,** ‘*Modeling a production system based on parametric identification approach*’, IEEE Second World Conference on Complex Systems (WCCS), Agadir, Morocco, 2014.
- [28] Université de Lund (Suède), ‘*identification des systèmes*’. Disponible : <http://www.control.lth.se/course/FRT041/>.
- [29] **V LAURAIN.** ‘*Contributions à l'identification de modèles paramétriques non linéaires*’. Nancy : Université Henri Poincaré, Nancy 1: p 132, 2010.
- [30] **Z YUSOFF, Z MUHAMMAD, M RAHIMAN, M TAIB,** ‘*ARX Modeling for Down-Flowing Steam Distillation System*’, IEEE 8th International Colloquium on Signal Processing and its Application, Melaka, Malaysia, 2012.